CAROLI RENALDINII

SERENISS. MAGNI PRINCIPIS ETRVRIÆ

PHILOSOPHI, AC MATHEMATICI.

OLIM IN PISANA ACADEMIA PHILOSOPHIAM ORDINARIO LOCO PROFITENTIS.

NVNC IN PATAVINO LYCEO PHILOSOPHI PRIMAE SEDIS

ARTIS ANALYTICÆ MATHEMATVM

PARS SECVNDA,

Tractatus de Algebra Specioſa; de Reſolutione, & Compoſitione Mathematica; & Geometram promotum complectens,

EIDEM SERENISSIMO PRINCIPI D.



BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

FLORENTIÆ,

Ex Typograp. Ioſephi Cocchini ad inſigne Stellæ, MDCLXVII.

SVPERIORVM PERMISSV.

SERENISSIMO

COSMO MAGNO ETRVRIÆ PRINCIPI

CAROLVS RENALDINIVS F. P.

TANTI refert, Sereniſsime Princeps, te literarum ſtudijs operam iugiter nauaſſe; quas enim Artes ingenuus, atque robuſtus animus excoluit, eas & amore proſequitur, & opitulatione fouet, & patrocinio ſuſtentat. Nec Romanorum ſplendor ille Mecœnas credatur ad optimas diſciplinas ſeſe adiungentibus extitiſſe præſidio, quòd Fortunæ, ſed potiùs animi diuitijs ampliſsimis circumflueret. Adamas, Rubinus, & pretioſum quodcumque lapillorum genus, Regiæ coronæ decus, quamuis ingentis pretij, tamen apud rudes, ac indiſertos homines nullam æſtimationem adipiſcitur. Neque refert, quòd incomparabili ſplendore ſuapte natura, fulgeat, atque detineat; adhuc enim pretioſiſsima gemma, vel rudis, & inculta iacet; vel etſi perpolita præſtantis Artificis induſtria, ſummiſq; laboribus exculta blandiùs rideat, non tamen agreſtem animum percellit, cui perſpectum haud eſt, ſuſpiciendam eſſe, maximaque cum admiratione ſpectandam, quòd primò ſit Naturæ ſolertis, deinde verò Artis elegantiſsimum opus. Iam dudum in hoc literario puluere primos, quos exercui labores, tibi conſecratos voluit excelſi tui nominis Maieſtas, cœleſtis Indoles, eximia Virtus; cùm verò perſpexerim

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

ſpexerim non inuiſos tibi fuiſſe, deinceps, & quos modo tibi nuncupatos volo, & cæteros, quos in poſterum intueberis; non enim iniucundos futuros tua ſumma clementia fretus exiſtimo. Illud autem plurimum habet momenti, quòd cum omnibus virtutum ornamentis me affectum eſſe deſiderem, nihil tamen eſt, quod malim, quàm me, & gratum eſſe, & videri, vt cum Sapientiſsimo loquar, cui hæc vna virtus maxima nedum, ſed reliquarum mater, & altrix videbatur. Perge Sereniſsime Princeps; Maiorum enim videberis immortali cum laude veſtigia repetere, qui calcando ſubſtructam virtutibus viam ad gloriam nomen æternitati commendarunt. Hinc tamen pace dixerim Celſitudinis tuæ, tibi ſolùm id ſplendoris affulget, quod argumento ſit, te debere ijs acceptam referre Virtutem, quaſi non proprijs ſudoribus, ſed quodam hæreditario iure comparatam.

Siquidem hæc, de qua Poſteritas gloriatur, in illis primùm illuxit, adeo vt, in poſteris virtutis iubar aliunde tranſfuſum, præclaros itidem alienos labores præſeferat, atque teſtetur. Maiores enim nobis liberaliſsimè Fortunę bona, nedum, ſed animi, hoc eſt Virtutum ornatus laborum ſuorum tolerantia; dignitatem, ſplendoremq; nominis pręclariſsimis geſtis; famæ perennitatem propriæ vitæ diſcrimine pepererunt.

Ne igitur me quiſpiam carpat, quòd ad Emblematis vniuerſo huic Operi præfixi limina, Proſapiam inclytam honoribus proſecutus, cecinerim.

Græcia quas peperit, claris quas vexit Athenis
Artes, quas aluit, perficit vna Domus.

Medicea ſiquidem Regia ſemper literarum aſylum, veluti templum Mineruæ ſacrum, bonis artibus, ac diſciplinis inſtructos, in inclinatam, & prope iacentem fortunam deiectos, vtpote illos, quibus naſcentibus dicta lex eſt, nunquam, vt fortunato ſidere vterentur, ſumma clementia, ſummaque munificentia ſuſcepit, ne ab ijs rebus forent imparati, ſine quibus frui lucis vſura non licet. Quo cuique fatendum, ſolùm apud Heroes Mediceæ Gentis datum eſſe, feliciſsimam vitam traducere, ijs nimirum, qui literarum

ſtudijs

ſtudijs addicti, perduellis Fortunæ barbariè vexati, Principis clementiam, hoc eſt, tutelare Numen anhelant. Tu autem Heroice Princeps id gloriæ tibi quidem amplius vſurpas, nempe Maiorum laudem auxiſſe, quinimò (abſit à verbo mendacium) ſuperaſſe. Neque ſplendor ille tuus tenebris vllis offunditur, quòd viam ad immortalitatem nominis, & honoris aliorum exemplo concitatus, inieris. Nam ſempiterna quidem eſt laus plæclariſsimis geſtis excelſæ virtutis, famam æternitatis in poſteros transfundere, eoſdemque nondum decorare ſuperſtites; exigua tamen non eſt ab ijs nec latum vnguem diſcedere, eorundemque veſtigijs inhærendo, viam eandem maiori faſtu calcare. Ferueſcit autem in te quotidie magis amor ille peruetus in præclariſsimarum Artium ſtudia, tantòque maiorem ſuadeo mihi futurum, quantò in dies te procliuiorem ad eadem inſpicio. Iure igitur hæc ætas tuo nomine gloriatur, quòd vniuerſo terrarum Orbe reſonans, optimæ Indolis teſtis ad tui obſequium omnes allicit, trahit, ac arripit. Viue interim Neſtoreos annos, Sereniſsime Heros, ætatis decus, Principum gloria, ac totius Orbis Lumen, vt tui exemplo mortales ad cultum Heroicæ virtutis compellantur. Vale. Florentiæ Anno à Virginis partu MDCLXVI.

Digitized by Google

IN SECVNDAM OPERIS PARTEM PRÆFATIO.

Reſolutiua Ars apud Veteres magno extitit in honore, ac pretio.

Huiuſmodi Ars vberrimè demonſtrationes ſuppeditat Antiqui numeris fortè, in reſoluendo nimium addicti veritatem perquirentes in Geometriæ campo elegantiores flores omiſerunt.

R*ESOLVTIVAM Artem apud Veteres Magno in honore, ſummoque pretio extitiſſe memoriæ, literiſque proditum eſt, eius enim dignitatem, ſplendorem, atque præſtantiam vi- dentur ſatis appoſitis laudibus proſecuti, quod iure factum arbitraberis, vt opinor, intelligens commemoratam Artem adeo fœcundam eſſe, vt vberrime demonſtrationes ſuppeditet, quo circa omnes ingenij neruos in ipſam numeris tamen tractatam, intenderunt; quapropter Geometriæ campos, non ea, qua opus erat, ſedulitate numerorum calculo fortaſſe nimium addicti perquirentes, elegantiores, ſuauioreſque flores omiſerunt. In Arithmeticis profectò multa, eaque non vulgaria ipſius Analytices præſidio ſunt aſſecuti; quamobrem de his optimè meritos eſſe non erit cur quiſpiam inficietur; quinimò fatendum in eos ampliſsimas, ac honeſtiſsimas laudes debere conferri; eò vel maximè quòd ſublime, nobileque verſabant argumentum; ſubtiliſsima enim numerorum contemplatione detenti Diuinum quidpiam ex Platonis Oraculo mentis agitatione perſequuntur. At quantum in ipſa numerorum contemplatione, dignitatis, atque decoris adepti ſunt: tantundem in Geometricis videntur perdidiſſe; tametſi enim vetus Ars illa quoque numeris exculta Geometræ nonnihil profit, opemque ferat, tamen ſpecierum, characterumque frequentatione comparata, longe id felicius aſſequitur.*

Digni ſunt tamen laudibus Diuinum enī tractabant argumentum.

Quantum in Arithmeticis adepti ſunt tantundem in Geometricis perdiderunt.

Proinde ſagaciores Artifices diuturna quadam experientia edocti, contendentes nedum in Arithmeticis, verum etiam in Geometricis abſtruſiora reperire, neglecto parumper numerorum vſu, atque adeo Arithmeticis quaſi multa dicta ſalute, nouam hanc Logiſticen aggreſsi, verſantibus in Geometrico puluere fortaſſe longa meditatione defeſsis, mirum in modum opitulati ſunt; ita nimirum, vt Geometriam ipſam, nedum Arithmeticam promouentes, ſecretiora vtriuſque Diſciplinæ myſteria detexerint, quo recentiores non minus, quàm Veteres de ſua poſſunt Arte gloriari; vt iure dixeris præclariſsimum hoc, penèq; Diuinum inuentum in literario certamine ijs extitiſſe palmarium. Potiori tamen id iure ſibi vendicant, qui nouæ Diſciplinæ ſpecimina tradiderunt. Cum enim omnis induſtria, omniſque ſolertia eò tenderet, vt Theoremata, atque Problemata reſoluerentur; ita vt Matheſis vniuerſa locupletior facta Veritates deinceps innumeras aperiret; Recentiores conſtanti, pertinacique labore noua, de qua loquimur, vſi Logiſtice, facti

Recentiores multum Geometræ opitulati ſunt.

Recētiores nō minus, quàm Veteres de ſua Arte poſſunt gloriari.

Omnis induſtria eò tendit, vt Theoremata, ac Problemata reſoluantur.

Hæc Ars opus fuit Veteribus inacceſſum.

facti ſunt voti compotes. Opus quidem Veteribus inacceſſum, vtpotè illis, qui ſua tantum Arte muniti, ardua, ac difficilia aggredi minimè tutum exiſtimarunt. Quantum autem in Arithmeticis profecerint, & quouſque tandem peruenerint, ex hactenus in Prima huius Operis Parte ſatis abundè traditis, cuique conijcere licebit. Quantum verò in Geometricis progreſsi ſint, ex noſtro de Reſolutione, atque

Pluris eſt facienda Noua, quàm Vetus Ars reſolutiua.

Compoſitione Mathematica Tractatu perſpicuum, manifeſtumque fiet. Solum hic igitur commemorandum, puto nouam Analyſtarum pluris, quàm Vueterm Artem faciendam eſſe, cum hæc in primis ad finem, cuius gratia ingenij ſolertia fuit comparata, illa verò parum conducat.

Auctoris partes, quænam ſint. Arduum eſt opus, ſed inſignis vtilitatis.

De hac propterea cumulatè diſſerere noſtræ ſunt partes. Arduum quidem opus, vt eo difficilius in re literaria fortaſſe nemini liceat adinuenire, inſignis tamen vtilitatis; propterea quod labores, quos præclariſsimi Viri in Elementis tractandis pertulerunt, tanti fieri non deberent, niſi præceptiones forent adinuentæ, à quibus parati, nos in demonſtrationibus contexendis Elementorum vſum aſſequeremur.

Auctor miratur, quòd nonnulli parui fecerint hanc reſoluendi componendique rationem.

Magna propterea me tenet eorum admiratio, quibus parui momenti celebris Analyſtarum Ars viſa eſt; atque adeò ægrè fero ab ijs pronunciari operæ non eſſe pretium in illam incumbere, vigilias, atque labores perferre, quaſi Mathematicas introſpicere Diſciplinas liceat ijs, qui commemoratæ Artis opitulationem, negligunt, atque contemnunt. O tempora ò mores. Iam in animis hominum penitus inſederat, nihil in huiuſmodi Diſciplinis eſſe tentandum deſtituto præceptionibus Analyticis, quod, & Græci Sapientes, & Latini ſolertes vnanimi conſenſione Veritati conſentaneum eſſe duxerunt, quippe qui in his ſumma cum laude verſati prædictarum Diſciplinarum introſpicientes arcana neceſſitate adacti præſtantiam, ac vtilitatem Artis adnotarunt. Nunc verò tamen inſulſi admodum, quamuis non omnino Mathematicæ eruditionis expertes ſolum contemplationis illud genus commendant, cuius tractatio, velut amænior videtur animis blandiri, quos alioquin hæc nimis

Hæc eſt cæteris amænior contemplatio.

auſtera lucubratio vexat, & angit. Sed id planè contendo, videlicet hanc potius eſſe dicendam amæniorem. Si namque finem reſpicias, cuius gratia Mineruæ addicti tot labores improbos generosè adeunt, curaſque mordaces libenter ſubeunt, veritatem profectò comperies, quæ nimirum animum ingenuum allicit, & arripit. Iure igitur dixeris hanc, de qua loquimur meditationem amæniorem, vtpote il-

Homini nihil veritate ſuauius.

lam, cuius præſidio promptiùs Veritas occurrit, atque facilius fit obuia; ea ſiquidem nihil homini ſuauius, nihil amœnius, nihil denique iucundius, qua nimirum humanus animus plerumque corporis perturbationibus defatigatus, ac laceſsitus, recreatur, & veluti præſtantiſsimo pabulo, reficitur. Sed vtra veritatem vbe-

Quæ cognitio amænior.

rius exhibeat, atque certius aſſequatur, an illa ſuperficietenus, cognitio, de rebus Mathematicis habita: an quæ intimiora perquirens, abſtruſiora detegit, & obuoluta tenebris, ſacratiora myſteria recludit. Quòd ſi quiſpiam adhuc ſatis eſſe ab his Diſciplinis paratum exiſtimet, quem hoc noſtrum minus iuuat argumentum, is profectò decipitur, & nimium à veritate recedit. Caſu enim hæc potius, quàm ar-

Caſu Mathematicas Diſciplinas tractare, non eius eſt, qui diu laborauit pro earum aſſecutione &c.

tificioſa diſſerendi ratione tractare, non eius eſt, quem diuturna in his detinuit meditatio, vt earum exercitatione affluerèt, ac ipſius Matheſeos doctrinam optimè redoleret. Quòd autem difficultatem deteſtando aliquid illi dedecoris inurere, ac dignitatis arripere conentur; nihil eſt, oleum operamque perdunt. Nihil enim præclarum ingenuo animo accommodatum, nihil, quod hominem excelſæ Indolis deceat

compertum

compertum eſt vnquam difficultatibus non implicatum. Et certè non tot foret Diuinis laudibus exornanda virtus, niſi adeptio ipſius operoſa eſſet mortalibus conceſſa tantum per ſalebroſam viam incommodis, curis, laboribuſque ſubſtructam. Neque foret Alcidis nomen æternitati commendatum niſi Heroica illa virtus de qua nunquam Poſteritas conticeſcet radices altius amarore conſperſas egiſſet, vt inde ſuauitas eiuſdem virtutis emanaret. Illud igitur cuique, exploratum eſto, quicquid difficile, ac arduum; illud idem eſſe prèclarum. At verò ſi tam parum ſolliciti de Analyſtarum doctrina nos eſſe deberemus, quòd ea neglecta adhuc anima erecti in Mathematicis diſciplinis magna conſequi valeamus, ea perficiendo, quæ præſtantiores in his Diſciplinis Antiſtites conſecutos fuiſſe monumenta teſtantur, æquum profectò foret illius Paſtoris generoſum animum æmulari, qui cum anhelaret eximiam Artem, canendi, certandique carminibus, qua præditum alterum audierat, cecinit.

Quoniã aquiſitio virtutis difficilis eſt, ideo præclara.

- - - - - - - - - at ſi non poſſumus omnes
Heic arguta ſacra pendebit fiſtula pinu.

Niſi Analyſtices foret inſigni vtilitatis, haud eſſet operæ pretium in illam adeo difficilem incumbere.

Virgilius Egloga 7.

Niſi enim implicatiſsimis illis Analyſeos veſtigijs inſiſtentes præclara, atque admiranda conſequi poſſemus, haud foret operæ pretium in his tantum temporis impendere, tantum laboris inſumere, tantum ſollicitudinis perferre. Sed potius prudentis eſſet his omnibus contemptis, ad aliud philoſophandi genus ſeſe transferre. Qui ſapit autem ſecus exiſtimat, nobiſque conſentit; aduertens has Diſciplinas Theorematibus, atque Problematibus conſtare, quorum veritatem inquirere difficilimum eſt. Hic verò animo perpendendum, An Artifex ille tutiorem viam elegerit ad veritatis indagationem, qui caſu procedendo, ſeſe dubiæ fortunæ committit, vt denique longa mentis agitatione, animique curis, aliquod ſpecimen veritatis conſequatur. An verò, qui certa, quadam ratione differendi, firmaque ratiocinandi methodo incedit, & in tenebris, quibus verum obuoluitur, rationis lumine ductus, certiſque veſtigijs inſiſtens, ad finem ſibi præſtitutum progreditur, gradumque facit.

Sagaciores homines magni eam faciunt.

Quis Artifex tutiorem eligat viam ad veritatis inquiſitionem.

Nec ineptè credas à me huic vniuerſo Operi præfixum Emblema fuiſſe, vbi præſtantis Artificis labore, & delineata, & ſculpta cernitur Geometria Labyrinthum multis viarum ambagibus inflexum, hoc eſt, arduuam, ac difficilimam contemplationem initura, filo tamen Analytices deducta, quaſi ſecus impotens difficilimum exitum adinuenire; Eſt enim Matheſis, præſertim Arithmetica, & Geometria, veluti Labyrinthus, ſummis, & inextricabilibus difficultatibus impeditus, nemini quidem adeundus, niſi Arianna, hoc eſt Analytice comite, ac perductrice.

Emblematis vniuerſo huic Operi præfixi explicatio.

Non me præterit, idem haud omnibus probari; cùm potiùs rectè illud videatur vſurpatum.

Mille hominum ſpecies, & rerum diſcolor vſus
Velle ſuum cuique eſt, nec voto viuitur vno.

Perſius Satyra V.

Id tamen minus commodè in re de qua agimus, cadere videtur, cum vna ſit veritas, quæ æquè animos inuadit, nec vlla profectò ſuppetit ratio, qua quiſpiam ſibi ſuadeat, oblato Problemati, occurrendum caſu nulla differendi ratione nixus. Innumera enim occurrent, maximè ab inſtituto aliena, & vt illuceat veritas perqueſita, vel nunquam à meditationibus feriandum erit, quod nimium

Vna eſt veritas quæ æque animos inuadit.

animum

animum vexat, ac torquet. Vel erit immolandum Mineruæ, vt cum ei ariſerit, extemplo, quod in obſcuris latitat, det in conſpectum, ac in lucem prodat; atque dum quis per iſtarum contemplationum Oceanum nauigaturus, fortunæ fidem habet, hæc vt optatis reſpondeat, atque res ex animi ſententia ſuccedat.

Cuiuslibet Artis, Diſciplinæq; finis.

Omnes Artes, omneſque Diſciplinæ, cum eò colliment, vt vel veritatem inquirant, operis gratia, quemadmodum practicæ: vel in ipſius veritatis meditatione ſiſtant, vt contemplatrices. Quæcumque tamen ſit, nullam ſanè reperies, quæ certis præfinitis legibus in inquirenda veritate non ſubijciatur. Nulla eſt, quæ caſu illam venetur; Multò propterea id minus, de Mathematicis enunciandum, quæ reliquas demonſtrandi certudine vincunt, omnibuſque, certa differendi ratione antecellunt.

Quid denique pro comperto habendum.

Ratum igitur eſto, Si qui ſunt qui pauci profectò non ſunt, quorum animus aliorum inuentis non contentus, longius expatiatur veritatis conſequendæ gratia, demonſtrationes, atque cauſas inquirens, huius Artis præſidio innumera propemodum reperient, alijs ignota prorſus, & multo plura, quàm ea, de quibus iure ſe iactant Antiqui per compoſitionem, atque reſolutionem procedentes, quaſi dixerim ſola naturali quadam ingenij facultate, vtentes, exercitatione tamen exculti; Cum recentiores Artem certis legibus, præceptiſque contentam, adhibeant.

Sed nimis multa, de re, quæ nec dubia eſt, nec obſcura. Ex his intelliges, vt opinor partes à nobis, in hoc Opere conſcribendo ſuſceptas; & quantum diligentiæ, curæque fuerit adhibendum, vt præſtantiſſimum argumentum ſatis pro dignitate tractaſſe videremur.

Tractando rũ ordo. Primo de Speciosa Algebra differendum. Secundò de reſolutione, & compoſitione Mathematica tractandum.

Primò autem ſeſe tractandam offert Speciosa Algebra, nempe noua Logiſtice, quam demonſtrationibus firmare conabimur, poſt accuratam explicationem eorum præceptorum, quibus ipſa conſtat.

Secundò autem in explicatione eorum, quæ ad Reſolutionem, & Compoſitionem Mathematicam pertinent, noſtra verſabitur induſtria, ac omnis labor erit occupatus. At quoniam etiam Antiquis Reſolutricis Artis vſus familiaris erat, à qua tamen longe, lateque differt illa, quam Recentiores adinuenerunt. Propterea noſtrum erit vtramque tractare diligenter, exordium ab Antiquorum illa ducentes, vbi, & ipſius Artis intimiora proſequemur, & vſum eiuſdem ad enodanda Problemata illuſtrabimus. Recentiorum verò ſubtiliorem æquè, ac vtiliorem, methodum, pluribus explicabimus. Multo enim fæcundior cum ſit, paucis perſtringi non poteſt; Sed vberiorem tractationem expoſcit.

Rei totius sũma.

Hæc igitur ſunt, de quibus, in hac Secunda Operis Parte nobis agendum ſupereſt, ex ijs verò, quæ ſumus allaturi, non dubito quin futurnm ſit, vt cuique perſpicuè conſtet; non ineptè à nobis, aliquando pronunciatum fuiſſe, cuilibet Problemati, huius Artis opitulatione fieri ſatis poſſe.

Nonnulla admonenda.

Cæterum Speciosa ipſa, cum quammaxime ad numerorum tractationem conducat; propterea, non pigebit, eius præcepta numeris aptare, quamuis præcipue Geometriæ gratia illam tradamus. Nam in Prima huius Operis parte Speciosa Logiſtica vſi ſumus, cum ea non opitulante, minimè liceret, difficiliora perquirere. Tamen locus non erat, vbi præceptorum omnium explanationem traderemus; quibus Speciosa Algebra continetur, quod in præſenti nobis præſtandum ſupereſt. Qua in re à primis huius Artis Elementis exordium deſumemus, ordinatim tractando vt demum, ad Ἀναλύσεως, atque Συνθέσεως rationem Mathematicam perueniamus.

CAROLI

Digitized by Google

CAROLI RENALDINII
ALGEBRA NOVA
ANALYTICES
PARS SECVNDA.

In quibus hæc Ars conſiſtat, & de ijs, quæ ſunt ad ipſam præmittenda.

CAPVT PRIMVM.

Speciosa ſuum quoque habet Algorithmum

QVEMADMODVM Veterem, ac Numeroſam Algebram dicebamus occupari circa numerorum Algorithmum, quem affirmauimus eſſe tractationem, ſiue peritiam numerorum complectentem quatuor illas vulgatas operationes, hoc eſt Additionem, Subtractionem Multiplicationem, ac Diuiſionem. Ita, & Speciosa ſuum Algorithmum habet. Tantùm inter has diſcriminis illud intercedit, quòd Numeroſæ Algorithmus numeris: Speciosæ verò Alphabeti elementis exhibetur. Quapropter non immeritò huic illam eſſe perſimilem aſſerere licebit; hæc etſi longè præſtantior dicenda ſit. Dum enim Alphabeti elementis vtitur in ſuis perficiendis operationibus, ea tractat, quæ nullam mutationem ſubeunt: illa verò quoniam numeros adhibet, in ijs eſt occupata, quæ maximè ſunt mutationi obnoxia; quamobrem hæc excellentior, non iniuria eſſe dicetur.

Speciosa Algorithmus Specielus, Numeroſa autem numeris perficitur.

Commodum ex Alphabeti characteribus.

Illud autem commodum affert Alphabeti characterum vſus, quòd omnia ijs deſignari commodè poſſint, neque vni magis, quàm alteri ſint rerum generi accommodati. Sunt autem notæ ſimpliciſſimæ quidem ad cuiuſque rei deſignationem idoneę; non enim a, vel b &c. magis deſignant lineam, quàm pondus, numerum, vel aliud quidpiam; conſueuimus autem hiſce elementis ſignificare lineas, vtpotè phantaſiæ, ſenſibuſque maximè obuias, quibus relationes, atque rationes inter alia omnia commodiſſimè exprimi poſſunt. Si itaque duæ ſint quantitates characteribus a, b, deſignatæ, intelligendæ ſunt duæ lineæ longitudinis diuerſæ, quarum vna quidem a, alia verò b, dicatur. At per a, & a duæ lineæ æquales intelligentur, vt per b, & b &c. niſi fortè ſupponatur a, æqualis b, &c.

Notanda ſunt quædam circa ſignificatione characterum.

Ad ſignificandam duarum dimenſionum quantitatem.

Ad ſignificandam verò duarum dimenſionum quantitatem ijſdem characteribus vtimur appoſito numero dimenſiones ipſas deſignante, vt a^2, at, vt huiuſmodi quantitatis genus denotemus hoc vtimur ſymbolo, puta pl. vnde a pl. vel b pl. &c. quantitatem ipſam planam, ſeu longitudinem, cum longitudine ſignificat, cum a^2,

Alia quadam circa idem occurrunt.

ſpeciatim poteſtatem quadraticam planitieij ſpeciem importet. Ad ſignificandas verò tres dimenſiones apponimus numerum 3, Vnde a^3, quantitatem triuum dimenſionum ſignificat, cuius genus hoc ſignificamus ſymbolo ſol: quare a ſol. vel b ſol. ſignificat ſolidam quantitatem, ſeu longitudinem cum latitudine, & profunditate; cùm a^3 ſpeciatim importet cubicam poteſtatem, quæ ſoliditatis eſt ſpecies; ita ſuo modo de reliquis gradibus.

Aliquoties aliquã eſſe quantitatem acceptam, quomodo ſignificetur.

Cæterum, vt ſignificemus aliquoties acceptam eſſe aliquam lineam a, præponimus numerum ſignificantem, quoties ipſa quantitas accipi intelligitur, vt 2 a, vel 3 a &c. ad ſignificandum a, bis vel ter acceptam fuiſſe; Sic ad deſignandum bis terue, acceptum eſſe aliquod planum, ſcribimus 2 a pl. 3 a pl. vel 2 b pl. 3 b pl. &c. non diſſimiliter de ſolidis, alijſque gradibus. Præterea ad denotandum partem quantitatis numerum ad id idoneum præponimus; vnde ad ſignificandam ſemiſſem, ſcribimus $\frac{1}{2}$ a ad trientem $\frac{1}{3}$ a, item in planis, vt $\frac{1}{2}$ a pl. vel $\frac{1}{3}$ a pl. aut $\frac{1}{2}$ b pl. vel $\frac{1}{3}$ b pl. & ſic de reliquis.

De ijs, quę præmittenda ſunt, quæque Analyſta mutuatur ab Elementis.

EA prorſus quæ ad Numeroſam Algebram præmittuntur, hic etiam prælibari debent. Eadem enim ex elementis in vtraque Analyſta deſumit, in Numeroſa tamen ad numeros contracta, in Specioſa generaliter ſumpta. Non eſt autem cur hìc eadem repetantur; proinde ſat erit tractationem illam conſulere.

Definitiones autem, hunc in modum ſe habent.

Poſita quantitas quid.

Quantitas poſita, eſt illa, quæ ad libitum ponitur, ad comunem menſuram quantitatum eiuſdem generis, & quæ ab vnitate denominatur.

Additio quid.

Additio quantitatis ad quantitatem eſt acceptio illius quantitatis, quæ ex quantitatibus illis tanquam ex partibus coaleſcit.

Subtractio quid.

Subtractio quantitatis à quantitate eſt ſumptio exceſſus quantitatis maioris ſupra minorem.

Multiplicatio quid.

Multiplicatio quantitatum, eſt acceptio quantitatis, quæ ad multiplicatam eam habet rationem, quam multiplicans ad poſitam, & ſumpta hæc quantitas Productum dicitur.

Diuiſio quid.

Diuiſio quantitatum, eſt acceptio quantitatis, ad quam diuiſa eam habet rationem, quam diuidens ad poſitam, & quantitas hæc accepta, Quotiens nuncupatur.

Solet etiam dici applicatio, tunc autem pro vocabulis diuidendum, diuiſor, & Quotiens, adhiberi poſſunt.

Applicatum, Metiens, & Ortiuum.

Quantitates homogeneæ dicuntur, quæ ſunt naturæ eiuſdem, vt latus, & latus, quantitates homogeneæ dicendæ ſunt, quemadmodum planum, & planum; ſolidum, & ſolidum.

Heterogeneæ porro quantitates dicuntur illæ, quæ natura differunt, vt latus, & planum &c.

SVPPOSITIONES.

Supponenda verò hæc ſunt.

Si magnitudo magnitudi additur, hæc illi homogenea eſt.

Si magnitudo magnitudini ſubducitur, hæc illi homogenea eſt.

Si magnitudo in magnitudinem ducitur, quæ fit huic, & illi heterogenea eſt.

Si magnitudo magnitudini applicatur, applicata huic, & illi heterogenea eſt.

SCHO-

SCHOLION.

Senſus ſupradictorum perſpicuus eſt; non enim latus poteſt addi plano, vt neque planum ſolido; ſed latus lateri; planum plano, & ſolidum ſolido, quod etiam intelligendum eſt de ſubtractione. At verò ſi latus ducatur in latus producitur planum, quod huic, & illi heterogeneum eſt; ſi ducatur planum in latus producitur ſolidum, quod huic, & illi heterogeneum eſt.

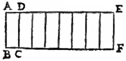
Hic aduertere plurimum intereſſe diſcriminis in operationibus ſupradictis.

Præterea hoc idem in Diuiſione, ſiue Applicatione contingit. Quandoquidem ſi planum applicetur lateri, oritur latus, quod illi quidem, ſcilicet plano heterogeneum eſt, atque adeo applicatum, vtrique nimirum metienti, & ortiuo, heterogeneum eſt. Neque conturbet nos, quòd ſuperiùs definita fuerit multiplicatio magnitudinum, quę ſit acceptio, quantitatis, quæ ad multiplicatam eam habet rationem, quam multiplicans ad poſitam, qua definitione ſignificatur multiplicatam, & productam homogeneas eſſe quantitates, quandoquidem ſecundum proportionem comparantur, & proportio inter quantitates eiuſdem generis, atque adeo homogeneas exercetur; cùm tamen hic dictum ſit; ſi latus in latus ducatur produci planum, quod huic, & illi heterogeneum eſt; Non conturbet inquam, propterea quod multiplicatio tanquam additionis compendium vſurpari poteſt, & ita multiplicata ſuperficies erit, quæ toties in producto continetur, quoties poſita quantitas in latere multiplicante; quamobrem eadem erit proportio productæ ſuperficiei ad multiplicatam ſuperficiem, quæ eſt lateris multiplicantis ad poſitam.

Quædam de Diuiſione, ſiue Applicatione notanda.

Si ſit parallelogrammum ABCD, poterit per additionis compendium intelligi multiplicatum, ſi protrahatur latus BC, vſque ad F, adeo vt BC, in BF, toties contineatur, quoties parallelogrammum multiplicatum eſſe volumus, & ſit exempli gratia multiplicandum octies, ea igitur proportio erit parallelogrammi BE, ad parallelogrammum BD, quæ eſt BF, ad BC.

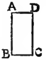
Supradictorũ explicatio ad multiplicationem quod attinet.



Productum igitur erit BE, multiplicatum verò BD, multiplicans BF, poſita verò quantitas BC.

Cæterùm alio ſenſu cum latus per latus multiplicatur fit productum, quod huic, & illi heterogeneum eſt, ſi nempe ducatur latus AB, in BC; ſit rectangulum ABCD, quod vtrique lateri heterogeneum eſt; rectangulum enim contineri dicitur ſub ijs rectis lineis, quæ vnum ex rectis angulis comprehendunt.

Alio ſenſu ſuperiora explicantur.



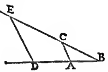
Animaduertendum autem, quatuor iſtas operationes ſic etiam explicari poſſe.

Alio etiam modo hactenus dicta explicãtur magna cũ Geometria vtilitate.

Et quod ad multiplicationem attinet. Productum ad multiplicandum eſſe vt multiplicans ad vnitatem, hanc ſcilicet intelligendo eſſe AB, in adiuncto ſchemate. Sitq; operæ pretium multiplicare BD, per BC, iungantur puncta A, C, & DE, fiat parallela ipſi AC, & erit EB, ad BD, nempe productum ad multiplicatum, vt BC, multiplicans ad AB, vnitatem. Ex EB, in vnitatem AB, fit id, quod producitur ex CB, in DB. Per vnitatem autem intelligi debet linea quædam determinata, quæ ad quamuis linearum reliquarum talem habeat relationem, qualem vnitas ad certum aliquem numerum. Vt ſi AB, foret 4, DA, verò 16, CB 12, & EC 48, erit productum ſub AE, & EB 240, quantum eſt productum ex DB, in CB, nempe ex 20, in 12. At ſi intelligatur AB, 1, AD, erit 4, & CB, erit 3, & EC 12. Vides igitur per vnitatem intelligi lineam quandam determinatam, quæ ad quamuis linearum reliquarum talem habet relationem, qualem vnitas ad certum aliquem numerum.

De diuiſione agitur.

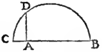
Non ſecus de diuiſione ſentiendum, vt ſi ſit diuidenda E B, per D B, iunctis punctis E, & D, per rectam E D, ducatur A C, illi parallela, & erit B C, quotiens ipſius diuiſionis; intellecta tamen A B, pro vnitate. Itaq; hoc modo in Geometria quatuor operationes Arithmeticæ non ſine magno commodo adhibentur, adeo vt ipſis lineis addantur lineæ, ab iiſdem ſubtrahantur aliæ, & etiam ſi vna pro vnitate ſtatuatur, quam communiter ad libitum licet aſſumere, & præter hanc aliæ duæ, adeo vt ad ipſas inueniatur quarta, quæ ad alterutram ſit, vt eſt altera ad vnitatem, quod idem eſt, atque multiplicare; velut ſi per ipſas, quarta reperiatur, quæ ad vnam ex illis duabus ſit vt vnitas ad alteram, quod eſt diuidere.



In Geometria quatuor operationes Arithmeticæ non ſine magno commodo adhibentur.

Radicis extractio.

Vel demum ſi recta ſit A B, & ex ea oporteat radicem extrahere quadratam; protrahatur ad C, adeo vt A C, ſit tanquam vnitas; ſuper C B, deſcribatur ſemicirculus, ductaque perpendiculari A D, hæc erit radix quadrata ipſius A B, ſi nimirum A C, pro vnitate accipiatur, atque A B, alicuius numeri munere fungatur, cuius radix eſt A D, Sit C A 3, A B, verò 12, vtique A D, erit 6, cuius quadratum eſt 36, quantum eſt rectangulum C A B; at verò ſumpta C A, pro vno, A B, valebit 4, proinde A D, erit 2, cuius quadratum æquatur ipſi A B, ſed de his iterum in ſequentibus.



Symbola, quibus hæc noua Algebra vtitur.

Cæterum hæc etiam Algebra ſua ſymbola habet perpetua, atque conſtantia, vt perpetuò ac perſpicuè magnitudines datas à quæſitis diſtinguat. Itaque ad ſignificandas quæſitas magnitudines vtitur elemento A, vel alia quacunque ex vocalibus E, I, O, V, frequentiùs autem vtitur A, E, ad denotandas autem datas quantitates adhibet conſonantes B, C, D, vel alias quaſcunque, Nonnulli verò ſunt, qui ad deſignandas quantitates ignotas vti ſolent X, vel Y; ita Carteſius. Ad æqualitatem deſignandam nos vtemur eodem ſymbolo, quo ſuprà in Numeroſa vſi ſumus vt = Plerique hanc æqualitatem deſignant hunc in modum 2 | 2. Alij verò vtuntur hoc charactere ꝏ.

Characteres, quibus alij vtuntur, explicantur.

Notæ verò ſignificantes additionem, & ſubtractionem, ſeu ſigna additorum, & ſubtractorum eadem erunt, ac illa, vt + denotabit plus, & — ſignificabit minus; & ∽ eſt ſignum anceps, ſeu ancipitis ſubtractionis. Quia enim ſæpe ſæpius contingit, vt non ponatur in ſubtractione, vtra ſit magnitudo maior, vel minor, & ſubtractio nihilominus fieri debeat, pro differentię nota quidam vtuntur charactere iſto = .

Apud ipſos enim ſignum = ſignificat differentiam inter duas, pluresue quantitates, cum non exprimitur, aut cognoſcitur, penes quas ſit exceſſus; quo cùm nos vſi fuerimus ad ſignificandam æqualitatem, alium characterem opus fuit excogitare, nimirum ∽ ad quod deſignandum nonnulli hoc ſymbolo vſi ſunt, nempe :v. quemadmodum ad ſignificandum minus hunc characterem ∽ adhibent; Apud nonnullos autem ſignum hoc ♀ ſignificat †, vel —, ſignum hoc ♉ ſignificat †, vel —, ſenſu contrario prioris ſigni, nempe cum per ſignum ♀ ſignificatur +, tum per ſignum ♉ intelligitur —, aut cùm per ſignum ☊ intelligitur —, tum per ſignum ♉ intelligitur +.

Admonitio.

Cæterùm hic te monitum volo characteres, à plerìſque adhibitos fuiſſe maiuſcolos, vt nos aliquando fecimus, ab alijs verò minuſculos, quibus nos modò vtimur, experientia edocti eorum vſum faciliorem eſſe.

Proponuntur characteres.

Hìc autem ſubijcimus characteres, tam maiuſculos, quàm minuſculos ſibi inuicem reſpondentes, quibus nimirum Poteſtates ſignificantur, & quidem progreſſio ipſa nullis finibus coercetur, cum potius in infinitum extendi poſſit; ſatis tamen duximus extenſam eſſe ad quadrato-quadrato-cubum; in reliquis enim altioribus poteſtatibus non diſſimili modo procedendum, quemadmodum cuiq; perſpicuum eſſe poteſt. Ipſorum verò characterum, ſiue ſpecierum hæ ſunt ſignificationes, ſiue characteres ſint maiuſculi, ſiue minuſculi &c.

2 1	l	A	A	a latus ſiue Radix
4 Q	q	Aq	A quadratum	a^2 quadratum
8 C	c	Ac	A cubus	a^3 cubus
16 QQ	qq	Aqq	A quadrato-quadratum	a^4 quadrato-quadratum
32 QC	qc	Aqc	A quadrato-cubus	a^5 quadrato-cubus
64 CC	cc	Acc	A cubo-cubus	a^6 cubo-cubus
128 QQC.	qqc	Aqqc	A quadrato-quadrato-cubus	a^7 quadrato-quadrato cubus

Specierũ vſus.

Vt autem ſignificetur, bis acceptam eſſe ſpeciem aliquam, ſi adhibeatur character maiuſculus, apponitur, ſiue poſtponitur numerus ipſi characteri; vnde ad ſignificandum bis A, ſcribimus A 2, ſic ad ſignificandum ter A, ſcribimus A 3, nec diſſimiliter de alijs ſpeciebus &c. ſecus verò procedimus vtentes characteribus minuſculis. Vt igitur deſignemus bis A, non apponimus notam 2, ſed preponimus, ita ad ſignificandum ter a preponimus notam 3, & ſic de reliquis, itaque 2 a, ſignificat bis a, & 3 a, ſignificat ter a. Si autem poſtponeremus, vt a^2, ſignificaremus, a quadratum; inſuper a^3, ſignificaret a cubum &c. Cæterum his etiam vtimur characteribus.

Alij etiam characteres quorum hic eſt vſus, explicantur.

B in A	*b a*
B in A quadratum	*b* a^2
B quadratum in A	b^2 *a*
A planum	*a pl.*
A plani-quadratum	*a* $pl.^2$
A plani-cubus	*a* $pl.^3$
A ſolidum	*a ſol.*
A ſolidi-quadratum	*a* $ſol.^2$

Itaque cùm ſcribimus b a, ſignificamus quantitatem b, ductam eſſe in quantitatem a, & cùm ſcribimus b a^2, denotamus quantitatem b ductam eſſe in quantitatem, quæ eſt quadratum ex a, & ita de reliquis. Illud porrò non eſt prætereundum ſilentio, nihil referre in ipſa multiplicatione, vtra ſpecies præponatur; quamobrem perinde eſt ſcribere ba, ac ſcribere ab, & ſic de cæteris.

Author minuſculis characteribus ſe vſurum dicit.

Aduerte tamen nos in poſterum ſemper vſuros eſſe characteribus minuſculis; experientia ſiquidem didicimus eorum vſum longe expeditiorem eſſe.

Quantitatis diuiſio in realem, & imaginariam, & quotuplex vtraq;

Verum enim verò, redigendum in memoriam eſt, quod alias monuimus, nempe quantitatem diuidi in realem, & imaginariam, illa quidem eſt quam in natura licet aduertere, alia verò quæ ſolùm imaginatione ſuum eſſe conſequitur; Illa tripartita eſt, etenim de continua permanente loquendo, alia eſt linea, alia ſuperficies, & alia corpus, tot enim dimenſiones admittit natura, quot ſunt diuiſibilitates, triplex autem vnius cuiuſq; rei diuiſibilitas eſt, etenim rés ipſa diuiſibilis eſt ſecundum longitudinem, ſecundum latitudinem, & ſecundum profunditatem, præter has nulla ſupereſt diuiſibilitas; latus, eſt diuiſibile ſecundum longitudinem tantùm. planum verò ſecundum longitudinem, & latitudinem; ſolidum denique ſecundum longitudinem, latitudinem, & profunditatem; hæc igitur in natura ſunt, nec plures dimenſiones admittit, quod eleganter Ptolemæus oſtendit in Analemmate. Cæteræ verò, vt quadrato-quadratum, quadrato-cubus &c. imaginariæ dicuntur, à quibus Geometriæ candor eſt alienus, cùm tamen admiſſo vnitatis vſu in Geometria ipſa, etiam hæ quantitates plurimùm ad veritatis aſſecutionem conducant.

De gradibus, atq; generibus magnitudinum comparatarum.

CAPVT II.

Magnitudines quæ de genere ad genus proportionaliter aſcendunt.

HIC agendum eſt primò de magnitudinibus, quæ ex genere ad genus ſua vi proportionaliter aſcendunt atque deſcendunt, quas Vieta ſcalares appellat. Sunt autem hæ.

1 *Latus, ſeu Radix*
2 *Quadratum*
3 *Cubus*
4 *Quadrato-quadratum*
5 *Quadrato-cubus*
6 *Cubo-cubus*
7 *Quadrato-quadrato-cubus*
8 *Quadrato-cubo-cubus*
9 *Cubo-cubo-cubus*

Et ita deinceps eodem pacto in infinitium procedendo. Genera verò magnitudinum comparatarum vti de ſcalaribus enunciantur, ſunt hęc.

1 *Longitudo, latitudoue*
2 *Planum*
3 *Solidum*
4 *Plano-planum*
5 *Plano-ſolidum*
6 *Solido-ſolidum*
7 *Plano-plano-ſolidum*
8 *Plano-ſolido-ſolidum*
9 *Solido-ſolido-ſolidum*

Quare genera magnitudinũ dicantur.

Dicuntur autem genera, ſiquidem rectè dicimus, latus eſſe longitudinem, vel latitudinem; quadratum eſſe planum; cubum eſſe ſolidum; & ſic de reliquis, has enim magnitudines tamquam genera de ſpeciebus ſibi ſubiectis enunciamus.

Gradus parodici, quid ſint.

Quid verò ſint gradus parodici ad Poteſtatem, quid ipſa Poteſtas, patet ex ſuperiùs traditis, & explicatis, ex ſerie enim ſcalarium, gradus altior, in quo conſiſtit comparata magnitudo exinde à latere Poteſtas appellatur; reliquæ verò inferiores ſcalares gradus ſunt parodici ad Poteſtatem. Huiuſmodi autem gradus parodici dicuntur à voce græca *παρόδικος*, quaſi tranſitorius, ita vt perinde ſit dicere gradus parodici ad poteſtatem, ac gradus tranſitorij, hoc eſt quibus fit tranſitus ad Poteſtatem. Omnes autem magnitudines, quę ſunt infra Poteſtatem, vocantur gradus parodici ad Poteſtatem, vt gradus parodici ad cubum, ſunt latus, & quadratum; his enim fit tranſitus ad cubum.

Animaduertendum eſt autem ſigna quibus deſignantur genera magnitudinum progreſſionis ſcalarium nuncupari characteres coſſicos; in Algebra enim ſpecioſa magnitudines, quæ ex genere ad genus ſua vi proportionaliter aſcendunt, vel deſcendunt ſcalares vocantur.

In Numeroſa verò numeri coſſici nuncupari conſueuerunt. Hìc iterum inculcandum ex ſupra dictis magnitudinum genetibus tria tantum realia eſſe; nempe lineam ſuperficiem, & corpus, imaginaria verò infinita eſſe nimirum quadrato-quadratum, quadrato-cubum, cubo-cubum &c. de quibus ſuperiùs diſſeruimus.

Poteſtas alia pura, alia affecta.

Cęterum Poteſtas aut pura eſt aut affecta. Poteſtas eſt pura cum affectione vacat, vt $a' = b'$. Affecta vero cui homogeneum ſub parodico ad Poteſtatem gradu, &

adiecta

adſcita coefficiente magnitudine immiſcetur. Vt ſi ſit æquatio a^2 ✠ b a ⊏ z^2. Magnitudo dicitur b coefficiens; at verò a^2 eſt poteſtas, & a, gradus eſt parodicus ad poteſtatem, quemadmodum b a, eſt illud homogeneum ſub gradu parodico, & coefficiente longitudine; atque demum z^2 dicitur comparationis homogeneum. Magnitudines autem adſcitæ, ſunt quibus, & gradu parodico fit poteſtati quid homogeneum ad eam afficiendam ſubgraduales dicuntur, quas etiam coefficientes appellauimus; ita in ſupraposita æquatione b, eſt ſubgradualis. De his autem copioſiùs capite de Æquatione Algebrica tractandum erit. Illud hìc ſilentio prætereundum non eſt, nimirum æquationes Algebricas reperiri poſſe in illis tribus Problematum generibus, quæ Veteres in Geometria agnouerunt.

Quid coefficiens quid homogeneum ſub gradu.
Quid comparationis homogeneum.
Quid ſubgraduales magnitudines.

Quorum aliqua plana ſunt appellata, alia ſolida, alia demum linearia, de quibus in præcitato loco copioſiſſimè ſumus acturi. Aduerte autem pro comparationis homogeneo conſtitui potuiſſe etiam z pl. in ſupraposita æquatione, vnde eſſet hoc modo a^2 † b a ⊏ z pl. Item potuiſſet etiam ipſi b, præponi a, itaut foret a^2 † a b ⊏ z^2 vel z pl. idem enim eſt ſenſus ſiue homogeneum illud ſcribatur b a, ſiue a b.

Algorithmus Specioſæ Logiſtices

CAPVT III.

SVPERIVS iam adnotauimus in hac etiam Logiſtica dari Algorithmum, quem iam definiuimus, huius autem operationis præcipuę, quas ipſa nimirum complectitur ſunt numero quatuor, vt in Numeroſa quoque contingit nimium Additio Subtractio, Multiplicatio, atque Diuiſio.

Operationes ab Algorithmo comprehenſa quatuor ſunt numero.

Magnitudinem Magnitudini addere.

OPERATIO PRIMA.

MAgnitudines addendæ, vel ſunt eiuſdem, vel diuerſæ appellationis. Si ſint appellationis eiuſdem; fit additio præponendo numerum magnitudinum ſummæ, quę ex illis dicitur conſurgere adhibis characteribus minuſculis. Vt ſi ad a, addi debeat a; item ad b, addi debeat b, fiet additio, vt dictum eſt, atque adeo ex a, ad a fiet 2 a ex b, ad b, fiet 2 b, ex 3 a ad a, fiet ſumma 4 a; item ex 4 b, ad b, fiet ſumma 5 b.

Magnitudinū addendarum diuiſio vel eiuſdem, vel diuerſa appellationis.

Si verò magnitudines ſint appellationis diuerſæ, fit additio beneficio ſigni ✠. Vt ſit iniunctum addere a, ad b. Quoniam igitur magnitudo magnitudini addenda eſt; homogeneæ verò heterogeneas non afficiunt: duæ autem magnitudines propoſitæ addendæ ſunt homogeneæ, plus autem, vel minus non conſtituunt genera diuerſa; proinde nota adiuctionis comodiſſimè perficietur operatio, & erit aggregatum ex ipſis a ✠ b; Hac autem additione facta per ſymbolum ✠, erit ſumma a ✠ b.

Quando ſunt appellationis diuerſa.

EXEMPLA

EXEMPLA.

$$
\begin{array}{c}a\\a\\\hline 2\,a\end{array}\qquad
\begin{array}{c}b\\b\\\hline 2\,b\end{array}\qquad
\begin{array}{c}5\,a\\a\\\hline 6\,a\end{array}\qquad
\begin{array}{c}5\,a\\3\,a\\\hline 8\,a\end{array}\qquad
\begin{array}{c}6\,a^2\\3\,a^2\\\hline 9\,a^2\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}a\\b\\\hline a\dagger b\end{array}\qquad
\begin{array}{c}a\\2\,b\\\hline a\dagger 2\,b\end{array}\qquad
\begin{array}{c}2\,b\\b\\4\,b\\\hline 7\,b\end{array}\qquad
\begin{array}{c}4\,a\\2\,b\\\hline 4\,a\dagger 2\,b\end{array}\qquad
\begin{array}{c}4\,c\\5\,d\\\hline 4\,c\dagger 5\,d\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}a\\b\\c\\\hline a\dagger b\dagger c\end{array}
$$

Nonnulla ad notatione digna.

Hic aduerte, in additione ſignum †, referri ad literam ſequentem priori addendam. Item aduerte cùm literæ nullus eſt præfixus numerus, intelligendam eſſe præfixam vnitatem. Aduerte demum cùm literæ connectuntur ſigno †, nihil referre vtra earum præponatur, vel poſtponatur.

Numeris explicatur ſuperior doctrina.

Hæc autem numeris explicari poſſunt; nam ſi per a, nos intelligamus 10; per b, verò 6, ex a, & b, fiet a † b; hoc eſt 10 † 6, erit itaque ſumma 10 † 6, hoc eſt 16; item ſi per b, nos intelligamus 8, per c, autem 4, fiet ſumma 8 † 4; hoc eſt 12; ſic & reliqua exempla numeris declarari poſſunt.

Cùm aſcendũt per expoſitam ſcalam vel aſcendentibus genere communicent, quid agendum.

At verò ſi aſcendant per expoſitam ſcalam, vel aſcendentibus genere communicent ſua, quæ congruit, denominatione, deſignabuntur. Vel itaque ſunt eiuſdem, vel diuerſæ appellationis; ſi eiuſdem; puta ad a^2 addi debeat a^2, fiet $2\,a^2$; item ex $5\,a^2$, & $3\,a^2$, fiet $8\,a^2$.

Vel ſunt eiuſdem, vel diuerſæ appellationis.

At ſi fuerint appellationis diuerſæ, vt a^2, & b pl. ex his fiet a^2 † b pl. ita ſi ad a^2, addi debeat b ſol. fiet ſumma a^2 † b ſol.

Quando eiuſdem, quando diuerſa.

Hæc autem numeris facilè poterunt explicari. Si enim a^2, valet 4, certè $5\,a^2$, valebunt 20, & $3\,a^2$, valebunt 12, horum ſumma eſt 32, nempe $8\,a^2$, quantum fit ex $5\,a^2$, & $3\,a^2$.

Inſinuatur numeris explicatio horum præceptorum.

Demonſtratio patet ex dictis in Arte veteri, cùm enim additio ſit acceptio quantitatis, quæ coaleſcit ex ijs, quæ addi dicuntur, certè aliter fieri non poterit, quàm illas ſimul connectendo &c.

Demonſtratio.

Obſeruandum eſt autem cùm literæ nullus præponitur numerus, cogitandum eſſe prefixam eſſe vnitatem, ita quidem ex 3 a, & a fiunt 4 a. Cæterùm nihil refert in ipſa additione, vtra litera ſcribatur priùs, an poſteriùs; cùm plures adduntur literæ diuerſæ. Perinde enim eſt ſcribere a † b, ac ſcribere b † a. De quibus etiam ſuprà.

SCHOLION.

Notanda quædã circa characteres maiuſculos, & minuſculos.

Illud autem ſubijciam, nimirum adhibitis characteribus maiuſculis fieri additionem appoſitis numeris, vt ſi ad A, addi debeat A, fiet A 2, & ſi ad B, addatur B, fiet B 2. Hoc igitur animaduertiſſe iuuat pro declaratione eorum, quæ apud alios reperiuntur.

Magnitu-

Magnitudinem Magnitudini Subducere.

OPERATIO SECVNDA.

SI magnitudines fuerint eiuſdem appellationis, fit ſubtractio ſubducendo numerum à numero, intelligendo nimirum de illis numeris, qui literis præfiguntur. Vt ſi ab a, auferri debeat a, remanet o, quoniam ipſi a, intelligitur præfigi 1, auferendo autem 1, ab 1, remanet o, item abs 5 a, auferri debeat a, remanebunt 4 a. Præterea abs 8 b, ablatis 3 b, remanent 5 b. *Quando magnitudines fuerint eiuſdem appellationis.*

Si verò magnitudines ſint appellationis diuerſæ fit ſubtractio per ſignum —. Vt ſit opus ab a, ſubducere b. Quoniam itaque magnitudo magnitudini ſubducenda eſt; homogeneæ autem magnitudines heterogeneas non afficiunt. *Cùm magnitudines fuerint appellationis diuerſa.*

Sunt autem, quæ proponuntur, magnitudines homogeneæ, plus verò, vel minus, non conſtituunt genera diuerſa; quamobrem disiunctionis, ſiue multæ nota commodè ſubtractio fiet; & erit differentia ipſarum a minus b, ſcribenda a — b; Item ſi ex b, ſubtrahi debet d, fiet reſiduum b — d, hoc eſt b, minus d.

Verùm ſi aſcendant per expoſitam ſcalam, vel aſcendentibus genere communicent, ſua, quę congruit, deſignabuntur denominatione. Vel igitur ſunt eiuſdem denominationis, vel diuerſæ. Si ſint appellationis eiuſdem, fiat ſubtractio, vt ſuperiùs innuimus; itaque ſi abs 5 a², auferri debeat a², remanebunt 4 a². Et ſi abs 2 b pl. auferri debeat b pl. remanebit b pl. ſi abs 5 a³, auferri debeant 2 a³, remanebunt 3 a³. Si verò ſint appellationis diuerſæ. Vt ſi ab a², auferri debeat b pl. remanebit a² — b pl. hoc eſt a², minus b pl. vel ſi ab a³, auferri debeat b ſol. remanebit a³ — b ſol. hoc eſt a³, minus b ſol. Hæc autem facilè numeris poſſunt illuſtrari. Si verò non proponatur, vtra magnitudo ſit maior; fiat ſubductio ſymbolo ſuperiùs inſtituto. Itaque ſi ipſi a², ſubducere debeamus b pl. ignoretur autem vtra iſtarum magnitudinum ſit maior, fiet reſidua magnitudo hæc a² $\sim$ b pl. vel b pl. $\sim$ a². *Quando magnitudines aſcendunt per expoſitã ſcalam.*

EXEMPLA.

a	2 a	7 a	10 b	a
a	a	5 a	6 b	b
o	a	2 a	4 b	a — b

b	5 c	a	2 c	a²
d	3 d	5 b	d	a²
b — d	5 c — 3 d	a — 5 b	2 c — d	o

6 a²	7 a³	a³
2 a²	5 b²	b³
4 a²	7 a³ — 5 b²	a³ — b³

Aduerte quantitatem ſubtrahendam minorem eſſe debere ea, à qua fit ſubtractio. *Notandum.*

SCHOLION.

Aduertenda quædam circa characteres maiuſculos.

Haud erit difficile intelligere, quo pacto ſuperior operatio inſtituenda ſit, adhibitis characteribus maiuſculis; itaque ſi auferatur A, ex A 5, remanebit A 4. Nec diſſimiliter quotteſcunque magnitudines fuerint eiuſdem appellationis. Quod ſi extiterint appellationis diuerſæ, vt cum ex A, auferri debet B, fit ſubtractio, vt in characteribus minuſculis per ſignum —, itaque remanet A — B, &c.

Magnitudinem in Magnitudinem ducere.

OPERATIO TERTIA.

Magnitudinũ ſimplicium multiplicatio, quo pacto inſtituenda ſit.

SVnto duæ magnitudines a, & b, oporteat vnam in aliam ducere. Quoniam igitur magnitudo in magnitudinem ducenda eſt; illæ maguitudines ductu ſuo efficiunt magnitudinem ſibi ipſis heterogeneam. Proinde magnitudo producta, quæ nimirum ſub ijs fit, hoc ſymbolo b a, deſignabitur; hoc autem intellige, cum fuerint magnitudines diuerſi nominis; alioquin cum exiſterint appellationis eiuſdem, vt dum a, duci debet in ſe, fiet a^2, ſi multiplicatio fuerit quadratica. Quòd ſi fuerit cubica fiet a^3. Vt mox dicemus.

At verò ſi aſcendant in ſcala, vel eis genere communicent, adhibeantur congruæ denominationes, Sit iniunctum b, ducere in a^2, producetur b a^2. Item ſit opus ducere b pl. in d, fiet b pl. d. Si verò a, duci debeat in a^2, fiet a^3, vt ſupra tactum eſt. Quòd ſi præterea multiplicari debeat a, per a^3, producetur a^4.

Denominationes factorum &c.

Cæterùm denominationes factorum, ſeu productorum à ſcandentibus proportionaliter magnitudiuibus, ex genere ad genus, hoc modo ſe habet, nimirum ductum.

Latus in ſe facit Quadratum.

Latus in Quadratum facit Cubum.	R in R	Q	a in a	a^2
Latus in Cubum facit Quadrato-quadratum.	R in Q	C	a in a^2	a^3
Latus in Quadrato-quadratum facit Quadrato-	R in C	QQ	a in a^3	a^4
cubum.	R in QQ	QC	a in a^4	a^5
Latus in Quadrato-cubum facit Cubo-cubum.	R in QC	CC	a in a^5	a^6
Et contra, ſeu permutatim hoc eſt.	Q in R	C	a^2 in a	a^3
Quadratum in latus efficit Cubum.	C in R	QQ	a^3 in a	a^4

Cubus in Latus efficit Quadrato-quadratum.

RVRSVS.

Quadratum in ſe facit Quadrato-quadratum.	Q in Q	QQ	a^2 in a^2	a^4
Quadratum in Cubum facit Quadrato-cubum.	Q in C	QC	a^2 in a^3	a^5
Quadratum in Quadrato-quadratum facit Cubo-cubum.	Q in QQ	CC	a^2 in a^4	a^6

Et permutatim.

Digitized by Google

RVRSVS.

Cubus in ſe facit Cubo-cubum.	c in c | cc | a^3 in a^3 | a^6
Cubus in Quadrato-quadratum facit Quadrato-quadrato-cubum.	c in qq | qqc | a^3 in a^4 | a^7
Cubus in Quadrato-cubum facit Quadrato-cubo-cubum.	c in qc | qcc | a^3 in a^5 | a^8
Cubus in Cubo-cubum facit Cubo-cubo-cubum. Et permutatim.	c in cc | ccc | a^3 in a^6 | a^9

IN HOMOGENEIS.

Latitudo in longitudinem facit Planum.	Latitudo in longitudinem | pl. | a in b | a b
Latitudo in Planum facit Solidum.	Latitudo in planum | ſol. | a in b pl. | a b pl.
Latitudo in Solidum facit Plano-planum.	Latitudo in ſolidum | pl. pl. | a in b ſol. | a b ſol.
Latitudo in Plano-planum facit Plano-ſolidum.	Latitudo in pl. pl. | pl. ſol. | a in b pl. pl. | a b pl. pl.
Latitudo in Plano-ſolidum facit Solido-ſolidum.	Latitudo in pl. ſol. | ſol. ſol. | a in b pl. ſol. | a b pl. ſol.
Et permutatim.	

Planum in Planum facit Plano-planum.
Planum in Solidum facit Plano-ſolidum.
Et permutatim.
Solidum in Solidum facit Solido-ſolidum.
Solidum in Plano-planum facit Plano-plano-ſolidum.
Solidum in Plano-ſolidum facit Plano-ſolido-ſolidum.
Solidum in Solido-ſolidum facit Solido-ſolido-ſolidum.
Et permutatim.

Itaq; cùm fuerint eædem literæ inſtituimus multiplicationem additione exponentium, quam quidem ſummam eidem literæ apponimus, & a tergo quidem, ſed aliquantulum altiùs, vel eandem literam repetimus toties; quoties eſt opus; hoc eſt quoties patitur multiplicatio inſtituta, adeo vt literæ immediatè ſe ſe conſequentes, multiplicationem earum per inuicem factam, vel faciendam eſſe indicent. Si verò literæ fuerint diuerſæ ponuntur continuè vna cum exponentibus ſuis. Quòd ſi habeant numeros præfixos, debet earum fieri multiplicatio, vt in numeris abſolutis; quamobrem ſi debet multiplicari a, per a, hoc eſt a, in ſe, fit a^2, eſt enim 1, exponens ipſius a, ex 1, verò, & 1, fit 2, exponens ipſius a^2, & ſic de reliquis, vt ſuprà dicebamus, quòd ſi debeat multiplicari a^2, per a, fit a^3; At ſi literæ fuerint diuerſæ, vt b, & a, debeamus verò multiplicare b, per a, fiet a b, vel b a, quod ſi multiplicare debeamus a, b, & c, per inuicem, fiet a, b, c, vel c, b, a; Nihil enim refert, vtro modo literæ diſponantur, licet præſtet, literam, qua ſignificatur quantitas ignota, poſtponere.

Quando ſunt eædem literæ inſtituitur multiplicatio additione exponentium. Quando literæ ſunt diuerſæ. Quãdo habent numeros præfixos.

Vt igitur ex ductu alicuius numeri in ſe, quod producitur vocatur quadratum eiuſdem numeri, & ſi productum illud adhuc ſemel per numerum eundem multiplicetur, productus numerus cubus ipſius nuncupatur, & ita deinceps; ita pariter ſi a, multiplicetur per a, productum a^2, conſueuit appellari a, quadratum ſiue a, duarum dimenſionum, & ſi a^2, rurſus multiplicetur per a, producetur a^3, nempe a, cubus, ſeu a, trium dimenſionum, & ita de reliquis vnde a^4, dicetur a, quadrato-

Explicatur quomodo fiat multiplicatione quadratũ.

Digitized by Google

quadratum, ſeu a, quatuor dimenſionum, & a^5, dicetur a ſurdeſolidum ſecundùm Veteres, at iuxta Recentiores a quadrato-cubus, ſeu a, quinque dimenſionum, & inſuper a^6, iuxta Veteres dicetur a quadrato-cubus, at ſecundum Recentiores a cubo-cubus; ſiue a ſex dimenſionum, & ſic de cæteris.

Radix explicatur.

Quemadmodum verò numerus quiſpiam in ſe multiplicatus dicitur radix ipſius producti, & ſi adhuc ſemel per huiuſmodi productum, dicitur radix cubica huius poſterioris producti &c. ita a dicitur radix quadrata ex a^2, & radix cubica ex a^3, & radix quadrato-quadrata ex a^4 &c.

Senſus, qui redditur, cùm literæ præfigitur numerus.

Ex his facilè intelliges alium ſenſum reddi, cùm literæ præfigitur numerus, & alium, cùm idem numerus à tergo ipſimet literæ adſcribitur.

Aduertendum eſt autem in hac Operatione multiplicationis.

EXEMPLA.

$$\begin{array}{ccccccc} a & a^2 & a^2 & a & b^2 & a\,b & a\,b^2 \\ a & a & a^2 & b & b & c & b \\ \hline a^2 & a^3 & a^4 & a\,b & b^3 & a\,b\,c & a\,b^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} a\,b & a^2 & a^3 & a^3 \\ c\,d & a\,b & a^2 & a^3 \\ \hline a\,b\,c\,d & a^3\,b & a^5 & a^6 \end{array}$$

Superiora explicantur.

Cùm ſcribitur $a^3 b$, quod eſt productum multiplicationis quantitatum a^2, & a b, ternarium numerum reſpicere quantitatem præcedentem a, non autem ſubſequentem b, & ita de conſimilibus.

Quando ſunt quantitates multiplicandæ quibus numeri ſiue integri, ſiue fracti præfiguntur.

Quòd ſi multiplicandæ quantitates occurrant, quibus numeri, ſiue integri, ſiue fracti præfiguntur, numeros prædictos oportet in ſe inuicem ducere, eorumque productum præfigere producto, conſurgenti ex multiplicatione dictarum quantitatum, quod ſuperiùs etiam innuimus; itaque ad multiplicandum 2 a, per 5 b, multiplicatis 2, per 5, prouenit 10, quod ſi præfigatur ipſi a b, producto quantitatum a, & b, per inuicem, productum quæſitum erit 10 a b. Non diſſimiliter ex 3 b, in c, fit 3 b c; Siquidem vnitas, quæ intelligitur nunc præfigi ipſi c, ducta in 3, producit 3.

Exempla ad ſupradictorũ explicationẽ.

Si verò oporteat ducere 2 a b, in 3 c d, prouenìet 6 a b c d, præterea ex multiplicatione $\frac{2}{3}\,a^2$, in $\frac{1}{5}$ a b; fiet productum $\frac{2}{15}\,a^3 b$. Hoc eſt ex duabus tertijs partibus ipſius a^2, in quintam partem ipſius a b, fiunt duæ decimæquintæ partes ipſius $a^3 b$.

EXEMPLA.

$$\begin{array}{ccccc} 2\,a & 3\,b & \frac{1}{2}\,a & 3\,a\,b & \frac{2}{3}\,a^2 \\ 4\,b & c & \frac{1}{2}\,b & 2\,c\,d & \frac{1}{5}\,a\,b \\ \hline 8\,a\,b & 3\,b\,c & \frac{1}{4}\,a\,b & 6\,a\,b\,c\,d & \frac{2}{15}\,a^3\,b \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} a^3 & 6\;a^2 \\ 2\,b^2 & \frac{2}{3}\;a^3 \\ \hline 2\,a^3\,b^2 & 4\;a^5 \end{array}$$

Demum hìc operæ pretium eſt aduertere, etſi ex multiplicatione producantur

tur quantitates plurium dimenſionum, earum tamen additionem, ſubtractionemque non aliter fieri, ac in præcedentibus.

Magnitudinem Magnitudini applicare, ſeu Magnitudinem per Magnitudinem diuidere.

OPERATIO QVARTA.

SVnto magnitudines a, & b, quarum vna debeat alteri applicari, & quidem applicanda magnitudo altior eſſe debet ea, cui applicanda eſt. Quoniam magnitudo eſt magnitudini applicanda, quantitas autem applicanda ei, cui fieri debet applicatio, heterogenea eſt, vt ſi longitudini applicetur planum, altiores autem applicantur depreſſioribus. Eſto itaque a longitudo; b verò ſit planum; commodè inſtituetur applicatio inter b planum, magnitudinem ſcilicet altiorem, quæ applicatur, & a longitudinem, cui ſit applicatio.

Magnitudinũ diuiſio, ſeu applicatio explicatur.

Fiet itaque quotiens $\frac{b\ pl.}{a}$. Si verò a ſ, per r, diuidi deberet, fieret $\frac{a\ ſ}{r}$. Si autem a^2 ſ, diuidatur per r, fiet $\frac{a^2\ ſ}{r}$. At ſi ſit opus diuidere a^2 ſ, per a, fiet quotiens a ſ.

Exemplis præcepta illuſtrãtur.

Si verò magnitudines denominabuntur à ſuis, in quibus hæſerunt, vel ad quas in proportionalium ſcala, vel homogeneorum ſunt deuectæ gradibus, velut $\frac{b\ pl.}{a}$; hoc quidem ſymbolo ſignificatur latitudo, quam facit b plan. applicatum a longitudini.

Quod ſi b, dicatur cubus, & a, ſit planum, vt b^3, & a pl. emergit quotiens $\frac{b^3}{a\ pl.}$. Quo ſymbolo denotatur latitudo, quam facit b cubus applicatus a plano, ſeu ſignificatur latitudo, quæ oritur ex applicatione b cubi, ad a planum. Item ſi ſit opus diuidere b^3, per a, fiet quotiens $\frac{b^3}{a}$. Quo ſymbolo denotatur proueniens planum ex applicatione b cubi, ad a longitudinem.

Præter ſuperiora adhuc alia afferuntur ad idem.

Denominationes ortorum ex applicatione à ſcandentibus proportionaliter magnitudinibus gradatim ex genere ad genus, hoc pacto ſe habent.

Denominationes ortorum explicantur.

Quadratum applicatum Lateri reſtituit Latus.
Cubus applicatus Lateri reſtituit Quadratum.
Quadrato-quadratum applicatum lateri reſtituit Cubum.
Quadrato-cubus applicatus Lateri reſtituit Quadrato-quadratum.
Cubo-cubus applicatus Lateri reſtituit Quadrato-cubum.
Et permutatim, ideſt.
Cubus Quadrato applicatus, reſtituit Latus; & ita deinceps.

RVRSVS.

Quadrato-quadratum applicatum Quadrato reſtituit Quadratum.
Quadrato-cubus applicatus Quadrato reſtituit Cubum.
Cubo-cubus applicatus Quadrato, reſtituit Quadrato-quadratum.
Et permutatim.

RVRSVS.

Cubo-cubus applicatus Cubo, reſtituit Cubum.
Quadrato-cubo-cubus applicatus Cubo, reſtituit Quadrato-cubum.
Cubo-cubo-cubus applicatus Cubo reſtituit Cubo-cubum.
Et permutatim; eoque ordine deinceps.

IN

IN HOMOGENEIS.

Planum applicatum Latitudini, reſtituit Longitudinem.
Solidum applicatum Latitudini, reſtituit Planum.
Plano-planum applicatum Latitudini, reſtituit Solidum.
Plano-ſolidum applicatum Latitudini reſtituit Plano-planum.
Solido-ſolidum applicatum Latitudini, reſtituit Plano-ſolidum.
Et permutatim.
Plano-planum applicatum Plano, reſtituit Planum.
Plano-ſolidum applicatum Plano, reſtituit Solidum.
Solido-ſolidum applicatum Plano, reſtituit Plano-planum.
Et permutatim.
Solido-ſolidum applicatum Solido, reſtituit Solidum.
Plano-plano-ſolidum applicatum Solido, reſtituit Plano-planum.
Plano-ſolido-ſolidum applicatum Solido, reſtituit Plano-ſolidum.
Solido-ſolido-ſolidum applicatum Solido reſtituit Solido-ſolidum.
Et permutatim, deinceps.

Quomodo fiat diuiſio in iiſdem literis.

Itaque ſi fieri debet diuiſio in ijſdem literis; ſubducto exponente diuiſoris ab exponente diuidendi, quotiens indicatur à reliquo numero illius ſubtractionis. At ſi in diuidente, & diuidendo non ſint omnino eædem literæ, ſed quædam in diuidendo, quæ non ſint in diuidente; fit ſubtractio ijſdem literis ſublatis.

In diuerſis literis inſtituitur diuiſio per fractionem.

In diuerſis autem cum nequit eadem litera auferri; fit fractio ſubijciendo diuiſorem ipſi diuidendo.

Cum literæ habent numeros præfixos.

At verò ſi literæ numeros habeant præfixos diuiſis quantitatibus, vt dictum eſt ſimiliter diuiſio fieri debet ipſorum numerorum quemadmodum in numeris abſolutis.

Hæc illuſtrantur exemplis.

Hæc autem illuſtremus exemplis; Oporteat igitur diuidere a^3, per a, fiet quotiens a^2. Deinde diuidere oporteat a^3, per a^2, fiet quotiens a; Item a, per a^2, fiet quotiens $a^?$; præterea ſit opus diuidere a b per a, proueniet b; & ſi diuidatur a b c, per a, proueniet b c, & rurſus a b c, ſi diuidatur per a b, proueniet c &c.

Quando contingit vt diuiſoris literæ auferri tollique non poſſint, à quantitate diuidenda.

Quia verò non raro contingit, vt occurrant quantitates diuidendæ ex quibus diuiſoris literæ modo iam explicato auferri, tollique non poſſunt; tunc ſubſcribendus eſt diuiſor ipſi diuidendo inſtar arithmeticæ fractionis; Quamobrem ſi ſit opus diuidere b^2, per a, proueniet fractio $\frac{b^2}{a}$; ita, ſi oporteat diuidere a b, per c, proueniet fractio $\frac{ab}{c}$. Inſuper ſi b c, per a; erit quotiens $\frac{bc}{a}$.

Præterea a b c, per d, ſi diuidatur; fit quotiens $\frac{abc}{d}$. Inſuper a^3, per b^2, fit quotiens $\frac{a^3}{b^2}$. Ad extremum, quando idem diuidit ſe ipſum fit quotiens 1; vt ſi a^2, per a^2, fit quotiens 1; item ſi b^2, per b^2, fit quotiens 1; præterea ſi a^3 per a^3, & b^3 per b^3, & ita de reliquis.

Quando occurrunt quantitates diuidendæ, quibus præfixi ſunt numeri.

At verò ſi quantitates diuidendæ occurrant, quibus præfixi ſint numeri; ſi quantitatum diuiſio fieri poteſt, vt dictum eſt, facta huiuſmodi diuiſione, oportet diuidere ſimiliter prædictos numeros, vt in Arithmetica vulgari, & quod oritur quotienti præfigere. Sit iniunctum diuidere 8 a per 2, proueniet quotiens 4 a; Deinde ſi opus ſit diuidere 10 a^3 per 2 a^2, fiet quotiens 5 a^1. Præterea ſi diuidere oporteat $\frac{1}{6}$ a^2b per $\frac{1}{3}$ ab, proueniet quotiens $\frac{1}{2}$ a^2. Item ſi 3 a^3 b^2, diuidatur per 3 b^2, fiet quotiens a^3; ſi verò 6 a^3 b^2, diuidatur per 3 b^2, proueniet quotiens 2 a^3. Inſuper ſi diuidatur 6 a^3 b^2 per 3 a^3, fiet quotiens 2 b^2; At ſi diuidatur 6 a^3 b^2 per 2 a^3, fiet quotiens 3 b^2, & ſic de reliquis.

Quando præfixi ſunt numeri vt ſublatio literarum fieri non poſſit.

Quandoque præfixi ſunt numeri, ita tamen, vt ſublatio literarum fieri non poſſit, tunc ſubſcribendus eſt diuiſor ipſi diuidendo, vt fiat fractio. Itaq; ſi opus ſit diuidere 4 a^2 per 2 b, fiet quotiens $\frac{4a^2}{2b}$, præterea ſi diuidere oporteat 4 a b per 2 c, fiet quotiens $\frac{4ab}{2c}$.

Demon-

Demonſtratio ea eſt, quia diuiſio eſt ſumptio quantitatis, ad quam diuiſa eam habet rationem, quam diuidens ad poſitam; hæc autem comparatur, ſi quantitas diuidenda applicetur diuidenti &c.

Demonſtratio quomodo ſe habeat.

S C H O L I O N.

HAEC Operatio ſi characteribus maiuſculis perficienda foret ſic inſtituenda eſſet. Sit A, longitudo, B, verò ſit planum, & applicatio ſit inſtituenda; id quidem perficietur intercedente virgula, ſeu lineola inter B, planam magnitudinem, & A longitudinem, ita vt hæc infra, illa verò ſupra ſcribatur; quamobrem ortiua magnitudo erit $\frac{B \text{ planum}}{A}$. *Si verò S, in A, diuidi debet per R, fiet* $\frac{S, \text{ in } A}{R}$, *at ſi ſit opus diuidere S, in A quadratum per A, proueniet S, in A, quod ſi B, dicatur cubus, & A, ſit planum per quod ille diuidendus ſit, proueniet* $\frac{B \text{ cubus}}{A \text{ planum}}$, *quo ſymbolo denotatur latitudo quam facit B, cubus applicatus A plano; hoc enim modo ſignificatur latitudo, quam facit B cubus, applicatus A plano; hoc enim pacto ſignificatur latitudo ortiua ex applicatione B cubi, ad A planum, & ſic de reliquis &c.*

Hi explicatur quomodo hæc operatio characteribus maiuſculis perficienda ſit.

Illud inſuper videtur operæ pretium aduertere, quod ſuperiùs etiam innuimus; nempe plurimum conferre ad exquiſitam notitiam harum operationum, ac vniuerſa pragmatia, quæ nimirum ſpeciebus perficitur, ſi illis taxatis iuxta quoſdam numeros, operationes exerceamus, hoc enim modo, ſecundum debitam æſtimationem explicatis, facile nos aſſequemur, quid ijs veritatis inſit; Cùm, quis enim adnotauerit id in numeris fieri, quod operationis natura exigit, non erit cur quidem in dubium vertat, num operationem ritè perfecerit. Hæc autem vt aliquo nunc illuſtremus exemplo. Supponamus a^3, *ducendum eſſe in* a^2. *Præceptum enim docet prouenire* a^5 *(ommittimus exempla Additionis, Subtractioniſque vtpote obuia). Itaque vt veritas deprehendatur. Supponamus a valere 3, eius igitur quadratum, puta* a^2, *erit 9, at verò eiuſdem cubus, puta* a^3, *erit 27. Ductus autem 27, in 9, facit 243. Conſtat autem 243, eſſe quadrato-cubum numeri 3, in Geometrica progreſſione ducente initium ab 1. Præterea ſi 3* a^2, *ducantur in 5* a^3. *Præceptum docet fieri 15* a^5. *Rem autem ſic ſe habere hunc qui ſequitur in modum deprehendemus, Si a, valet 3 vtiq;* a^2, *valebit 9, & 3* a^2, *valebunt 27. At verò ſi 3, eſt pretium radicis a, ita vt* a^2, *valeat 9, ſanè* a^3, *valebit 27. Itaque 5* a^3, *valebunt 135, atqui ſi multiplicemus 135, per 27, fit productum 3645, & ita ſe res habet, in ſpeciebus ipſis; Nam ſi* a^5, *valet 243, hic numerus multiplicandus eſt per 15, & proueniet 3645. Præterea ſi ducere deberemus 3* a^3 *b, per 2* a^2, *ex hypotheſi quòd a valeat 3, vtique* a^3, *valebit 27, itaque cum b, valeat 10, (tantum enim eius valorem ſupponimus)* a^3*b, valebit 270, cuius triplum eſt 810, atq; tantum erit pretium ipſius 3* a^3 *b, at verò cùm a, valeat 3, &* a^2, *valeat 9; certè 2* a^2, *valebunt 18, ſi autem 810, ducantur in 18, fit productum 14580. Idem eſt autem valor ipſius 6* a^5 *b, etenim* a^5, *valet 243, ex hypotheſi quod a valeat 3, & b, valeat 10, quo ducto in 243, fit 2430, hoc autem ducto in 6, fit 14580.*

Aduertenda quædam, circa commemoratas operationes.

Superiora exempla numeris explicantur quoad multiplicationem.

Non diſſimiliter id in diuiſione dignoſcetur, ſi enim opus ſit diuidere a^3, *per* a^2. *Præceptum docet oriri, a, ſi a, valet 3 vtiq;* a^2, *valebit 9, &* a^3 *valebit 27, hic diuidatur per 9, nempe* a^2, *proueniet 3, valor ipſius a. Item ſi* b^3, *diuidi debet per b, Præceptum docet oriri* b^2, *etenim ſi b, valet exempligratia 8, eius quadratum puta* b^2, *erit 64, eiuſdemque cubus erit 512, at ſi 512, diuidatur per 8, nempe* b^3, *per b, fiet quotiens 64, nempe* b^2. *Præterea ſi opus ſit diuidere 8 a b, per 2 a. Præceptum docet fieri 4 b. Supponamus a, valere 3, & b, 10, ergo a b, valebit 30, atque 8 a b, valorem habebit 240, at verò 2 a, valebunt 6, ſi autem diuidatur 240, per 6, fit quotiens 40, quantum ſanè valet 4 b, nam b, valet 10, quo ducto in 4, fit 40.*

De diuiſione differitur, & eius exempla numeris illuſtrantur.

Præterea ſit opus diuidere a b c, per a. Præceptum docet prouenire b c, & ita ſe res habet, ſi enim a valet 3, & b, 10, inſuper c, 4, vtique a b c, valebit 120, at ſi diuidatur

Explicationis continuatio.

tur

tur 120, per 4, nempe a b c, per c, fiet quotiens 30, nempe a b. Inſuper iniunctum ſit diuidere $\frac{1}{6}\,a^3 b$, *per* $\frac{1}{3}\,a\,b$, *fiet quotiens* $\frac{1}{2}\,a^2$, *vt præceptum docet, & ita res ſe habet; ſi a, valet 3 certè* a^3, *valebit 27, at ſi b valet 10 ſanè* $a^3 b$, *valebit 270, itaq;* $\frac{1}{6}\,a^3 b$, *valebit 45, at verò ſi a, valet 3, & b, valet 10, vtique a b, valebit 30, quare* $\frac{1}{3}$ *a b valebit 10, ſi verò diuidatur 45, nempe* $\frac{1}{6}\,a^3 b$, *per* $\frac{1}{3}$ *a b, nempe per 10, fiet quotiens* $4\frac{1}{2}$, *nempe* $\frac{1}{2}\,a^2$. *Si enim* a^2, *valet 9, cum a, valeat 3, certè* $\frac{1}{2}\,a^2$, *valebit* $4\frac{1}{2}$ *Eodem pacto reliqua exempla explicari numeris poſſunt. Vt cùm diuidere opus ſit* $5\,a^3$, *per 2 b, fiet quotiens* $\frac{5\,a^3}{2\,b}$, *& inſuper ſi* $5\,a^3 b^3$, *diuidatur per* $5\,b^3$, *proueniet* $1\,a^3$, *hoc eſt* a^3. *Præterea ſi ſit opus diuidere* $7\,a^3 b^3$, *per* a^3, *fiet quotiens* $7\,b^3$. *Hoc igitur modo ſe geret Artifex in ſuis perficiendis operationibus.*

Alia explicãtur exempla

Verùm hæc vti dicebam facilè explicari poſſunt. Nam ſi $5\,a^3$, *per 2 b, diuidatur, prouenire* $\frac{5\,a^3}{2\,b}$, *facile conſtat; Quod ſi* $5\,a^3\,b$, *diuidatur per* $5\,b^3$, *prouenire* a^3, *hunc in modum intelliges, etenim* $5\,a^3\,b$, *ex hypotheſi, quòd a, valeat 3, & b, 10; vtiq; valebit 135000, &* $5\,b^3$, *valebit 5000, ex hypotheſi quod b, valeat 10, nam eius cubus eſt 1000, quo ducto in 5, fit 5000, pro pretio ipſius* $5\,b^3$, *ſi autem 135000, diuidatur per 5000, fiet quotiens 27, nempe* a^3. *Ita pariter cum diuiditur* $7\,a^3 b^3$, *per* a^3, *fieri* $7\,b^3$, *hunc in modum addiſces. Si enim a, valet 3, vt* a^3, *valeat 27, at verò b, valeat 10, &* b^3, *valebit 1000, quo ducto in 27, fit 27000, hoc autem valebit* $a^3 b^3$, *ſi igitur 27000, ducatur in 7, fiet 189000, nempe pretium ipſius* $7\,a^3 b^3$. *At ſi* a^3, *valet 27, diuiſo 189000, per 27, fiet quotiens 7000, pretium ipſius* $7\,b^3$. *Rectè igitur Præceptum iubet &c.*

Noua hæc Ars iterum commendatur.

Hac itaq; ratione Speciosæ Logiſtices operationes tractari poſſunt, vt inde nobis lucidiùs conſtet, ritè inſtitutam fuiſſe, etſi id etiam demonſtrationibus nulla numerorum habita ratione planum, ac manifeſtum fiat; Imò quod ſpecierum eſt proprium, ita operatio ipſa perficitur, vt luculenter omnia ab initio ad finem operationis conſpiciantur, ſingulis nimirum eius membris ob oculos poſitis, quod in numeris omnino deſideratur, propterea quod ſpecies ipſæ, quod etiam ſuprà innuimus, nulli ſunt mutationi obnoxiæ, numeri autem maximè, impermixtæ ſiquidem illæ atque ab omni confuſione immunes per ſe ſemper apparent, quales operatio ipſa requirit, numeri autem additione, ſubtractione, vel aliqua alia operationis ſpecie confuſi, nullo modo ſe ſe dant in conſpectum, quales ad opus fuerunt aſſumpti, in quo plurimum elucet nouæ Logiſtices præſtantia, vnde non mirum, ſi huius ope liceat illa perficere, quæ alioquin antiqua illa, quamuis aliàs mirum in modum commendabilis abſoluere minimè poſſit. Hoc aduertiſſe non piget iterum, quod ſuperiùs non ſemel inculcauimus, vt cuique perſpectum fiat, operæ pretium eſſe in hanc pene Diuinam Artem nouiter excogitatam incumbere; ſiquidem ob eam, quam attulimus cauſam, ipſius opitulatione datum eſt ad Geometriæ apicem pertingere. Vnde ſummis laudibus efferendus eſt ille celebris, nec vnquam ſatis pro dignitate commendatus, cui hæc accepta referri debet, etſi non multam gratiam apud quoſdam inierit, breuiori, & conciſo vtens conſcribendi ſtilo; quamuis aliàs acri, ſolertique donatus ingenio, ditiorem Mathematicarum Theſaurum in communem ſtudioſorum gratiam recluſerit.

Proponitur interim id, de quo differendum, facto ſuprædictorum epilogiſmo.

Hucuſq; de magnitudinibus ſimplicibus diſſeruimus, de quibus, & naturæ, & doctrinæ ordine primùm erat agendum, ſimplices enim cùm ſint, compoſitas antecedunt; harum enim principia ſunt; & earum itidem cognitio facilior eſt, ſine qua compoſitas aſſequi non licet, propterea ducendum inde erat exordium; proximum autem eſt, vt de compoſitis ſermonem inſtituamus, quod ſequenti capite noſtra contemplatione perſequemur.

Algho-

Algorithmus Magnitudinum Compoſitarum.

CAPVT IV.

SVPERIVS explicuimus, Logiſticen ſimplicium magnitudinum ſcilicet additionem, ſubtractionem, multiplicationem, & applicationem, ſeu diuiſionem. Quoniam autem ex illarum additione, ſubtractioneque proficiſcuntur quantitates per ſignum † compoſitæ, vel per ſignum — diſiunctæ, quæ tamen communi quadam nomenclatura compoſitæ dici conſueuere, nunc præterea ſequitur agendum de compoſitarum iſtarum magnitudinum operationibus.

Quibus de rebus hactenus diſputatum fuerit.

Verum enim verò quia ex dictis hæc facilè conſtare poſſunt, habita præ oculis ratione ſignorum †, & —, proinde breuiter hæc omnia, quibuſdam exemplis declarare tentauimus, animaduerſis ijs, quæ nos in Numeroſa tradidimus.

Quid præ oculis habendum.

Additio Magnitudinum Compoſitarum.

OPERATIO PRIMA.

AD additionem quod attinet, animaduertendum in ſignis affectionis eiuſdem, ſiue in ijſdem ſignis affectionis, idem ſignum retineri; in diuerſis autem additionem in ſubtractionem commutari, reſiduumque ſigno maioris affici. Hæc autem exemplis declarabimus, ad a † d, addatur a, fiet 2 a † b, item ad illud idem binomium addatur magnitudo b fiet a † 2 b.

Quomodo additio ſit inſtituenda, cum ſigna fuerint affectionis eiuſdem.

Itaque quantitatum compoſitarum additio inſtituetur, conſideratis ſignis †, & —, quibus afficiuntur; ſi igitur fuerint lineæ eædem, ſeu quantitates eiuſdem denominationis, fit additio, vt in ſimplicibus, idemq; ſignum præfigitur ſummæ, quamobrem ſi oporteat addere a † b, ad a † b, fiet 2 a † 2 b, inſuper ſi addi debeat a † b, ad 5 a † 3 b, fiet ſumma 6 a † 4 b, ita ſi addatur 3 a — b, ad 4 a — 2 b, fit ſumma 7 a — 3 b.

Quantitatum compoſitarum additio, cum quantitates fuerint eiuſdem denominationis.

Et hæc ex adiunctis exemplis colligere licebit, in quibus cernitur etiam modus inſtituendi additionem, cùm ſigna diuerſa fuerint; ſunt enim tunc ſubtrahendæ quantitates ijſdem literis denotatæ; quemadmodum in ſubtractione ſimplicium obſeruatum fuit, ſubtractione autem facta, ei quod relinquitur præfigendum eſt ſignum, quo maior quantitas afficitur.

Quando ſunt eadem. Quando ſigna fuerint diuerſa.

Itaque ſi addere oporteat 4 b † 5 a, ad 3 b — 2 a, additis 4 b, ad 3 b, & ſubtractis 2 a, ex 5 a, fiet ſumma 7 b † 3 a, præterea ſi a † b, addatur ad a — 5 b, fiet ſumma 2 a — 4 b, vbi aduerte naturam ſignorum †, & —, inſuper ſi 3 b † a, addatur ad 4 b — a, fiet ſumma 7 b, etenim † a, & — a, mutuò ſe tollunt.

Exempla.

Cùm autem addere oportet quantitates diuerſis literis denotatas, ſufficit illas ſuis connectere ſignis, quibus afficiuntur. Vt ſi oporteat addere a † b, ad c — d, proueniet ſumma a † b † c — d, propterea quod quantitas c, nullo ſigno affecta ſupponitur habere præfixum ſignum †.

Quando quantitates ſunt diuerſis literis denotatæ, ſiue ſunt diuerſæ appellationis, quid agendũ.

EXEMPLA.

$$
\begin{array}{r} a+b \\ a \\ \hline 2a+b \end{array}\quad
\begin{array}{r} a+b \\ +b \\ \hline a+2b \end{array}\quad
\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline 2a+2b \end{array}\quad
\begin{array}{r} a+3b \\ a+2b \\ \hline 2a+5b \end{array}\quad
\begin{array}{r} 3a+3b \\ 2a+b \\ \hline 5a+4b \end{array}
$$

$$
\begin{array}{r} 5a-2b \\ 3a-b \\ \hline 8a-3b \end{array}\quad
\begin{array}{r} a+b \\ c+d \\ \hline a+b+c+d \end{array}\quad
\begin{array}{r} a+b \\ c-d \\ \hline a+b+c-d \end{array}\quad
\begin{array}{r} a+b \\ -d \\ \hline a+b-d \end{array}\quad
\begin{array}{r} a+b \\ -b \\ \hline a \end{array}
$$

$$
\begin{array}{r} a+b \\ c+b \\ \hline a+c+2b \end{array}\quad
\begin{array}{r} a+b \\ a-b \\ \hline 2a \end{array}\quad
\begin{array}{r} b+7a \\ -9a \\ \hline b-2a \end{array}\quad
\begin{array}{r} b+9a \\ b-7a \\ \hline 2b+2a \end{array}\quad
\begin{array}{r} b-9a \\ b+7a \\ \hline 2b-2a \end{array}
$$

$$
\begin{array}{r} a^2+b^2 \\ a^2+b^2 \\ \hline 2a^2+2b^2 \end{array}\quad
\begin{array}{r} a^2+bd \\ a^2+b^2 \\ \hline 2a^2+bd+b^2 \end{array}\quad
\begin{array}{r} a^4+cdf-d^4 \\ a^4+bd^3+d^4 \\ \hline 2a^4+cdf+bd^3 \end{array}\quad
\begin{array}{r} a^2-3b^2 \\ a^2-2b^2 \\ \hline 2a^2-5b^2 \end{array}
$$

$$
\begin{array}{r} ab+b^2 \\ ab+b^2 \\ \hline 2ab+2b^2 \end{array}\quad
\begin{array}{r} a^2+abc \\ a^2+abc \\ \hline 2a^2+2abc \end{array}\quad
\begin{array}{r} a^2-abc \\ a^2-abc \\ \hline 2a^2-2abc \end{array}\quad
\begin{array}{r} \frac{1}{2}ab+\frac{1}{3}b^2 \\ \frac{1}{2}ab+\frac{2}{3}b^2 \\ \hline ab+b^2 \end{array}
$$

$$
\begin{array}{r} 4a^3-\frac{1}{3}a^2b \\ 5a^3+\frac{1}{7}a^2b \\ \hline 9a^3-\frac{11}{21}a^2b \end{array}\quad
\begin{array}{r} a^2-6a+8 \\ a^2+a-3 \\ \hline 2a^2-5a+5 \end{array}\quad
\begin{array}{r} 6a^2+5ab-b^2 \\ 3a^2-2ab \\ \hline 9a^2+3ab-b^2 \end{array}
$$

$$
\begin{array}{r} 2a^2+5ab-b^2 \\ 3ab-6a^2 \\ \hline 8ab-4a^2-b^2 \end{array}\quad
\begin{array}{r} 4abc \\ a^3-abc \\ \hline a^3+3abc \end{array}\quad
\begin{array}{r} a^3+3a^2b+abc \\ a^3+a^2b-4ab^2-b^3 \\ \hline 2a^3+4a^2b-4ab^2+abc-b^3 \end{array}
$$

$$
\begin{array}{r} a^2+3b-8 \\ a^2+2b-5 \\ \hline 2a^2+5b-13 \end{array}
$$

Numeris hæc omnia explicari poſſunt.

Hæc autem numeris explicari, ac illuſtrari poſſunt; ſi igitur ad a^2+2ab, opus ſit addere a^2-ab; per a, intelligamus 10, per b, verò 4, itaque a^2, erit 100, & $2ab$, erit 80, & ab, erit 40; Stabitque exemplum in numeris, vt hic vides.

Digitized by Google

100 ✠ 80	a^2 ✠ 2 a b
100 — 40	a^2 — a b
290 ✠ 40	2 a^2 ✠ a b

Si ad 100 ✠ 80, addatur 100 — 40, fiet ſumma 200 ✠ 40, & rectè quidem fieri dicendum 2 a^2 ✠ a b, ex additione a^2 — a b, ad a^2 ✠ 2 a b, nam 2 a^2 ✠ a b, idem eſt ac 200 ✠ 40.

Si ad b — d ✠ a, debeamus addere d — a, per b, intelligamus 10, per d, verò 5, per a, denique 2, in numeris ſic ſtabit exemplum.

Exemplum numeris illuſtratur.

10 — 5 ✠ 2
5 — 2
———
10

Conſtat autem fieri 10, ex additione præſcripta, nam 10 — 5 † 2, idem eſt quod 7, & 5 — 2, idem quod 3, ex 7, & 3, fiunt 10.

Ex additione præſcripta fieri quod dictũ eſt.

Non diſſimili modo poterunt alia exempla numeris explicari; quemadmodum cuique perſpicuum eſt.

Non diſſimiliter alia exẽpla poterunt numeris illuſtrari.

S C H O L I O N.

Facilè autem ex dictis ſuperiùs conſtare poteſt, quo pacto ſit opèrandum adhibitis characteribus maiuſculis.

Quomodo ſit operandum adhibitis characteribus maiuſculis.

Subtractio Magnitudinum Compoſitarum.

OPERATIO SECVNDA:

AD ſubtractionem quod attinet. Vt ſubtrahantur compoſitæ quantitates ijſdem literis denotatæ; oportet aduertere num ſigna fuerint eadem, vel diuerſa, & quantitas, è qua ſubtractio fieri debet maior ſit, vel minor quantitate ſubducenda. Cùm ſigna eadem fuerint, & quantitas, è qua fieri debet ſubtractio maior fuerit quantitate ſubducenda; ſubtractio fieri debet, vt in ſimplicibus, & ei quod relinquitur præfigendum eſt idem ſignum. Vt ſi oporteat ſubtrahere a † 2 b, ex 2 a † 5 b, ſubtractis a, ex 2 a, & 2 b, ex 5 b, fiet reſiduum a † 3 b.

Qua arte ſit inſtituenda ſubtractio magnitudinum compoſitarum. Quando ſigna eadem fuerint & quantitas ſubtrahenda minor.

Non diſſimiliter ſi oporteat ſubtrahere 2 a — 2 b, ex 5 a — 4 b, fiet reſiduum 3 a — 2 b.

Exempla.

At verò ſi eadem fuerint ſigna, & quantitas, à qua ſubtractio facienda eſt minor ſit quantitate ſubducenda, ſubtracta minori ex maiori, præponendum eſt reſiduo contrarium ſignum. Vt ſi oporteat ſubtrahere a † 3 b, ex 3 a † 2 b, ſubtractis a, ex 3 a, & 2 b, ex 3 b, proueniet reſiduum 2 a — b. Ita pariter ſubtracto a — 3 b, ex 2 a — b, remanebit a † 2 b.

Quando ſigna fuerint eadẽ & quantitas ſubtrahenda maior &c.

Quòd ſi propoſitæ quantitates ijſdem literis deſignatæ diuerſis ſignis afficiantur, addendæ erunt non ſecus ac in ſimplicibus fieri ſolet, & ſummæ præfigendum eſt

Quando propoſita quantitates fuerint ijſdem literis deſignata.

 ſignum

ſignum quantitatis, à qua ſubtractio fieri debet. Vt ſi oporteat ſubtrahere a — b, ex 2 a † b, ſubtracto a, ex 2 a, atque addito b, ad b, reſiduum fiet a † 2 b, non diſſimiliter ſubtracto 2 a † 5 b, ex 5 a — 2 b, remanebit 3 a — 7 b.

Maximè obſeruandum in ſubtractione. Illud autem eſt obſeruandum, videlicet ad ſubtrahendas quantitates diuerſis literis denotatas oportere quantitates ſubducendas variatis ſignis connectere cum ijs, à quibus ſubtractio fieri debet. Quamobrem ſi oporteat ſubtrahere c — d, ex a † b, reſiduum fiet a † b — c † d.

EXEMPLA.

Varia exemplorū genera.

$a \dagger b$	$a \dagger b$	$a \dagger b$	$a - b$	$a - b$	$a \dagger b$	$a \dagger b$
a	b	$a \dagger b$	$a - b$	$a \dagger b$	$a - b$	$a \dagger d$
b	a	$0 \quad 0$	$0 \quad 0$	$-2b$	$2b$	$b - d$

$a \dagger b$	$a \dagger b$	$a \dagger b$	$b \dagger d - a$	$b \dagger d \dagger a$	$a \dagger b$
$-b$	$-d$	$c \dagger b$	$b \dagger a$	$b - d - a$	$c - d$
$a \dagger 2b$	$a \dagger b \dagger d$	$a - c$	$d - 2a$	$2d \dagger 2a$	$a \dagger b - c \dagger d$

$a - b$	$a^2 \dagger ab$	$a^2 \dagger ab$	$a^2 \dagger b^2$	$a^2 \dagger ab$	$a^2 - ab$
$a - d$	$a^2 - ab$	ab	$a^2 \dagger b^2$	$a^2 \dagger ab$	$a^2 \dagger ab$
$d - b$	$2ab$	a^2	$0 \quad 0$	$0 \quad 0$	$-2ab$

$a^2 \dagger b^2 \dagger ab$	$a^2 \dagger bd$	$\frac{1}{4}a^2 \dagger \frac{1}{4}b^2 \dagger \frac{1}{2}ab$	$\frac{2}{3}ab \dagger \frac{1}{3}b^2$
$a^2 \dagger b^2 - ab$	$a^2 \dagger d^2$	$\frac{1}{4}a^2 \dagger \frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{2}ab$	$\frac{1}{6}ab \dagger \frac{1}{3}b^2$
$2ab$	$bd - d^2$	ab	$\frac{1}{2}ab \dagger \frac{2}{3}b^2$

$a^3 \dagger cdf - d^3$	$a^3 - \frac{1}{4}abc \dagger ab^2 - b^3$	$3a^3 - \frac{1}{3}a^2b \dagger \frac{2}{3}ab^2 - b^3$
$a^3 \dagger bd^2 \dagger d^3$	$\frac{2}{3}a^3 - \frac{1}{4}abc \dagger ab^2 - b^3$	$-2a^3 \dagger \frac{2}{3}a^2b$
$cdf - bd^2 - 2d^3$	$\frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{2}abc$	$5a^3 - a^2b \dagger \frac{2}{3}ab^2 - b^3$

$2a \dagger 7b$	$3a \dagger 7b$	$5a - 4b$	$4a \maltese 2b$	$2a - b$
$a \dagger 4b$	$2a \dagger 3b$	$2a - 2b$	$a \maltese 5b$	$a - 3b$
$a \dagger 3b$	$a \dagger 4b$	$3a - 2b$	$3a - 3b$	$a \maltese 2b$

$3a \maltese b$	$3a - 2b$	$10ab - a^2$	$3a^2 \maltese 3a - 10$
$a - b$	$2a \maltese 5b$	$2a^2 - 4ab$	$a^2 \maltese 2a - 2$
$2a \maltese 2b$	$a - 7b$	$14ab - 3a^2$	$2a^2 \maltese a - 8$

Non nulla aduertenda. Hic tamen iuuat aduertere ſubtractionem variari poſſe hunc in modum. Vt ſi ex 3 a ✠ 2 b, ſubtrahere oporteat a ✠ 3 b, ita pro reſiduo ſcribi poſſet 3 a ✠ 2 b — a — 3 b, elegantiùs tamen ſubtractis a, ex 3 a, & 2 b, ex 3 b, ſcriberetur 2 a — b, ex quo facilè intelliges, cùm quantitates ijſdem literis denotatæ fuerint, ijſdemq; ſignis fuerint affectæ, minorem ex maiori ſubducendam eſſe, eodem ſigno retento. *Quando quantitates ijſdem literis deſignatæ diuerſis ſignis affectæ fuerint.* At ſi ſubducenda quantitas maior fuerit ea, à qua ſubductio fieri debet, minor ex maiori ſubtrahenda eſt, præpoſito ſigno contrario.

Cùm autem quantitates iiſdem literis deſignatæ diuerſis ſignis affectæ fuerint, addendæ

dendæ ſunt, ſummæque præfigendum eſt ſignum eius, à quo ſubtractio fieri debet, vt ſi ex 2 a + b, oporteat ſuabtrahere a — b, ſcribere poſſumus 2 a + b — a + b, & etiam ſcribere licet, imò elegantiùs a + 2 b. Cæterum ex dictis patet, ſi ex a — b, ſubtrahatur b — c, remanſurum a — 2 b + c, & ſic de reliquis conſimilibus &c.

Nota.

SCHOLION.

Aduertendum eſt autem, ſi quis voluerit exempla ſpeciebus tradita, numeris illuſtrare, numeros adhibendos eſſe idoneos, aliàs decipietur; quod vt meliùs intelligatur, vnum, vel alterum exemplum explicabimus.

Nonnulla aduertenda pro explicatione operationis facienda per numeros.

Sit opus ex a + b, ſubtrahere c — d, dictum eſt autem prodire pro reſiduo a + b — c + d. Si quis igitur ſupponat 20, pro a, & 6, pro b, at verò 36, pro c, & 4, pro d, vtique ſubtractio non bene ſtabit, nec fiet reſiduum a + b — c + d, perinde enim eſſet, ac 20 + 6 — 36 + 4, hoc eſt 30 — 36, adhibendi ſunt igitur numeri idonei; Vnde ſi 20, ſupponatur pro a, & 6, pro b, at verò 30, pro c, & 4, pro d, fiet ſubtractio, vt nihil remaneat; quod ſi pro c, ſupponeretur 16, & 4, pro d, fiet reſiduum 20 + 6 — 16 + 4, hoc eſt 14. Ita ſi ex 10 a b — a^2, ſubtrahi debeat 2 a^2 — 4 a b, fiet reſiduum 14 a b — 3 a^2; Id tamen videbitur non remanere ſi ſupponamus 6, pro a, & 4, pro b, nam data hac hypotheſi, 10 a b, valebunt 240, at vero a^2, valebit 36, itaq; 10 a b — a^2, idem erit quod 240 — 36, inſuper 2 a^2, valebunt 72; & 4 a b, valebunt 96, itaque 2 a^2 — 4 a b, idem erit, quod 72 — 96, hoc autem eſſe non poteſt, ſiquidem terminus ſubtrahendus maior eſſet eo, à quo fieri debet ſubtractio. At ſi 12, ſupponamus pro a, & 4, pro b, vtique 10 a b, idem erit quod 480, quare cùm a valeat 12, & a^2, 144, & b, 4; idem erit 10 a b — a^2, ac 480 — 144, at verò 2 a^2, valebunt 288, inſuper 4 a b, valebunt 192, itaque 2 a^2 — 4 a b, idem erit ac 288 — 192, ſi autem ex 480 — 144, hoc eſt ex 336, auferamus 288 — 192, hoc eſt 96, fiet reſiduum 240, quantum eſt pretium illius reſidui 14 a b — 3 a^2, data illa hypotheſi, quod a valeat 12, & b, valeat 4, &c.

Multiplicatio Magnitudinum Compoſitarum.

OPERATIO TERTIA.

Compoſitarum quantitatum multiplicatio, vt inſtituatur, oportet earum partes inuicem multiplicare, vt de ſimplicibus dictum fuit, atque producta ſimul addere.

Qua arte ſit inſtituenda quantitatum multiplicatio.

Quòd verò attinet ad ſigna +, & —, quæ ijs præfigenda ſunt; illud eſt in memoriam reuocandum, videlicet eadem ſigna hoc eſt + per +, vel — per —, facere ſignum +, diuerſa verò nempe +, per —, vel — per +, facere —, vt ſi multiplicare debeamus a + b, per c, multiplicatis + a, per + c, & + b, per + c, fiunt + a c, & + b c, quæ ſi inuicem connectantur, ſiue addantur, proueniet + a c + b c, ſiue a c + b c. Nec diſſimiliter ſi multiplicandum ſit a — b, per c, producetur a c — b c.

Diſſeritur de multiplicatione, quantum ad ſigna +, & —.

Ita pariter ſi ducere oporteat a + b, per c + d, multiplicatis etenim a + b, per c, & iterum a + b, per d, non enim a + b, duci tantùm debet in c, ſed etiam in d, cum multiplicari debeat per c + d, fiet autem productum a c + a d + b c + b d, non diſſimiliter ad multiplicandum a — b, per c — d, procedendum eſt; ductis enim a — b, per + c, & iterum a — b, per — d, fiet productum a c — a d — b c + b d; Si enim a — b, ducatur in + c, fiet + a c — b c, deinde ſi a — b, multiplicetur per — d, fiet productum — a d + b d, propterea quod + a ductum in — d, producit — a d, at verò — b in — d, producit + b d.

Alia traduntur exempla.

EXEM-

EXEMPLA.

$$\begin{array}{r} a + b \\ c \\ \hline ac + bc \end{array} \qquad \begin{array}{r} a - b \\ c \\ \hline ac - bc \end{array} \qquad \begin{array}{r} a + b \\ - c \\ \hline ac - bc \end{array} \qquad \begin{array}{r} a - b \\ - c \\ \hline - ac + bc \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a + b \\ a + b \\ \hline ab + b^2 \\ a^2 + ab \quad \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a - b \\ a - b \\ \hline - ab + b^2 \\ a^2 - ab \quad \\ \hline a^2 - 2ab + b^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a + b \\ a - b \\ \hline - ab - b^2 \\ a^2 + ab \quad \\ \hline a^2 - b^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} bc \\ d \\ \hline bcd \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3a + 4b \\ 3b \\ \hline 9ab + 12b^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4a + 3b \\ + 2c \\ \hline 8ac + 6bc \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4a + 2b \\ 2a + 3b \\ \hline 12ab + 6b^2 \\ 8a^2 + 4ab \quad \quad \\ \hline 8a^2 + 16ab + 6b^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a + b \\ c - d \\ \hline - ad - bd \\ ac + bc \quad \quad \\ \hline ac + bc - ad - bd \\ \text{ſeu } ac - ad + bc - bd \end{array} \qquad \begin{array}{r} a - b \\ c - d \\ \hline - ad + bd \\ ac - bc \quad \quad \\ \hline ac - bc - ad + bd \\ \text{ſeu } ac - ad - bc + bd \end{array} \qquad \begin{array}{r} a^2 + 2ab + b^2 \\ a + b \\ \hline a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ a^3 + 2a^2b + ab^2 \quad \quad \\ \hline a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a^2 - 2ab + b^2 \\ a - b \\ \hline - a^2b + 2ab^2 - b^3 \\ a^3 - 2a^2b + ab^2 \quad \quad \\ \hline a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a^2 - ab + b^2 \\ a + b \\ \hline a^2b - ab^2 + b^3 \\ a^3 - a^2b + ab^2 \quad \quad \\ \hline a^3 - b^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a^2 - 2ab + b^2 \\ a - b \\ \hline - a^2b + 2ab^2 - b^3 \\ a^3 - 2a^2b + ab^2 \quad \quad \\ \hline a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a^3 - 3a^2b + ab^2 \\ a - 2b \\ \hline - 2a^3b + 6a^2b^2 - 2ab^3 \\ a^4 - 3a^3b + a^2b^2 \quad \quad \\ \hline a^4 - 5a^3b + 7a^2b^2 - 2ab^3 \end{array}$$

6 a^2

$$
\begin{array}{r}
6a^2 + 8a - 9 \\
5a^2 - 4 \\
\hline
-24a^2 - 32a + 36 \\
30a^4 + 40a^3 - 45a^2 \\
\hline
30a^4 + 40a^3 - 69a^2 - 32a + 36
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
4d^2 + 6de + e^2 \\
5de - e^2 \\
\hline
-4d^2e^2 - 6de^3 - e^4 \\
20d^3e + 30d^2e^2 + 5de^3 \\
\hline
20d^3e + 30d^2e^2 - 4d^2e^2 - 6de^3 + 5de^3 - e^4 \\
\text{ſeu } 20d^3e + 26d^2e^2 - de^3 - e^4
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
4a^3 + \frac{1}{3}a^2b + \frac{1}{5}ab^2 \\
\frac{3}{4}ab - \frac{1}{6}a^2 \\
\hline
-\frac{2}{3}a^5 - \frac{1}{18}a^4b - \frac{1}{30}a^3b^2 \\
3a^4b + \frac{3}{12}a^3b^2 + \frac{3}{20}a^2b^3 \\
\hline
2\frac{17}{18}a^4b + \frac{78}{360}a^3b^2 + \frac{3}{20}a^2b^3 - \frac{2}{3}a^5
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
5a^3 + 7a^2 - 3a + 9 \\
a^2 - 8a + 5 \\
\hline
25a^3 + 35a^2 - 15a + 45 \\
-40a^4 - 56a^3 + 24a^2 - 72a \\
5a^5 + 7a^4 - 3a^3 + 9a^2 \\
\hline
5a^5 - 33a^4 - 34a^3 + 68a^2 - 87a + 45
\end{array}
$$

Plerumque expedit multiplicationem inſtituere interſerendo particulam in, vel literam M; Vt ſi quis velit multiplicare $6a^3 + 5a^2 - 3a + 7$, per $2a^2 - 4a + 8$; Scribendum erit $6a^3 + 5a^2 - 3a + 7$, in $2a^2 - 4a + 8$, vel loco particulæ in, poteſt adhiberi litera M, vt $6a^3 + 5a^2 - 3a + 7$, M $2a^2 - 4a + 8$. *Notandum quiddam.*

Applicatio, ſeu Diuiſio Magnitudinum Compoſitarum.

OPERATIO QVARTA.

POſtremo loco de magnitudinum compoſitarum applicatione, ſeu diuiſione tractandum ſupereſt. Hæc Operatio non ſecus inſtituitur per ſpecies, ac Alphabeti elementa, quàm in vulgari Arithmetica per numeros. Iis igitur præceptis adhibitis huiuſmodi Operatio perficietur. Recolendum tamen eſt in memoriam, quod ſuo loco de diuiſione ſignorum +, & −, tradidimus. Si igitur + per +, vel − per −, diuidatur, oritur +, at verò ſi diuidatur + per −, vel − per +, oritur −. Illud autem obſeruandum nihil intereſſe, num à dextra, an à ſiniſtra incipias. *Applicatio magnitudinum compoſitarum, qua arte ſit inſtituenda.*

Itaque ad diuidendum $ac + bc$, per c, diuidatur $+ac$ per $+c$, & $+bc$ per $+c$, prouenient $+a$, & $+b$; atque adeo fiet quotiens $a + b$. Non diſſimiliter ſi diuidatur $ac - cb$, per c, orietur $a - b$; quandoquidem diuiſis $+ac$ per $+c$, fit $+a$, & $-bc$, per $+c$, fit $-b$. Deinde ſi ſit iniunctum diuidere $ac + ad + bc + bd$, per $c + d$, fiet quotiens $a + b$. *Exemplis declaratur doctrina de Applicatione.*

Diuidatur

Diuidatur	a c + a d + b e + b d	+ a c	+ a + b c	+ b
per c † d	a c + a d + b e + b d	+ c	+ c	
	o o o o			

Quotiens + a + b

Exempli explicatio. Diuidatur a e per c, & prouenit a, ſcribendum ſub linea in quotiente; multiplicato autem diuiſore c + d, per quotientem repertum a, productum a c + a d, ex ipſo diuidendo auferatur; ſcribendo partes eiuſdem denominationis locis debitis, & reliquum ſub linea infra ducta; itaque cum ſubtracto a c, ex a c, & a d, ex a d, nihil remaneat; propterea ſub ducta linea ſcribere oportebit o. Præterea diuiſo + b c, per + c, fit + b, adſcribendum priori quotienti; multiplicato autem diuiſore c + d, per quotientem hunc b, fit productum + b c + b d, ſcribendum, vt ante ſub diuidendo, factaque ſubtractione quod remanet, erit o, ſcribendum ſub linea.

Plura exempla in Applicationis explicationem. Vt verò cumulatiùs hæc à nobis tractentur, plura ſubijciemus exempla; oporteat diuidere a b + b d, per b, obſeruentur præcepta ſignorum +, & —, atque diuidatur + a b, per + b, & inſuper + b d, per + b; & fient + a, & + d; quamobrem quæſitus quotiens erit a + d. Ita ſi diuidatur a b — b d, per + b, orietur quotiens a — d, namque diuiſo + a b, per + b, fit quotiens + a, item diuiſo — b d, per + b, fit quotiens — d. Si diuidatur 7 a b — 5 a^2, per a, fiet quotiens 7 b — 5 a. Si a^2 r, diuidi debeat per a, fiet quotiens a r.

Exemplum. Ergo ſi oporteat diuidere a b + b d, per b, fiet quotiens a + d. Quod ſi diuidatur a b — b d, per b, proueniet a — d. Si diuidi debeat a b — a d, per a, fiet quotiens b — d. Quod ſi oporteat diuidere a^3 — a^2 b, per a, orietur a^2 — a b.

Exemplum. Rurſus ſi diuidere oporteat a^3 + a b^2 per a, proueniet quotiens a^2 + b^2.

Exemplum. Deinde ſi ſit iniunctum diuidere 20 a^2 + 12 a per 4 a, fiet quotiens 5 a + 3, ſi nimirum diuiſio per 4 a, inſtituatur.

Exemplum. Quoniam autem hæc Operatio magni momenti eſt, proinde non erit abs re, nec alienum ab inſtituto noſtro alia plurima exempla in medium afferre.

Diuidatur	b d + c d + b f + c f	+ b d	+ d + b f	+ f
per b † c	b d + c d + b f + c f	+ b	+ b	
	o o o o			

Exempli declaratio. Facta diuiſione ipſius b d per b, fit quotiens d; quemadmodum in ſimplicibus dicebamus; ſcribatur autem in quotiente; multiplicetur verò quotiens inuentus d, per b + c, diuiſorem, & producetur b d + c d, auferendum à diuidendo, ſcribatur autem infra ipſum, cùmque facta ſubtractione nihil remaneat; proinde ſub vtroque membro poni debet o. Nunc verò diuidatur † b f, per + b, & fiet quotiens † f, adſcribendus quotienti priori, multiplicato autem quotiente iſto inuento f, per b † c, producitur † b f † c f, ſcribendum ſub diuidendo, factaq; ſubtractione, cùm nihil remaneat, ſub reliquis duobus membris itidem . o . notari debet, atque diuiſio peracta erit: quemadmodum cernere licet in ſuperiori paradigmate, & erit quotiens d + f; idque opere multiplicationis comprobabitur.

Diuidatur

Diuidatur	$b d - c d - b f + c f$	$+ b d$	$+ d \quad - b f$	$- f$
per $b - c$	$b d - c d - b f + c f$	$+ b$	$+ b$	
	$o \quad o \quad o \quad o$			

Superioris operationis explicatio.

Ad hanc diuiſionem perficiendam. Primò diuidatur $+ b d$, per $+ b$, vt fiat quotiens $+ d$; deinde multiplicetur $b - c$, diuiſor per quotientem inuentum d, & fiet productum $b d - c d$, ſubtrahendum ex diuidendo ; ob id ſub linea ſcribi debet o. Deinde diuidatur $- b f$, per $+ b$, factaq; diuiſione quotiens orietur $- f$. Multiplicetur autem quotiens per diuiſorem $b - c$, & producetur $- b f + c f$, quo ſubtracto ex reliquo diuidendo, nihil remanet, atque adeo peracta diuiſione quotiens erit $d - f$.

Diuidatur	$a^2 - 2 a b + b^2$	$+ a^2$	$+ a . - a b$	$- b$
per $a - b$	$a^2 - a b$	$+ a$	$+ a$	
	$o - a b$			
	$- a b + b^2$			
	$o \qquad o$			

Ratio ſuperioris diuiſionis tractatur.

Vt autem hæc diuiſio perficiatur diuiui debet a^2, per a, vt fiat quotiens a, nunc multiplicetur $a - b$, per a, & producetur $a^2 - a b$, quo ſubtracto ex diuidendo fiet reliquum $- a b$, ſcribendum ſub linea ducta infrà $- 2 a b$. Mox autem diuidatur $- a b$, per $+ a$, & proueniet $- b$, ſcribendum in quotiente ; ducto deinde diuiſore $a - b$, in ipſum $- b$, producetur $- a b + b^2$, quo ſubtracto ex reliquo diuidendo nihil remanebit ; atque adeo fiet quotiens $a - b$, id quod multiplicatione comprobari poteſt.

Diuidatur	$a^2 - b^2$	$- a b \quad a^2$	$a \quad - a b$	$- b$
per $a + b$	$a^2 - b^2$	$- a b \quad a$	$+ a$	
	$o \quad o$	o		

Declaratio ſuperioris diuiſionis.

Ad hanc abſoluendam diuiſionem, primò diuidatur a^2, per a, vt proueniat a, ſcribendum in quotiente ; multiplicetur autem $a + b$, per quotientem inuentum a, & proueniet $a^2 + a b$, quo ſubtracto ex diuidendo remanebit $- a b$; hoc autem reſiduum poſt lineolam adſcribi debet ; quoniam præter $- b^2$, hic terminus $- a b$, huc ad diuidendum acceſſit ; mox autem diuidatur $- a b$; terminus iam dictus per $+ a$, & fiet quotiens $- b$, modò ſi multiplicetur $a + b$, per quotientem inuentum $- b$, conſurget $- a b - b^2$, ſubtrahendum ex eo, quod relinquitur in diuidendo : cum autem poſt ſubtractionem nihil remaneat ; ob id ſub linea ſcribi debet .o. & ideo ad finem perducta erit operatio. Hæc autem operatio multiplicatione comprobabitur, fiet autem quotiens $a - b$.

$$\begin{array}{llll}
\text{Diuidatur} & a^2 - b^2 & \Big| \; \dagger\, a\, b \quad \dagger\, a^2 \;\Big|\; \dagger\, a & \dagger\, a\, b \;\Big|\; \dagger\, b \\
\text{per } a - b & a^2 - b^2 & \Big| \; \dagger\, a\, b \quad \dagger\, a & \dagger\, a \\
 & \overline{\quad o \quad o \qquad o \quad} & &
\end{array}$$

Animaduerſis ijs, quæ ſuprà dicta fuerunt, facilè intelligentur, quæ circa hanc diuiſionem occurrunt. Ex hac autem oritur quotiens $a \dagger b$.

$$\begin{array}{llll}
\text{Diuidatur} & a^3 \dagger a^2 b - a b^2 - b^3 & \dagger\, a^3 \;\Big|\; \dagger\, a^2 . - a\, b^2 & \Big| - b^2 \\
\text{per } a \dagger b & a^3 \dagger a^2 b - a b^2 - b^3 & \dagger\, a \;\Big|\; \quad \dagger\, a & \\
 & \overline{\quad o \quad o \quad o \quad o \quad} & &
\end{array}$$

Hæc autem diuiſio facilè ex dictis intelligi poteſt, & opere multiplicationis citra difficultatem comprobatur. Quotiens autem ex hac diuiſione proficiſcitur $a^2 - b^2$.

$$\begin{array}{lll}
\text{Diuidatur} & a^4 \maltese a^3 b - a b^3 - b^4 & - b^4 \;\Big|\; - b^3 \\
\text{per } a \dagger b & a^4 \maltese a^3 b - a b^3 - b^4 & \maltese\, b \;\Big| \\
 & \overline{\quad o \quad o \qquad o \quad o \quad} & \maltese\, a^3 b \;\Big|\; \maltese\, a^3 \\
 & & \maltese\, b \;\Big|
\end{array}$$

Hic diligenter Hæc diuiſio ſi ab vltimo termino incipiatur, facilè conſtabit ex ijs, quæ hactenus dicta ſunt habita præ oculis doctrina ſignorum †, & —. Cæterùm oritur quotiens $a^3 - b^3$. Euidenter autem diuiſio comprobata manet ex opere multiplicationis, quemadmodum cernere licet in adiuncto Paradigmate.

$$\begin{array}{rl}
 & a^3 - b^3 \\
 & a \maltese b \\
\hline
 & \maltese\, a^3 b - b^4 \\
 & a^4 - a\, b^3 \\
\hline
 & a^4 - a\, b^3 \maltese a^3 b - b^4 \\
\text{Seu} & a^4 \maltese a^3 b - a\, b^3 - b^4
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
\text{Diuidatur} & b f \dagger c f \dagger d f - b^2 - b c - b d & \dagger\, b f & \Big| \;\dagger\, b \\
\text{per } f - b & b f \dagger c f \dagger d f - b^2 - b c - b d & \dagger\;\; f & \Big| \\
 & \overline{\quad o \quad o \quad o \quad o \quad o \quad o \quad} & & \\
 & & \dagger\, c f & \Big| \;\dagger\, c \\
 & & \dagger\;\; f & \Big| \\
 & & \dagger\, d f & \Big| \\
 & & \dagger\;\; f & \Big| \;\dagger\, d
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
\text{Siue} & b f - b^2 \dagger c f - b c \dagger d f - b d & b \dagger c \dagger d \\
 & b f - b^2 \dagger c f - b c \dagger d f - b d & f - b \\
 & \overline{\quad o \quad o \quad o \quad o \quad o \quad o \quad} & \overline{- b^2 - b c - b d} \\
 & & b f \maltese c f \maltese d f \\
\hline
 & & b f \maltese c f \maltese d f - b^2 - b c - b d
\end{array}$$

Hæc

Hæc diuiſio facilè etiam conſtat, & ex ea oritur quotiens $b + c + d$.

Diuidatur $\quad a^3 c - a^3 d - b^3 c \dagger b^3 d \quad \dagger a^3 c \mid \dagger a^3 . - b^3 c \mid - b^3$

per $c - d$ $\quad a^3 c - a^3 d - b^3 c \dagger b^3 d \quad \dagger c \mid \dagger c \mid$

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

$$a^3 - b^3$$
$$c - d$$
$$- a^3 d + b^3 d$$
$$a^3 c - b^3 c$$
$$a^3 c - a^3 d - b^3 c + b^3 d$$

Non eſt, vt in hac diuiſione explicanda nos immoremur, cùm ex hactenus explicatis facilè conſtet, ſit autem quotiens $a^3 - b^3$.

Diuidatur $\quad a^3 - 3 a^2 b + 3 a b^2 - b^3 \quad - b^3 \mid + b^3 . + 2 a b^2 \mid - 2 a b$

per $a - b$ $\quad + a b^2 - b^3 \quad - b \mid - b \mid$

$$+ 2 a b^2$$
$$- 2 a^2 b + 2 a b^2 \qquad - a^2 b \mid + a^2$$
$$- b \mid$$
$$0$$

$$- a^2 b \qquad\qquad a^2 - 2 a b + b^2$$
$$a^3 - a^2 b \qquad\qquad a - b$$
$$0 \quad 0 \qquad\qquad - a^2 b + a b^2 - b^3$$
$$a^3 - a^2 b + a b^2$$

Productum $\quad a^3 - 3 a^2 b + 3 a b^2 - b^3$

Hæc diuiſio parit quotientem $a^2 - 2 a b + b^2$.

Diuidatur $\quad 9 d^4 + 12 d^3 e - 4 d e^3 - e^4 \mid - 3 d^2 e^2 . - e^4 \mid + e^2$

per $3 d^2 - e^2$ $\quad 9 d^4 + 12 d^3 e - 4 d e^3 - e^4 \mid - 3 d^2 e^2 . - e^2 \mid$

$$- 4 d e^3 \mid + 4 d e$$
$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \qquad - e^2 \mid$$
$$4 d e + 3 d^2 + e^2 \qquad - 3 d^2 e^2 \mid + 3 d^2$$
$$3 d^2 - e^2 \qquad - e^2 \mid$$

$$- 4 d e^3 - 3 d^2 e^2 - e^4$$
$$12 d^3 e + 9 d^4 + 3 d^2 e^2$$
$$9 d^4 + 12 d^3 e - 4 d e^3 - e^4$$

Diuidatur $d^4 - c^4 + 2\,b^2 d\,u + 2\,b^2 c\,u + b^2 d^2 - b^2 c^2$
per $d + c$ $\quad d^4 - c^4 + 2\,b^2 d\,u + 2\,b^2 c\,u + b^2 d^2 - b^2 c^2$

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & -c\,d^3 & + c^2 d^2 & - c^3 d & - b^2 c\,d & \\ & & + c^2 d^2 & - c^3 d & - b^2 c\,d & \end{array}$$

$$\frac{d^4}{d} \Big| \; d^3,\ \frac{-c\,d^3}{+d} \Big| \; -c\,d^2,\ \frac{+c^2 d^2}{+d} \Big| \; +c^2 d,\ \frac{-c^3 d}{+d} \Big| \; -c^3$$

$$\frac{+2\,b^2 d\,u}{+d} \Big| \; +2\,b^2 u,\ \frac{+b^2 d^2}{+d} \Big| \; +b^2 d,\ \frac{-b^2 c\,d}{+d} \Big| \; -b^2 c$$

Fiet quotiens $+ d^3 - c\,d^2 + c^2 d - c^3 + 2\,b^2 u + b^2 d - b^2 c$

Diuidatur $+ u^6 - 8\,u^4 - 124\,u^2 - 64$ $\qquad \frac{-64}{-16} \Big| +4$
per $u^2 - 16$ $\quad + u^6 + 8\,u^4 + 4\,u^2 - 64$

$$\begin{array}{cccc} 0 & -16\,u^4 & -128\,u^2 & 0 \\ & -16\,u^4 & -128\,u^2 & \\ & 0 & 0 & \end{array} \qquad \frac{-128\,u^2}{-16} \Big| +8\,u^2 \qquad \frac{-16\,u^4}{-16} \Big| +u^4$$

Fit quotiens $+ u^4 + 8\,u^2 + 4$

$$\begin{array}{rrrr} u^4 & + 8\,u^2 & + 4 & \\ & & u^2 & - 16 \\ \hline & -16\,u^4 & -128\,u^2 & -64 \\ u^6 & + 8\,u^4 & - 4\,u^2 & \\ \hline u^6 & - 8\,u^4 & -124\,u^2 & -64 \end{array}$$

Diuidatur $+u^6 + b^2 u^4 - 2\,c^2 u^4 - b^4 u^2 + c^4 u^2 - b^6 - 2\,b^4 c^2 - b^2 c^4 \;\Big|\; + 2\,b^2 c^2 u^2$
per $u^2 - b^2 - c^2$ $\quad +u^6 - b^2 u^4 - c^2 u^4 - 2\,b^4 u^2 + c^4 u^2 - b^6 - b^4 c^2 - b^2 c^4 \;\Big|\; + b^2 c^2 u^2$

$$\begin{array}{cccccc} 0 & + 2\,b^2 u^4 - c^2 u^4 + b^4 u^2 & 0 & 0 & - b^4 c^2 + & 0 \quad + b^2 c^2 u^2 \\ & + 2\,b^2 u^4 - c^2 u^4 + b^4 u^2 & & & - b^4 c^2 + & \quad + b^2 c^2 u^2 \\ \hline & 0 \quad 0 \quad 0 & & & 0 & 0 \end{array}$$

Quotiens $+ u^4 + 2\,b^2 u^2 - c^2 u^2 + b^4 + b^2 c^2$

$$\frac{+u^6}{+u^2} \Big| \; +u^4,\ \frac{+2\,b^2 u^4}{+u^2} \Big| \; +2\,b^2 u^2,\ \frac{-c^2 u^4}{+u^2} \Big| \; -c^2 u^2$$

$$\frac{+b^4 u^2}{u^2} \Big| \; +b^4,\ \frac{+b^2 c^2 u^2}{+u^2} \Big| \; +b^2 c^2$$

SCHOLION

SCHOLION.

Diligentiùs explicantur, quæ ſuperiùs tradita ſunt.

Quandoquidem ſuperiùs operationes nonnullas paulò breuiùs explicuimus; lubet hìc eaſdem explicare diligentiùs. Dicebamus, cum oportebat diuidere $a^2 - b^2$, per $a - b$, operationem eſſe ſic inſtituendam, vt nimirum diuidatur a^2, per a, proueniet enim in quotiente a, quo ducto in $a - b$, fit $a^2 - a\,b$, hoc autem ſubtracto ex $a^2 - b^2$, remanet $- b^2 + a\,b$, ſiquidem ſubtrahendo a^2 ex $a^2 - b^2$, cum oporteret ſubducere $a^2 - a\,b$; plus ſubtrahimus, quàm oportet; ob id fieri debet additio ipſius $a\,b$, ad id, vnde fit ſubtractio, & remanebit $- b^2 + a\,b$, perinde enim eſt ſubducere $a^2 - a\,b$, ex $a^2 - b^2$, ac eſt ſubtrahere a^2 ex $a^2 - b^2 + a\,b$; ab ipſo autem $- b^2 + a\,b$ ſubducere oportet $- b^2 + a\,b$, id videlicet, quod fit ex multiplicatione ipſius $a - b$, diuiſoris, per b, ſecundum terminum quotientis.

Rurſus ſuperiora explicantur.

Rurſus dictum fuit ſi $d^4 - c^4 + 2\,b^2\,d\,u + 2\,b^2\,c\,u + b^2\,d^2 - b^2\,c^2$, diuidatur per $d + c$, dictum eſt inquam oriri $+ d^3 - c\,d^2 + c^2\,d - c^3 + 2\,d^2\,u + b^2\,d - b^2\,c$; idque ex opere multiplicationis conſtat, vt in hoc cernitur Paradigmate.

$$
\begin{array}{r}
d^3 - c\,d^2 + c^2\,d - c^3 + 2\,b^2\,u + b^2\,d - b^2\,c \\
d + c \\
\hline
c\,d^3 - c^2\,d^2 + c^3\,d - c^4 + 2\,b^2\,c\,u + b^2\,c\,d - b^2\,c^2 \\
d^4 - c\,d^3 + c^2\,d^2 - c^3\,d + 2\,b^2\,d\,u + b^2\,d^2 - b^2\,c\,d \\
\hline
d^4 - c^4 + 2\,b^2\,d\,u + 2\,b^2\,c\,u + b^2\,d^2 - b^2\,c^2
\end{array}
$$

Alterius operationis explicatio.

Præterea iuuabit etiam explicare magis operationem ipſam, qua diuiſimus $d^4 - c^4 + 2\,b^2\,d\,u + 2\,b^2\,c\,u + b^2\,d^2 - b^2\,c^2$, per $d + c$, Primò diuidatur d^4, per d, & proueniet quotiens d^3, quo ducto in $d + c$, fiet $d^4 + c\,d^3$, hoc autem ſubtracto ex d^4, remanet $- c\,d^3$. Diuidatur hoc autem per d, & proueniet $- c\,d^2$, quo multiplicato per $d + c$, orietur $- c\,d^3 - c^2\,d^2$; hoc autem ſubtracto ex $- c\,d^3$, remanebit $+ c^2\,d^2$, diuidendum per d; factaque diuiſione proueniet $+ c^2\,d$, quo multiplicato per $d + c$, orietur $+ c^2\,d^2 + c^3\,d$, ſubtrahendum ex $+ c^2\,d^2$, vt remaneat $- c^3\,d$, quo diuiſo per $+ d$, fit quotiens $- c^3$; hoc autem multiplicato per $d + c$, proueniet $- c^3\,d - c^4$, & hoc ſubtracto ex $- c^3\,d$, remanet .o. & ſi $- c^4$, ſubtrahatur ex $- c^4$, remanebit .o. Deinde diuidatur $+ 2\,b^2\,d\,u$, per $+ d$, fit quotiens $2\,b^2\,u$, quo ducto in $d + c$, orietur $2\,b^2\,d\,u + 2\,b^2\,c\,u$, hoc autem ſubtracto ex $2\,b^2\,d\,u + 2\,c\,b^2\,u$, remanebit .o. Mox verò diuidatur $+ b^2\,d^2$, per $+ d$, proueniet quotiens $+ b^2\,d$, quo multiplicato per $d + c$, fiet $+ b^2\,d^2 + b^2\,c\,d$, quo ſubtracto ex $+ b^2\,d^2$, remanebit $- b^2\,c\,d$, diuidendum per $+ d$, qua facta diuiſione, proſiliet quotiens $- b^2\,c$; hoc autem multiplicato per $+ d + c$, orietur $- b^2\,c\,d - b^2\,c^2$, quo ſubtracto ex $- b^2\,c\,d - b^2\,c^2$, remanet .o.

$$
\begin{array}{llllll}
\text{Diuidatur} & a^3 + b^3 & \vert\; - a\,b^2 & \vert\; + a^2\,b & + b^3 & \vert\; + b^3 \\
\text{per } a + b & a^3 + b^3 & \vert\; - a\,b^2 & \vert\; + a^2\,b & + b & \vert \\
\hline
 & o \quad o & \quad o & \quad o & - a\,b^2 & \vert\; - a\,b \\
 & & & & + b & \vert
\end{array}
$$

Fiet

Fiet quotiens $a^2 - ab + b^2$

$$
\begin{array}{rl}
& a^2 - ab + b^2 \\
& \quad\ a + b \\
\hline
& a^2b - ab^2 + b^3 \\
a^3 - a^2b + ab^2 & \\
\hline
a^3 + b^3 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
+ a^2b & + a^2 \\
+ b &
\end{array}
$$

Hæc diuiſio ſi ab vltimo termino incipiatur, facilè conſtabit ex ijs, quæ dicta ſunt habita præ oculis doctrina ſignorum +, & −.

Diuidatur per $d - a$

$$
\begin{array}{c}
ad + db + cd - a^2 - ab - ac \\
ad + db + \ \ d - a^2 - ab - ac \\
\hline
0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
+ ad & + a \\
+ d & \\
+ bd & + b \\
+ d &
\end{array}
$$

Siue

$$
\begin{array}{c}
ad - a^2 + bd - ab + cd - ac \\
ad - a^2 + bd - ab + cd - ac \\
\hline
0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
+ cd & + c \\
+ d &
\end{array}
$$

Fiet quotiens $a + b + c$

$$
\begin{array}{r}
a + b + c \\
d - a \\
\hline
- a^2 - ab - ac \\
ad + bd + cd \qquad\quad \\
\hline
ad + bd + cd - a^2 - ab - ac
\end{array}
$$

Animaduerſis ijs, quæ ſuperiùs dicta ſunt, ſine difficultate hæc etiam diuiſio intelligetur.

Diuidatur per $c - d$

$$
\begin{array}{c}
a^2c - a^2d - b^2c + b^2d \\
a^2c - a^2d - b^2c + b^2d \\
\hline
0 \quad 0 \quad 0 \quad 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
+ ca^2 & a^2 \\
+ c & \\
+ b^2c & - b^2 \\
+ c &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
a^2 - b^2 \\
c - d \\
\hline
- a^2d + b^2d \\
a^2c - b^2c \qquad\quad \\
\hline
a^2c - a^2d - b^2c + b^2d
\end{array}
$$

Non eſt cur in hac diuiſione explicanda nos immoremur, cum ex hactenus traditis ſatis ſuperque conſtet.

$- a^2b$

$- a^2 b$, atque adeo $- 3 a^2 b - b^3$; à, reliquis vt ἀλλοίωσιν, parit in pragmatia, cum $a^3 - 3 a^2 b + 3 a b^2$, vt hic cernere licet; inſtituta multiplicatione quotientis in diuiſorem.

Ita pariter hic $- a^2 d - b^2 c$; cùm ſcilicet $a^2 - b^2$, per $c - d$, nempe quotiens per diuiſorem multiplicatur.

$$\begin{array}{rl} & a^2 - 2ab + b^2 \\ & \quad\;\; a - b \\ \hline & - a^2 b + 2ab^2 - b^3 \\ & a^3 - 2a^2 b + ab^2 \\ \hline \text{Productum} & a^3 - 3a^2 b + 3ab^2 - b^3 \end{array}$$

Cæterum illud eſt perpetuò obſeruandum, quod etiam ſuperiùs innuimus, vt quotientes ſinguli, in diuiſorem ducantur, productorum, vt à diuidendo ſubtractio fiat; Ita planè, vt aliquo vtar exemplo, cum diuidebatur $a^3 - 3 a^2 b + 3 a b^2 - b^3$, per $a - b$. Primò diuidebatur $- b^3$, per $- b$, quotiens erat $+ b^2$, duci debet in $a - b$, vt fiat $+ a b^2 - b^3$, quo ſubtracto ex $3 a b^2 - b^3$, remanet $+ 2 a b^2$, quo diuiſo per $- b$, fit $- 2 a b$, hoc verò ducto in $a - b$, fit $- 2 a^2 b + 2 a b^2$, quo ſubtracto ex $- 3 a^2 b + 3 a b^2$, remanet $- a^2 b$, hoc diuiſo per $- b$, fit quotiens $+ a^2$, hoc autem multiplicato per $a - b$, fit productum $a^3 - a^2 b$, quo ſubtracto ex $a^3 - a^2 b$, nihil remanet. *Quod in animaduerſione digna circa ſuperiora exempla.*

Non diſſimiliter, cum hìc diuiditur $a^2 c - a^2 d - b^2 c + b^2 d$; per $c - d$; fit quotiens $a^2 - b^2$, vt etiam ſuperiùs vidimus, & multiplicatione comprobatur. Primò enim diuiditur $+ a^2 c$, per $+ c$, & fit quotiens a^2, quo ducto in $c - d$, fit $a^2 c - a^2 d$, quo ſubtracto ex $a^2 c - a^2 d$, remanet o. Deinde diuiditur $b^2 c$, per $+ c$, & fit quotiens $- b^2$, quo ducto in $c - d$, diuiſorem fit productum $- b^2 c + b^2 d$, quo ſubtracto ex $- b^2 c + b^2 d$, remanet o, fit igitur quotiens $a^2 - b^2$, quod multiplicatione comprobatur. Placuit hæc iterum adnotare, vt ſuperiora exempla meliùs intelligantur. *Rurſus notanda circa pragmatiam ſuperiorum operationum.*

Diuidatur $9 d^4 + 12 d^3 c + 4 d e^2 + 6 d^2 e^2 + e^4 \quad \dfrac{+ e^4}{+ e^2} \Big| + e^2$ *Vide Scholion, quod ſequitur.*

per $3 d^2 + e^2$

Peracta operatione fit

$$\begin{array}{lrr} \text{Quotiens} & 4 d c + 3 d^2 + e^2 & \dfrac{+ 3 d^2 e^2}{+ e^2} \Big| + 3 d^2 \\ & + 3 d^2 + e^2 & \\ \hline & + 4 d e^2 + 3 d^2 e^2 + e^4 & \dfrac{+ 4 d e^2}{+ e^2} \Big| + 4 d e \\ & 12 d^3 c + 9 d^4 \;\; + 3 d^2 e^2 & \\ \hline \text{Productum} & 9 d^4 + 12 d^3 c + 4 d e^2 \; 6 d^2 e^2 + e^4 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Diuidatur} & d^4 - b^4 + 2 a^2 d y + 2 a^2 b y + a^2 d^2 - a^2 b^2 \;\Big|\; - b d^3 \;\Big|\; + b^2 d^2 \;\Big|\; - b^3 d \;\Big|\; - a^2 b d \;\Big| \\ \text{per } d + c & d^4 - b^4 + 2 a^2 d y + 2 a^2 b y + a^2 d^2 - a^2 b^2 \;\Big|\; - b d^3 \;\Big|\; + b^2 d^2 \;\Big|\; - b^3 d \;\Big|\; - a^2 b d \;\Big| \\ \hline & \text{o} \quad \text{o} \quad \text{o} \quad \text{o} \quad \text{o} \quad \text{o} \quad \text{o} \quad \text{o} \quad \text{o} \quad \text{o} \end{array}$$

Quotiens $+ d^3 - b d^2 + b^2 d^2 - b^3 + 2 a^2 y + a^2 d - a^2 b$

$$\dfrac{d^4}{d} \Big| \dfrac{d^3, - b d^3}{+ d} \Big| \dfrac{- b d^2. + b^2 d^2}{+ d} \Big| \dfrac{+ b^2 d. - b^3 d}{+ d} \Big| - b^3$$

$$\frac{+2a^3dy}{+d}\;\Big|\;+2a^3y.\frac{+a^3d^3}{+d}\;\Big|\;+a^3d.\frac{-a^3bd}{+d}\;\Big|\;a^3b$$

Diuidatur per y^2-16

$$\dagger y^6 - 8y^4 - 124y^2 - 64 \qquad \frac{-64}{-16}\;\Big|\;+4$$
$$\dagger y^6 \dagger 8y^4 \dagger 4y^2 - 64$$
$$0 \qquad 0$$
$$-16y^4 - 128y^2 - \qquad \frac{128y^2}{16}\;\Big|\;+8y^2$$
$$-16y^4 - 128y^2$$
$$0 \qquad 0 \qquad \frac{-16y^4}{-16}\;\Big|\;+1y^4$$

Quotiens $+y^4+8y^2+4$

$$y^4+8y^2+4$$
$$y^2-16$$
$$-16y^4-128y^2-64$$
$$y^6+8y^4-4y^2$$

Productum $y^6-8y^4-124y^2-64$

Diuidatur per $y^2-a^2-c^2$

$$\dagger y^6 \dagger a^2y^4 - 2c^2y^4 - a^4y^2 \dagger c^4y^2 - a^6\;2a^4c^2 - a^2c^4 \;\Big|\; +2a^2c^2y^2$$
$$\dagger y^6 - a^2y^4 - c^2y^4 - 2a^4y^2 \dagger c^4y^2 - a^6\;a^4c^2 - a^2c^4 \;\Big|\; +a^2c^2y^2$$
$$0 \qquad 0 \quad 0 \quad 0$$
$$\dagger 2a^2y^4 - c^2y^4 \dagger a^4y^2 \qquad a^4c^2 \qquad +a^2c^2y^2$$
$$\dagger 2a^2y^4 - c^2y^4 \dagger a^4y^2 \qquad a^4c^2 \qquad +a^2c^2y^2$$
$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

Quotiens $+y^4+2a^2y^2-c^2y^2+a^4+a^2c^2$

$$\frac{+y^6}{+y^2}\;\Big|\;+y^4\;\frac{+2a^2y^4}{+y^2}\;\Big|\;+2a^2y^2\;\frac{c^2-y^4}{\dagger y}\;\Big|\;-c^2y$$
$$\frac{\dagger a^4y^2}{\dagger y^2}\;\Big|\;+a^4\;\frac{+a^2c^2y^2}{+y^2}\;\Big|\;\dagger a^2c^2$$

Quia verò hæc inſeruire poſſunt ad intelligentiam Carteſianæ Geometriæ; proinde non pigebit aliud exemplum afferre, id quidem compertum, illudque eſto.

Diuidatur per $\div - \div f - f^2u^2 \dagger f^2u^2$

$$\dagger\div q - \div fq \dagger f^2u^2q - fu^2q - 4f^2u^4q \dagger 4f^2u^4q \;\Big|\; \dagger f^2u^2q$$
$$\dagger\div q - \div fq \dagger f^2u^2q - fu^2q - 4f^2u^4q \dagger 4f^2u^4q \;\Big|\; \dagger f^2u^2q$$

Quotiens $+q-4fu^2q$

$$\frac{+\div q}{+\div}\;\Big|\;+q \qquad \frac{-fu^2q}{+\div}\;\Big|\;-4fu^2q$$

$$\div - \div f - f^2u^2 + f^2u^2$$
$$+q-4+u^2q$$
$$-fu^2q+f^2u^2q+4f^2u^4q-4f^2u^2q$$
$$\div q - \div f\;q - f^2u^2q + f^2u^2q$$

Productum $\div q - \div fq + f^2u^2q - fu^2q - 4f^2u^4q + 4f^2u^4q$

Diuidatur

Diuidatur $\frac{1}{4}ab + \frac{1}{6}ac - \frac{1}{8}ad + \frac{1}{10}bf + \frac{1}{15}cf - \frac{1}{20}df$

per $\frac{1}{2}a + \frac{1}{5}f$ $\quad \frac{1}{4}ab + \frac{1}{6}ac - \frac{1}{8}ad + \frac{1}{10}bf + \frac{1}{15}cf - \frac{1}{20}df$

$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$

Seu $\frac{1}{4}ab + \frac{1}{10}bf + \frac{1}{6}ac + \frac{1}{15}cf - \frac{1}{8}ad - \frac{1}{20}df$

$\frac{1}{4}ab + \frac{1}{10}bf + \frac{1}{6}ac + \frac{1}{15}cf - \frac{1}{8}ad - \frac{1}{20}df$

$0 \quad 0 \quad 0$

Quotiens $\frac{1}{2}b + \frac{1}{3}c - \frac{1}{4}d$

$\frac{1}{2}b + \frac{1}{3}c - \frac{1}{4}d$

$+ \frac{1}{2}a + \frac{1}{5}f$

$\frac{1}{10}bf + \frac{1}{15}cf - \frac{1}{20}df$

$\frac{1}{4}ab + \frac{1}{6}ac - \frac{1}{8}ad$

Productum $\frac{1}{4}ab + \frac{1}{6}ac - \frac{1}{8}ad + \frac{1}{10}bf + \frac{1}{15}cf - \frac{1}{20}df$

Diuidatur $af + bf + cf - df + ef + ag + bg + cg + dg + eg$

per $f + g$

Quotiens $a + b + c - d + e$

$a + b + c - d + e$

$f + g$

$ag + bg + cg - dg + eg$

$af + bf + cf - df + ef$

$af + bf + cf - df + ef + ag + bg + cg - dg + eg$

Diuidatur $a^4c - a^4d + a^2b^2c - a^2b^2d$

per $a^2 + b^2$ $\quad a^4c - a^4d + a^2b^2c - a^2b^2d$

$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$

Quotiens $a^2c - a^2d$

Diuidatur $a^4c - a^4d + a^2b^2c - a^2b^2d$

per $a^2c - a^2d$ $\quad a^4c - a^4d + a^2b^2c - a^2b^2d$

$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$

Quotiens $a^2 + b^2$

Diuidatur $a^2cd - a^2d^2$

per $a^2c - a^2d$ $\quad a^2cd - a^2d^2$

$0 \quad 0$

Quotiens d

Diuidatur $a^2cd - a^2d^2$

per $cd - d^2$ $\quad a^2cd - a^2d^2$

$0 \quad 0$

Quotiens a^2

Digitized by Google

SCHOLION.

Nonnulla notanda circa diuiſione.

ADuertendum eſt circa diuiſionem ſuperiorem, cùm diuideremus $9d^4 \dagger 12d^3e \dagger 4de^3 \dagger 6d^2e^2 \dagger e^4$, per $3d^2 \dagger e^2$, ſic inſtituendam eſſe. Primò diuidatur $\dagger e^4$, per $\dagger e^2$, fiet quotiens $\dagger e^2$, quo ducto in $3d^2 \dagger e^2$, producitur $3d^2e^2 \dagger e^4$, ſubtrahendum ex diuidendo, remanet autem $9d^4 \dagger 12d^3e \dagger 4de^3 \dagger 3d^2e^2$. Mox verò diuidendum reſiduum $3d^2e^2$, per e^2, proueniet verò $3d^2$, qua ducto in $3d^2 \dagger e^2$, fit productum $9d^4 \dagger 3d^2e^2$, hoc autem ſubtracto ex reſiduo, remanet $12d^3e \dagger 4de^3$. At verò ſi diuidatur $4de^3$, per e^2, proueniet $4de$, quo multiplicato per $3d^2 \dagger e^2$, proueniet $12d^3e \dagger 4de^3$, quo ſubtracto ex $12d^3e \dagger 4de^3$, nihil remanet; atque hunc in modum ad finem operatio perducta eſt.

Operationis autem conſpectus ſic ſe habet.

$$\begin{array}{l|l}
9d^4 \dagger 12d^3e \dagger 4de^3 \dagger 6d^2e^2 \dagger e^4 & \dagger\ e^4 \mid \dagger\ e^2 \\
\qquad\qquad\qquad \dagger 3d^2e^2 \dagger e^4 & \dagger\ e^2 \\
\hline
\dagger 9d^4 \dagger 12d^3e \dagger 4de^3 \dagger 3d^2e^2 \quad 0 & \dagger 3d^2e^2 \mid \dagger 3d^2 \\
\qquad\qquad\qquad \dagger 3d^2e^2 & \dagger\ e^2 \\
\hline
\dagger 9d^4 \qquad\qquad \dagger 3d^2e^2 & 4de^3 \mid \dagger 4de \\
 & e^2 \\
\hline
0 \quad \dagger 12d^3e \dagger 4de^3 \quad 0 & \\
\quad \dagger 12d^3e \dagger 4de^3 & \\
\hline
\quad 0 \qquad 0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
3d^2 \dagger e^2 \\
e^2 \\
\hline
3d^2e^2 \dagger e^4 \\
3d^2 \dagger e^2 \\
3d^2 \\
\hline
9d^4 \dagger 3d^2e^2 \\
3d^2 \dagger e^2 \\
4de \\
\hline
12d^3e \dagger 4de^3
\end{array}$$

Quantitates ſunt diuidendæ, quæ modis prædictis diuiſionem non patiuntur, quid agendum.

Itaque operatio abſoluitur, vt hìc luculenter conſpicitur.

Quod ſi diuidendæ quantitates proponantur, quæ modis iam explicatis diuiſionem non patiantur, ſubſcribendus eſt diuiſor ipſi diuidendo, vt in fractionibus vulgaribus fieri conſueuit.

Si igitur ſit iniunctum diuidere b^2, per a, fiet quotiens $\frac{bb}{a}$. Item $b\,c$, per a, proueniet quotiens $\frac{bc}{a}$. Item $b\,d$, per a, fiet quotiens $\frac{bd}{a}$. Inſuper $b\,c\,d$, per a, proueniet quotiens $\frac{bcd}{a}$.

Si verò oporteat diuidere $b\,d \maltese d\,g$, per a, fiet quotiens $\frac{bd \maltese dg}{a}$. Quod ſi oporteat diuidere $a^2\,b$ pl. per $b \maltese d$, fiet quotiens $\frac{a^2 \maltese b\,pl.}{b \maltese d}$. Præterea ſi diuidere oporteat $b^2 - d^2$, per g, fiet quotiens $\frac{b^2 - d^2}{g}$, & ita de reliquis; foret enim inanis labor alia exempla percurrere.

Radicum

RADICVM EXTRACTIO.

Radicis extractio ſequitur perpendenda, atq; tractanda.

HVC etiam pertinet operatio illa, quæ Radicis extractio dici ſolet, quæ quidem operatio perſimilis eſt admodum illi, qua in vulgari Arithmetica ex propoſito numero radix erui ſolet. Quemadmodum a ductum in a, facit a^2, cuius latus dicitur eſſe a, ita ex a^2, ſi extrahatur radix prouenieta. Non diſſimiliter, cùm a^2, ductum in a, producit a^3, ita ex a^3, extracta radix erit a; Huc vſque de quantitatibus ſimplicibus. Hac de re tamen in ſequentibus redibit ſermo.

Primò, cùm quantitas eſt ſimplex. Quando quãtitas eſt compoſita, quo modo procedendum.

Quòd ſi quantitates compoſitæ fuerint, ex quibus radix extrahenda ſit, non diſſimili modo procedendum erit, ſe habet enim extractio radicis ſimplicis quantitatis quemadmodum extractio radicis ex numero, cuius radix vnius ſit figuræ, ſeu characteris; Extractio verò radicis ex quantitate compoſita, ſe habet, vt extractio radicis ex numero, cuius radix plurium ſit figurarum. Non igitur ſecus extrahenda eſt radix ex quantitate compoſita, quàm ex numero, cuius radix pluribus characteribus conſtet. Hæc tamen exemplis explicare iuuabit.

Exemplum affertur in declarationem extractionis radicis.

Iniunctum ſit latus quadratum extrahere ex $a^2 \dagger 2ab \dagger b^2$. Primò extrahenda eſt radix ex a^2, quæ quidem eſt a, quæ in ſe ducta quadraticè facit a^2, quo ſubtracto ex a^2, remanet o, deinde multiplicato a, per 2, fit 2 a, per quod diuidatur 2 a b, & fiet quotiens b, adſcribendus, priori radici inuentæ a., ſi verò ducatur 2 a, in b, fit 2 a b, quo ſubtracto ex † 2 a b, remanet o, multiplicetur verò b, in ſe, fiet $\dagger b^2$, quo ſubtracto ex $\dagger b^2$, remanet o, atque operatio ipſa ad finem perducta erit, ita vt radix quæſita ſit a † b.

EXEMPLVM.

Quadratum

$$\begin{array}{l} a^2 \dagger 2ab \dagger b^2 \\ a^2 \dagger 2ab \dagger b^2 \\ \hline o \quad o \quad o \\ \hline \text{Radix } a \dagger b \\ \hline \text{Diuiſor } 2a \end{array} \qquad \begin{array}{r} a \dagger b \\ a \dagger b \\ \hline ab \dagger b^2 \\ a^2 \dagger ab \quad \\ \hline a^2 \dagger 2ab \dagger b^2 \end{array}$$

Animaduertitur artificiũ extractionis in alÿs poteſtatibus.

Vides igitur qua arte ex compoſita quantitate quadrata radix extrahenda ſit; quod ſi propoſitum fuerit radicem quadratam eruere ex quantitate compoſita $a^4 - 2a^2b^2 \dagger b^4$, non diſſimili artificio procedendum erit. Primo extraho radicem ex a^4, eaque eſt a^2, quæ in ſe ducta facit a^4, quo ſubtracto ex a^4, remanet o. Deinde multiplicato a^2, per 2, fit $2a^2$, per quod diuido $-2a^2b^2$, & fit quotiens $-b^2$, ſubducendus priori radici inuentæ a^2, vt fiat $a^2 - b^2$. Hinc ſi ducatur $2a^2$, in b^2, fiet $2a^2b^2$, quo ſubtracto ex $2a^2b^2$, remanet o. At verò ſi b^2, in ſe quadraticè ducatur, fiet $\dagger b^4$, quo ſubtracto ex $\dagger b^4$, nihil remanet, eritque operatio ad finem perducta, vnde quæſita radix erit $a^2 - b^2$.

Exemplum cum poteſtates numerus afficiunt.

Propoſitum deinde ſit quadratam radicem extrahere, ex $36a^2 - 48a \dagger 16$. Extrahatur primò radix quadrata ex $36a^2$, eaque eſt 6 a, quæ in ſe ducta facit $36a^2$, quo ſubtracto ex $36a^2$, remanet o. Deinde multiplicetur 6 a, per 2, & prouenit 12 a, per quod diuidatur 48 a, & prouenit pro quotiente 4, ſubducendum ipſi

$6a$. Si verò ducatur $6a$, in $-4a$, fit $-48a$, quo ſubtracto ex $-48a$, remanet o. Si autem -4, ducatur in ſe quadraticè fit $+16$, quo ſubtracto ex $+16$ remanet o.

Quadratum

$$\begin{array}{l} 36a^2 - 48a + 16 \\ 36a^2 - 48a + 16 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \\ \hline \text{Radix } 6a - 4 \\ \hline \text{Diuiſor } 12a \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6a - 4 \\ 6a - 4 \\ \hline -24a + 16 \\ 36a^2 - 24a \quad \\ \hline 36a^2 - 48a + 16 \end{array}$$

Exemplum huiuſq; declaratio. Propoſitum ſit ex $a^2 + 2ab + b^2 + 2bc + 2ac + c^2$, radicem quadratam extrahere, extrahatur primò radix quadrata ex a^2, eaque eſt a, quæ in ſe ducta facit a^2, quo ſubtracto ex a^2, remanet o. Deinde ducatur a in 2, & fit $2a$, per quod diuidere oportet $2ab$, & fit quotiens b, quo addito ad a, radici prius inuentæ, fit $a + b$, mox verò ducatur $2a$, in b, & fit $2ab$, quo ſubtracto ex $2ab$, remanet o, at verò b, quadraticè in ſe ductum facit b^2, quo ſubtracto ex b^2, remanet o.

Deinde ducatur $a + b$, in 2, & fit $2a + 2b$, per quod oportet diuidere $2bc + 2ac$, & fit quotiens c, adſcribendus priori radici $a + b$, & fiet $a + b + c$; Si verò ducatur $2a + 2b$, in c, fiet productum $2ac + 2bc$; ſeu quod idem eſt $2bc + 2ac$; quo ſubtracto ex $2bc + 2ac$, nihil remanet; atque demum ducatur c, in ſe quadraticè, vt fiat c^2, quo ſubtracto ex c^2, remanet o, & ita ad finem erit operatio perducta, & radix erit $a + b + c$.

$$\begin{array}{l} a^2 + 2ab + b^2 + 2bc + 2ac + c^2 \\ a^2 + 2ab + b^2 + 2bc + 2ac + c \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ \hline \text{Radix } a + b + c \\ \text{Diuiſor primus } 2a \\ \text{Diuiſor ſecundus } 2a + 2b \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{Quadratum } a^2 \\ \qquad\qquad - \\ \text{Radix} \qquad a \end{array} \quad \begin{array}{r} a \\ \text{per } 2 \\ \hline 2a \end{array} \text{ primus diuiſor}$$

$$\text{per } \frac{a + b}{2} \qquad 2a + 2b \qquad \text{Secundus diuiſor}$$

Exemplum huiuſq; declaratio. Et conſimili quidem artificio procedendum erit in extractione cæterarum radicum; vnde ſi proponatur $a^2 + 2ab + b^2 - 2bc - 2ac + c^2$, Radix eruetur $a + b - c$.

Quando radix extrahenda eſt cubica. Quod ſi radix extrahenda ſit cubica ſuo modo etiam eruetur, obſeruatis præceptis iuxta exigentiam huiuſmodi poteſtatis.

Iniunctum igitur ſit radicem extrahere cubicam ex $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Primum oportet, cubicam radicem extrahere, ex a^3 cuius radix cubica eſt a, quæ ducta in ſe cubicè facit a^3, quo ſubtracto ex a^3, remanet o.

Deinde ducatur a^2, in 3, vt fiat $+ 3a^2$, per quod diuidere oportet $+ 3a^2b$, vt fiat quotiens $+ b$, mox verò ducatur $3a^2$, in b, vt fiat $3a^2b$, quo ſubtracto ex $3a^2b$, nihil remanet; deinde ducatur b^2, nempe quadratum ipſius b, in 3, vt fiat $3b^2$, quo multiplicato per a, radicem prius inuentam, fit $3ab^2$, quo ſubtracto ex $3ab^2$, remanet o. Deinde ducatur b, in ſe cubicè, vt fiat b^3, quo ſubtracto ex b^3, nihil remanet, & operatio ad finem perducta erit, ita vt quæſita radix ſit $a + b$.

Cubus

Cubus	$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$				$+ 3a^2b$ } $+ b$ quotus
	$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$				$+ 3a^2$ }
	o	o	o	o	
Radix	$a + b$				
Diuiſor	$3a^2$				

Vides igitur qua induſtria procedendum ſit in extractione, cubicæ radicis, ex compoſita quantitate propoſita.

Propoſitum ſit, radicem cubicam extrahere, ex $27a^3 + 54a^2 + 36a + 8$, primo eruatur radix cubica, ex $27a^3$, eaque erit $3a$, quæ cubicè ducta in ſe facit $27a^3$, quo ſubtracto, ex $27a^3$, nihil remanet. Sumatur autem $9a^2$, quadratum ex $3a$, cuius triplum eſt $27a^2$, per quod diuidatur $54a^2$, & proueniet quotiens 2, adſcribendus priori radici $3a$; ducatur autem 2, in $27a^2$, vt fiat $54a^2$, quo ſubtracto ex $54a^2$, remanet o; mox verò ducatur 2, in ſe quadraticè; vt fiat 4, quo ducto in $3a$, fiet $12a$, cuius triplum eſt $36a$, hoc autem ſubtracto, ex $36a$, nihil remanet, denique ducatur 2, in ſe cubicè, & fiet 8, quo ſubtracto ex 8, nihil ſupereſt, & Operatio ad finem erit perducta, ita, vt radix quæſita ſit $3a \dagger 2$.

Alterius cubica radicis extractio. Eius declaratio.

Non abſimili artificio, vtendum erit ad extrahendam radicem ex $8a^6 + 36a^4 + 54a^2 + 27$; primò enim oportet, radicem extrahere cubicam ex $8a^6$, quæ quidem eſt $2a^2$, quæ in ſe cubicè ducta facit $8a^6$, quo ſubtracto ex $8a^6$, remanet o. Quadratum verò ex $2a^2$, eſt $4a^4$, cuius triplum eſt $12a^4$, per quod ſi diuidatur $36a^4$, fit quotiens 3, mox verò multiplicetur $12a^4$, per 3, vt fiat $36a^4$, quo ſubtracto ex $36a^4$, nihil remanet. Deinde ſumatur 9, quadratum ex 3, illius autem triplum eſt 27, quo ducto, in $2a^2$, fiet $54a^2$, quo ſubtracto, ex $54a^2$, nihil remanet. Denique ducatur 3, in ſe cubice, vt fiat 27, quo ſubtracto, ex 27, remanet o, & Operatio ad finem erit perducta, ita, vt radix ſit quæſita $2a^2 + 3$.

Quando numeris affixa ſunt ſpecies quomodo ſit radicis extractio tractanda, & primò quando radix extrahenda eſt quadratica.

Propoſitum ſit, ex $27a^6 - 54a^5 + 90a^4 - 80a^3 + 60a^2 - 24a + 8$, primò eruatur cubica radix ex $27a^6$, eaque eſt $3a^2$, quæ in ſe cubicè ducta facit $27a^6$, quo ſubtracto ex $27a^6$, nihil remanet. Deinde ſumatur $9a^4$, quadratum ex $3a^2$, radice iam inuenta, & accipiatur eius triplum cuiuſmodi eſt $27a^4$, eritque primus diuiſor, per quem oportet diuidere $- 54a^5$, vt fiat quotiens $- 2a$, aſcribendus priori radici; mox verò ducatur $27a^4$, in $- 2a$, & proueniet $- 54a^5$, quo ſubtracto ex $- 54a^5$, remanet o.

Quando radix eſt cubica extractionis declaratio quãdo radix eſt cubica.

Deinde ducatur $- 2a$ in $- 2a$, quadraticè in ſe, vt fiat $+ 4a^2$, quo ducto in $+ 3a^2$, radicem priùs inuentam, fit $+ 12a^4$, cuius triplum eſt $36a^4$, quo ſubtracto ex $+ 90a^4$, remanet $+ 54a^4$. Poſtea ducatur $- 2a$, in ſe cubicè, vt fiat $- 8a^3$, quo ſubtracto, ex $- 80a^3$, remanet $- 72a^3$. Nunc verò ducatur in ſe quadratice $3a^2 - 2a$, vt fiat $9a^4 - 12a^3 + 4a^2$, cuius triplum eſt $27a^4 - 36a^3 + 12a^2$, eritqua ſecundus diuiſor, per quem ſi diuidatur $+ 54a^4$ &c. fiet quotiens $+ 2$, adſcribendus priori radici $3a^2 - 2a$. Ducatur autem $27a^4 - 36a^3 + 12a^2$, in 2, vt proueniat $54a^4 - 72a^3 + 24a^2$, quo ſubtracto ex $54a^4 - 72a^3 + 60a^2$, remanet $36a^2$. Deinde ducatur 2, quadraticè in ſe, vt fiat $+ 4$, quo multiplicato per $+ 3a^2 - 2a$, radicem prius inuentam, proueniet $+ 12a^2 - 8a$, cuius triplum eſt $+ 36a^2 - 24a$, quo ſubtracto ex $+ 36a^2 - 24a$, nihil remanet. Denique ducatur idem $+ 2$, in ſe cubicè, vt fiat $+ 8$, quo ſubtracto ex $+ 8$, remanet o. Ita vt ad finem perducta ſit Operatio, & quæſita radix ſit $3a^2 - 2a + 2$.

Sequitur operatio.

Cubus $27a^6 - 54a^5 + 90a^4 - 80a^3 + 60a^2 - 24a + 8$ Cubus $27a^6$

$27a^6 - 54a^5 + 36a^4 - 8a^3 + 24a^2 - 24a + 8$ Radix $3a^2$

$0 \quad 0 \quad + 54a^4 - 72a^3 + 36a^2 \quad 0 \quad 0$

$+ 54a^4 - 72a^3 + 36a^2$

$0 \quad 0 \quad 0$

$3a^2$
$3a^2$

$9a^4$
3

Radix $3a^2 - 2a + 2$ $27a^4$ primus diuiſor

Primus diuiſor $27a^4$

Secundus diuiſor $27a^4 - 36a^3 + 12a^2$

$-54a^5 \mid -2a$ quotus primus
$\dagger 27a^4$

$+27a^4$
$-2a$
$-54a^5$

$-2a$
$-2a$
$+4a^2$
$+3a^2$
$+12a^4$

$-2a$
$-2a$
$+4a^2$
$-2a$
$-8a^3$

$3a^2 - 2a$
$3a^2 - 2a$
$-6a^3 + 4a^2$
$9a^4 - 6a^3$
$9a^4 - 12a^3 + 4a^2$.

per 3 — $36a^4$. 3 — diuiſor ſecundus $27a^4 - 36a^3 + 12a^2$

$+94a^4 \mid +2$ quotus ſecundus
$+27a^4$

$27a^4 - 36a^3 + 12a^2$
2
$54a^4 - 72a^3 + 24a^2$

$+2$
$+2$
$+4$
$+3a^2 - 2a$
$+12a^2 - 8a$
3
$+36a^2 - 24a$

$+2$
$+2$
$+4$
$+2$
$+8$

Inſinuatur idem eſſe adhibendum artificium, cum compoſita quantitas fuerit cuiuſque alterius generis.

Ex hactenus explicatis cuique licebit aduertere modum extrahendi cubicam radicem, ex propoſita quantitate, quæ compoſita ſit, & ex dictis exploratum itidem erit, qua arte eruenda ſit radix cuiuſcunque generis, ex propoſita, quæ compoſita ſit quantitate.

Quando compoſita quantitas huiuſmodi fuerit, vt modo artificioſo radix non poſſit.

At ſi quantitates ex quibus extrahenda eſt radix huiuſmodi fuerint, vt radix modo prædicto inueniri non poſſit, deſignabitur ipſa præfigendo propoſitis quantitatibus ſignum, ſeu characterem ℞ adſcribendo, illi notam poteſtatis iuxta naturam quæſitæ radicis. Vt ad extrahendam quadratam radicem, ex a b, ſcribitur ℞ Q a b, quo ſymbolo indicatur quadratam radicem ex a b, extractam eſſe, vel extrahendam adhuc; Ita pariter ℞ Q ($a^2 \dagger b^2$), vel ℞ Q $\overline{a^2 + b^2}$, ſignificabit radicem quadratam, ex $a^2 + b^2$.

Exemplum ad id m declarandum.

Præterea ad extrahendam radicem cubicam ex a^2 b, ſcribo ℞ Q a^2 b. Item ℞ C ($a^3 - b^3 + a b^2$), ſeu ℞ C $\overline{a^3 - b^3} \; \overline{+ a b^2}$, ſignificabit radicem cubicam, ex $a^3 - b^3 + a b^2$.

✠ a b^3. Ita etiam ℞ C (a^3 ✠ a b^2 ✠ d^3), ſeu $\overline{\text{℞ C } a^3 \text{ ✠ } a b^2 \text{ ✠ } d^3}$, denotabit radicem cubicam ex a^3 ✠ a b^2 ✠ d^3.

Aduerte autem quotieſcunque ſigno ℞, non apponitur character alter per, illud ſignificari radicem quadratam, & quidem breuitatis cauſa ad de notandam huiuſmodi radicem ſolus hic adhibetur character neglecto Q. *Notandum.*

S C H O L I O N.

REdeuntes autem ad ſuperiora illud ſupereſt adnotandum non diſſimili artificio erui poſſe latus quadratum ex plurinomio a^2 † 2 a b † b^2 – 2 a c – 2 b c † c^2; eius enim latus erit a † b – c. Hoc autem ſuperiùs etiam innuimus.

a^2 † 2 a b † b^2 – 2 a c – 2 b c † c^2
a^2 † 2 a b † b^2 – 2 a c – 2 b c † c^2

o o o o o o

Radix b † b – c
Primus diuiſor 2 a
Secundus diuiſor 2 a † 2 b

a † b – c
a † b – c

– a c – b c † c^2
a b † b^2 – b c
a^2 † a b – a c

a^2 † 2 a b † b^2 – 2 a c – 2 b c † c^2

Et animaduerſis ſignis †; & –, operando vt in ſuperioribus factum fuit; elicietur radix quadrata a † b – c.

Cæterùm ſi quiſpiam velit adhibere vt à nobis fieri ſolet pro vtroque ſingulari latere ſpecies a, & e; conſueuimus enim ad binomiam radicem conſtituendam è duobus ſingularibus lateribus ſiue radicibus, conſueuimus inquam, vti commemoratis ſpeciebus; itaque ſi propoſitum fuiſſet radicem eruere quadratam ex a^2 † 2 a e † e^2, non ſecus eſt procedendum ac ſuperiùs fecimus conantes radicem quadratam eruere ex a^2 † 2 a b † b^2; nihil enim refert vtra ſit ſpecies, eadem enim ſunt obſeruanda præcepta. *Poteſt quiſpiã ad libitum adhibere has, vel illas ſpecies vnde, vti poteris a, & e, pro ſingularibus lateribus.*

Sed hac de re iterum redibit ſermo in ſequentibus; vbi multa de radicis extractione dicemus. Præſertim cùm quantitates ſunt irrationales. *De his iterum in ſequentibus redibit ſermo.*

Algori-

Algorithmus Fractarum Magnitudinum.

CAPVT V.

SATIS iam dictum fuit de Algorithmo integrarum, tam ſimplicium, quàm compoſitarum magnitudinum, nunc reliquum eſt, vt breuiter de fractionibus loquamur.

Fractarum magnitudinum Notatio, ac Valor.

Magnitudines fractæ, quæ dicantur.

MAgnitudines fractæ dicuntur illę, quæ vnitate ſunt minores. Ipſius autem fractionis notatio, eſt recta eius ſcriptio, ac pronunciatio. Fit autem interpoſita virgula inter numeratorem, atque denominatorem. Numerator eſt magnitudo, ſupra virgulam exiſtenr.

Numerator fractionis quid. Denominator item quid ſit.

Denominator autem infra. Numerator eſt illa ſuperior magnitudo ita dicta, quod ſignificet, ſeu numeret acceptas partes in quas totum eſſe diuiſum intelligitur.

Denominator eſt magnitudo quidem inferior denominans integrum diuiſum in totidem æquales partes.

Tradita doctrina numeris explicatur.

Hæc autem numeris abſolutis facilè poſſunt explicari. Supponamus igitur fractionem $\frac{2}{3}$, hæc planè ſignificat duas tertias partes vnius integri; huius autem fractionis denominator eſt 3, ſignificans integrum in tres æquales partes fuiſſe diuiſum. Numerator autem eſt 2, ſignificans ex illis partibus tribus duas acceptas fuiſſe.

Eadem ſpeciebus quomodo tractanda ſint.

Sit fractio $\frac{aſ}{r}$, numerator eſt a ſ, denominator eſt r. Sit fractio $\frac{dr+bſ}{r+ſ}$, cuius numerator eſt d r † b ſ, denominator autem r † ſ. Cæterùm animaduertendum eſt in fractionibus applicarionis legem ſeruari, vt altiores nimirum depreſſioribus applicentur; atq; adeo ſi ſit a, longitudo, eique applicetur planum, ſcilicet b pl. fiet fractio $\frac{b\,pl.}{a}$. Longitudo autem longitudini nequit applicari. Sed hac de re nos inferiùs agemus. Omnes autem demonſtrationes, quæ de fractionibus confici ſolent, hìc in medium adducere ſuperuacaneum duximus, cùm illæ, quæ ſunt numeris explicatæ ſpeciebus etiam accomodari poſſint. Fractionum iſtarum operationes perſimiles ſunt ijs, quæ in numeris fieri ſolent. Ipſas autem hìc breuiter cùm ſuis demonſtrationibus afferemus, initium ducentes ab Additione.

Demonſtrationes omittuntur, cum eadem, quæ in numeris adhibentur ſpeciebus aptari poſſint.

Quædam primò aduertuntur circa quantitatum fractiones.

Nonnulla adnotanda.

IN gratiam dicendorum illud oportet aduertere, nimirum quod ſupereſſicit multiplicatio, illud idem à diuiſione, applicationeque reſolui. Dum in applicatione magnitudo, tam altior, quàm depreſſior ducitur in eandem magnitudinem, eo magnitudinis opere ex applicatione ortiuæ, generi, vel valori nihil additur, vel detrahitur,

Digitized by Google

tur. quoniam quod ſuperefficit multiplicatio illud idem diuiſio reſoluit, quamobrem $\frac{ab}{b}$, idem eſt quod a; & $\frac{a^2 b}{b}$, idem eſt ac a pl. ſi enim b, ducatur in a, fiet a b, at verò ſi a b, diuidatur per b fiet $\frac{ab}{b}$; idem eſt autem $\frac{ab}{b}$, ac eſt a &c.

Notanda quędam.

Animaduertendum eſt autem per fractionem quamcunque deſignari perpetuò diuiſionem aliquam eſſe faciendam, nimirum quantitatum illarum, quæ numeratoris vice funguntur per quantitates videlicet, quæ tanquam denominatores ſe habent; quo fit, vt ſi numerator fuerit denominatori æqualis, tunc per fractionem illam vnitas deſignetur. Ita quidem ſit $\frac{a^2}{a^2}$, per hanc fractionem vnitas deſignabitur, quemadmodum ſi foret $\frac{b^2}{b^2}$. Item $\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}$. Vel etiam $\frac{a^2+ab}{a^2+ab}$. Sæpe ſæpius euenit, vt exempligratia a^2, vel a b, item $a^2 + b^2$, vel $a^2 - b^2$ &c. in formam fractionis deſignare debeamus.

Quando aliqua quantitas integra in fractionis formã proponi debeat.

Tunc non aliud agendum eſt, quàm ſymbolum vnitatis ſubſcribere hunc in modum $\frac{a^2}{1}$ · $\frac{ab}{1}$ $\frac{a^2+b^2}{1}$ $\frac{a^2-b^2}{1}$ &c. Quoniam verò non raro contingit, vt quantitas aliqua, puta a, in fractionis formam deſignari debeat, cuius denominator ſit præſcripta quantitas, verbigratia b; tunc oportet multiplicare a, per b, vt producatur a b, cui ſubſcribatur b, vt $\frac{ab}{b}$. Idem eſt enim $\frac{ab}{b}$, ac eſt a. Ita quoque ſi deberet a deſignari in fractionis formam, cuius denominator ſit a + b; multiplicetur a + b, per a, vt fiat $a^2 + a b$; cui ſubſcribatur a + b; idem enim erit $\frac{a^2+ab}{a+b}$, ac eſt a.

Quando eſt integra quantitas cum fractione, & ad formam fractionis reuocari debeat quid agendum.

Non diſſimili modo integra quantitas cum fractione ad vnius fractionis formam redigitur; Vt ſi ſit $a + \frac{a^2}{b}$; & oporteat huic æquiualentem fractionem vnam exhibere; multiplicetur a, per b, nempe integra quantitas per denaminatorem fractionis, & producetur a b, addatur per ſymbolum additionis +, ipſi numeratori vt fiat numerator integer $a b + a^2$, vnde fiat $\frac{ab+a^2}{b}$, ſeu quod idem eſt $\frac{a^2+ab}{b}$, & hæc fractio æquabitur $a + \frac{a^2}{b}$. Ita quoq; ſit fractio $\frac{a^2}{b-f} - a$. Hæc ad vnius fractionis formam redacta ſic ſe habebit nimirum $\frac{a^2-ab+af}{b-f}$. Hæc autem $a + d - \frac{a^2+b^2}{g}$, ad hanc reuocabitur nempe $\frac{ag+dg-a^2-b^2}{g}$. Hæc verò $a + b + \frac{a^2+b^2}{a-b}$, ad hanc reuocabitur $\frac{2a^2}{a-b}$. Et hæc $a + b + \frac{a^2-b^2}{a+b}$, ad hanc redigetur $\frac{a^2+2ab+b^2+a^2-b^2}{a+b}$, hoc eſt $\frac{2a^2+2ab}{a+b}$.

Quod eſt in primis aduertendum.

Illud autem non eſt ſilentio prætereundum, quod ſi habeatur fractio $\frac{a^2}{b^2}$, productum eſſe a^2, ſi nimirum $\frac{a^2}{b^2}$, multiplicetur per b^2, de his tamen inferius tractantes de multiplicatione. Ex dictis autem facilè conſtat quod principaliter erat intentum.

Fractionum Reductio ad Simpliciores.

Qua arte hæc operatio perficiatur.

HÆc Operatio hunc in modum perficitur. Sit fractio $\frac{a^2 b}{b d}$, quam ad ſimpliciorem formam oporteat reuocare. Elidatur communis littera b, tàm in numeratore, quàm in denominatore exiſtens, & fiet $\frac{a^2}{d}$. Ita etiam ſi abbreuiari debeat hæc fractio $\frac{ab^2}{abd}$, elidantur literæ a, b, hoc eſt de medio auferatur a b, diuidendo nimirum $a b^2$, & a b d, per a b, & fiet $\frac{b}{d}$. Non diſſimili modo, vt abbreuiemus $\frac{a^2 b - a^2 d}{bd - d^2}$, procedendum eſt; diuidatur $a^2 b$, per b d, & orietur $\frac{a^2}{d}$; ad hanc igitur ſuperior eſt reuocata quod plane conſtat opere multiplicationis; ſi enim $\frac{a^2}{d}$, multiplicemus per $b d - d^2$, producetur $a^2 b - a^2 d$.

Exemplum ad id illuſtrãdum.

Si ſit fractio $\frac{a^2 b - a^2 d - b f^2 + d f^2}{bd - d^2}$, reducetur ad hanc $\frac{a^2 - f^2}{d}$. Si enim diuidatur $a^2 b$, per b d, prouenict $\frac{a^2}{d}$, quo ducto in $b d - d^2$, orietur $a^2 b - a^2 d$. Deinde ſi diuidatur $- b f^2$, per b d, orietur $\frac{f^2}{d}$, hoc enim ſi ducatur in $b d - d^2$, orietur $- b f^2 + d f^2$.

Exemplum alterum.

Data ſit fractio $\frac{a^2 b - a^2 d - abd + ad^2}{bd - d^2}$, reuocanda ad ſimpliciorem, & ad hanc redigetur videlicet $\frac{a^2}{d} - a$; ſeu quod idem eſt ad hanc $\frac{a^2 - ad}{d}$. Etenim $a^2 b - a^2 d$, ſi diuidatur per $b d - d^2$, fit $\frac{a^2}{d}$, & præterea ſi diuidatur $- a b d + a d^2$, per $b d - d^2$, fiet $- a$, quod multiplicatione comprobabitur; ſi enim $b d - d^2$, multiplicetur per $\frac{a^2}{d}$, fiet $a^2 b - a^2 d$; ſi verò multiplicetur $- a$, per $b d - d^2$, fiet $- a$

$b\,d - a\,d^2$. Rurſus propoſita ſit fractio $\frac{a^2f - a^2b - bdf + b^2d}{bf - b^2}$, ad ſimpliciorem reducenda, & quidem ad hanc reuocabitur $\frac{a^2}{b} - d$. Si enim diuidatur $a^2f - a^2b$, per $bf - b^2$, fiet quotiens $\frac{a^2}{b}$, ſi verò diuidatur $- bdf + b^2d$, per eundem diuiſorem fiet quotiens $- d$, quod opere multiplicationis planè confirmabitur. Si proponatur fractio $\frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}$, reducetur ad hanc $\frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}$. Quandoquidem ſi diuidatur $a^3 - b^3$, per $a^2 - b^2$, prouenict $ab^2 - b^3$. Deinde ipſe diuiſor $a^2 - b^2$, diuidatur per $ab^2 - b^3$, quod nimirum ex diuiſione ſuperfuerat, & fiet quotiens $\frac{a}{b^2} + \frac{1}{b}$; ex qua diuiſione nihil ſupereſt. Diuidatur igitur $a^3 - b^3$, & præterea $a^2 - b^2$, per $ab^2 - b^3$; & priori quidem illo diuiſo, fiet primo $\frac{a^2}{b^2} + \frac{a}{b} + 1$, pro numeratore; ſecundo fiet $\frac{a}{b^2} + \frac{1}{b}$; inſtituta porro multiplicatione per b^2, fractio illa $\frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}$, ad hanc reuocata erit $\frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}$.

Comprobatio ſupradictorū, Cæterùm ſi multiplicetur $\frac{a^2}{b^2} + \frac{a}{b} + 1$, per b^2, tanquam numerator producetur quidem $a^2 + ab + b^2$. Et inſuper ſi multiplicetur $\frac{a}{b^2} + \frac{1}{b}$, per idem b^2, producetur $a + b$; quod facile conſtat; nam primo ſi $\frac{a^2}{b^2}$, ducatur in b^2, fit productum a^2; Deinde ſi per idem ducatur $\frac{a}{b}$, fiet $\frac{ab^2}{b}$. Hoc eſt ab, ex $+$, autem in $+$, fit $+$. Si demum multiplicetur $+ 1$, per $+ b^2$, fit b^2, quamobrem productum erit $a^2 + ab + b^2$, & quidem numerator.

Exemplum. Deinde ſi multiplicetur $\frac{a}{b^2} + \frac{1}{b}$, per idem b^2 fiet $a + b$, pro denominatore.

Sit propoſita fractio $\frac{a^3 - ab^2}{a^2 + 2ab + b^2}$. Diuidatur $a^3 - ab^2$, per $a^2 + 2ab + b^2$; & quidem ſi inſtituatur diuiſio, fiet quotiens a; Sed hoc neglecto curandum eſt de reliquo, nimirum $- 2a^2b - 2ab^2$, per quod diuidatur $a^2 + 2ab + b^2$, & fiet quotiens $- \frac{1}{2b} - \frac{1}{2a}$, quod facile conſtabit ſi nos multiplicemus $- 2a^2b - 2ab^2$, per $- \frac{1}{2b} - \frac{1}{2a}$; reperiemus enim produci $a^2 + 2ab + b^2$. Nihil autem ex hac ſupereſt diuiſione. Diuidatur numerator $a^3 - ab^2$; atque denominator $a^2 + 2ab + b^2$, per $- 2a^2b - ab^2$, & fiet $- \frac{a}{2b} + \frac{1}{2}$, numerator; erit autem $- \frac{1}{2b} - \frac{1}{2a}$, denominator; quod ſi vtrunque multiplicemus per $2ab$, fiet $\frac{-a^2 + ab}{-a - b}$, ſeu $\frac{a^2 - ab}{a + b}$. Cæterum ſi diuidatur

$a^3 - ab^2$
$a^2 + 2a^2b + b^2$
———————
$- 2a^2b - 2ab^2$
———————
$a^2 + 2ab + b^2$
a
———————
$a^3 + 2a^2b + ab^2$

id quod ſupra dicebamus $a^2 + 2ab + b^2$, per $- 2a^2b - ab^2$, conſtat fieri $- \frac{1}{2b} - \frac{1}{2a}$, quandoquidem hoc, nimirum $- \frac{1}{2b} - \frac{1}{2a}$, eueniet, ſi membrum vtrunq; diuidatur iuxta Artis præcepta; namq; dum diuidimus $+ a^2$, per $- 2a^2b$, fiet quotiens $- \frac{1}{2b}$ vt infra. Ad aliam diuiſionem quod attinet. Si nos diuidamus $+ a^2$, per $- 2a^2b$, fit quotiens $- \frac{1}{2b}$, ſi multiplicetur enim $- 2a^2b$, per $- \frac{1}{2b}$, fiet productum $+ a^2$. Deinde ſi diuidatur $- ab^2$, per $- 2ab^2$, fit quotiens $+ \frac{1}{2}$; Si enim multiplicemus $\frac{1}{2}$ per $- 2ab^2$, fiet $- ab^2$, & ita de alia diuiſione ſilicet ipſius $a^2 + 2ab + b^2$, per $- 2a^2b - ab^2$; Si enim diuidamus $+ a^2$, per $- 2a^2b$, fiet quotiens $\frac{1}{2b}$, ex horum enim multiplicatione, fit $+ a^2$, mox autem $+ b^2$, ſi diuidatur per $- 2ab^2$, fiet $- \frac{1}{2a}$.

Superiora explicantur. Ita etiam de ſuperiori illo exemplo loquentes dum contenderemus abbreuiare $\frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}$, & dicebamus ad hanc reuocari $\frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}$, idque facile declarabitur, & comprobabitur. Si enim $a^3 - b^3$, diuidatur per $a^2 - b^2$, remanebit ex diuiſione, hoc nimirum $ab^2 - b^3$. Si hoc autem reſiduo, vtamur tanquam diuiſore ad diuidendum $a^2 - b^2$, fiet quotiens $\frac{a}{b^2} + \frac{1}{b}$, & diuiſio nihil relinquiet. Diuidatur $a^3 - b^3$,

& inſuper $a^3 - b^3$, per $a b^2 - b^3$, & quidem ſi $a^3 - b^3$, diuidatur per $a b^2 - b^3$, fiet $\frac{a^2}{b^2} + \frac{a}{b} + 1$, idque plane conſtat ex opere multiplicationis; ſi enim multiplicemus $a b^2 - b^3$, per $\frac{a^2}{b^2} + \frac{a}{b} + 1$, comperiemus produci $a^3 - b^3$. Deinde ſi diuidatur $a^2 - b^2$, per idem $a b^2 - b^3$, reperiemus pro quotiente $\frac{a}{b^2} + \frac{1}{b}$, id, quod conſtat ex eo, quia ſi multiplicemus $a b^2 - b^3$, per $\frac{a}{b^2} + \frac{1}{b}$, reperiemus produci $a^2 - b^2$. Ita etiam ſi diuidatur $a^2 - b^2$, per $a b^2 - b^3$, comperiemus quotientem fieri $\frac{a}{b^2} + \frac{1}{b}$. Si enim multiplicemus $\frac{a}{b^2} + \frac{1}{b}$, per $a b^2 - b^3$, producetur $a^2 - b^2$; id autem euidententer conſtabit ex adiuncto paradigmate.

Hæc autem magnopere ſunt aduertenda.

$$a^3 - b^3$$
$$a^2 - b^2$$
$$a$$
$$\overline{}$$
$$a^3 - a b^2$$
$$a^3 - b^3 + 0$$
$$a^3 - a b^2$$
$$\overline{}$$
$$0 \; a b^2 - b^3$$
$$\overline{}$$
$$a^2 - b^2$$
$$a b^2 - b^3$$
$$\overline{}$$
$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{a}{b} + 1$$
$$a b^2 - b^3$$
$$\overline{}$$
$$-\frac{a^2 b^3}{b^2} - \frac{a b^3}{b} - b^3$$
$$\frac{a^3 b^2}{b^2} + \frac{a^2 b^2}{b} + a b^2$$
$$\overline{}$$
$$a^3 - b^3$$

$$\frac{a}{b^2} + \frac{1}{b}$$
$$a b^2 - b^3$$
$$\overline{}$$
$$-\frac{a b^3}{b^2} - \frac{b^3}{b}$$
$$\frac{a^2 b^2}{b^2} + \frac{a b^2}{b}$$
$$\overline{}$$
$$a^2 - b^2$$

Deinde quod attinet ad ea, quæ ſecundo loco circa fractiones adnotauimus $\frac{a^2}{a^2}$, ſignificat 1; ita ſi ſit $\frac{b^3}{b^3}$, idem erit quod 1; & ita de reliquis intelligendum eſt. Ad reductionem quod attinet, qua nimirum fractiones ad ſimpliciores reducuntur. Eſto fractio $\frac{a^2 b}{b d}$, fiet reductio elidendo b; ac proinde reuocabitur ad hanc $\frac{a^2}{d}$; ſi verò ſit $\frac{a^2 c}{c^2}$, reducetur ad hanc $\frac{a^2}{c}$. Si verò ſit $\frac{a b^3}{a b d}$, elidendo a, reuocabitur ad $\frac{b^3}{b d}$, & rurſus ad $\frac{b^2}{d}$. Vel primò, & ſimul elidendo a b; diuidendo ſcilicet $a b^3$, & $a b d$, per $a b$, fiet $\frac{b^2}{d}$. Si proponatur $\frac{a^2 b + a^2 d}{b d + d^2}$, reuocabitur ad hanc $\frac{a^2}{d}$. Fit igitur diuidendo $a^2 b$, per $b d$; & ita de cæteris. Si namq; proponeretur $\frac{a^2 c + a^2 d}{c d + d^2}$, diuidatur $a^2 c$, per $c d$, orietur $\frac{a^2}{d}$. Quod ſi multiplicetur per $c d + d^2$, producetur $a^2 c + a^2 d$; quamobrem illa fractio $\frac{a^2 c + a^2 d}{c d + d^2}$, ad minores terminos reducta erit $\frac{a^2}{d}$. Præterea ſi proponeretur $\frac{a^2 c - a^2 d - b^2 c + b^2 d}{c d - d^2}$. Diuidatur $a^2 c$, per $c d$, & proueniet $\frac{a^2}{d}$. Hoc autem ſi multiplicetur per $c d - d^2$, fiet $a^2 c - a^2 d$; deinde diuidatur $-b^2 c$, per $c d$, & proueniet $-\frac{b^2}{d}$; hoc autem ſi multiplicetur per $c d - d^2$, proueniet $-b^2 c + b^2 d$; ac proinde illa fractio erit ad hanc reuocata $\frac{a^2 - b^2}{d}$. Et ſi proponeretur $\frac{a^3 c d^2 - a^3 d^3 - b^3 c d^2 + b^3 d^3}{c d^2 - d^3}$, reducetur artificio non diſſimili ad hanc $a^3 - b^3$.* Inſuper ſi foret propoſita fractio $\frac{a^3 c^2 d - a^3 d^3 - b^3 c^2 d + b^3 d^3}{c^2 d^2 - d^4}$, reduceretur ad hanc $\frac{a^3 - b^3}{d}$. Si verò eſſet $\frac{a^3 c - a^3 d - b^3 c + b^3 d}{c d - d^2}$. Si procedatur iuxta Artis præcepta reducetur ad hanc $\frac{a^3 - b^3}{d}$. Si proponatur $\frac{a^3 c + a^3 d + b^3 c + b^3 d}{c + d}$, reuocaretur ad iſtam $\frac{a^3 + b^3}{1}$; hoc eſt ad iſtud integrum $a^3 + b^3$. Quod ſi foret $\frac{a^3 c d^2 + a^3 d^3 + b^3 c d^2 + b^3 d^3}{c d^2 + d^3}$, reuocaretur ad iſtam $a^3 + b^3$; & ſi præterea eſſet $\frac{a^3 c^2 d + b^3 c^2 d f - a^3 f^3 - b^3 f^4}{c^2 d - f^3}$, reducaretur ad iſtam, hoc eſt $a^3 + b^3 f$.

Hic adnotanda ſunt quædam circa ſuperius dicta.

**Si numerator enim diuidatur per d^2, fit quotiens, & numerator nouæ fractionis $a^3 c - a^3 d - b^3 c + b^3 d$, ſi diuidatur denominator per idem d^2, fit quotiens, & denominator nouæ fractionis $c - d$, rurſus facta vtriuſque diuiſione per $c - d$, fit $a^3 - b^3$.*

Si proponeretur $\frac{a^3 c - a^3 d - a c d + a d^2}{c d - d^2}$; reduceretur ad hanc $\frac{a^3 - a d}{d}$; ſeu quod idem eſt $\frac{a^3}{d} - a$. Præterea ſi foret $\frac{a^3 - a b^2}{a^2 + 2 a b + b^2}$, reduceretur ad hanc $\frac{a^2 - a b}{a + b}$, idque patet ex dictis alibi. Inſuper ſi foret $\frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}$, reduceretur ad $\frac{a^2 + a b + b^2}{a + b}$. Nec diſſimili modo fractio iſta $\frac{a^4 - b^4}{a^2 + a b}$, reuocatur ad hanc $\frac{a^3 - a^2 b + a b^2 - b^3}{a}$, quod ex eo euidenter colligitur, quod fra-

Aliud proponitur exemplum.

 ctiones

ctiones tunc æquales ſunt, cum ſi fuerint per crucem multiplicatæ, hoc eſt numerator vnius in denominatorem alterius, & contra, æqualia producunt.

$$\frac{a^4 - b^4}{a^2 + ab} \times \frac{a^3 - a^2 b + a b^2 - b^3}{a}$$

$$\begin{array}{l} a^4 - b^4 \\ \quad + a \\ \hline a^5 - a b^4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a^3 - a^2 b + a b^2 - b^3 \\ a^2 + a b \\ \hline a^4 b - a^3 b^2 + a b^3 - a b^4 \\ a^5 - a^4 b - a^3 b^2 - a^2 b^3 \\ \hline a^5 - a b^4 \end{array}$$

Si foret

$$\frac{a^3 + a^2 b^2 + a^2 bdg + a b^2 g + b^3 g + b^2 d g^2}{a^2 g + b^2 g + dbg^2 - a^2 f - b^2 f - bdfg}$$

Reducetur ad hanc $\frac{a^2 + bd}{g - f}$, communis autem diuiſor eſt $a^2 + b^2 + bdg$.

Exemplum ad idem oſtendendum. Neque diſſimili arte fractionem iſtam $\frac{a^3 - 36a}{a^2 + 12a + 36}$, ad ſimpliciorem reducemus, nimirum ad hanc $\frac{a^2 - 6a}{a + 6}$. Diuidatur primò $a^3 - 36a$, per $a^2 + 12a + 36$, & fiet quotiens a, vnde poſt diuiſionem ſupereſt diuiſor, nempe $-12a^2 - 72a$. Deinde diuidatur $a^2 + 12a + 36$, per $-12a^2 - 72a$, fiet quotiens $-\frac{1}{12} - \frac{1}{2a}$; modò cum nihil ex diuiſione ſuperſit, diuidatur $a^3 - 36a$, & etiam $a^2 + 12a + 36$, per $-12a^2 - 72$ a, prioris autem diuiſionis quotiens erit $-\frac{a}{12}$ † $\frac{1}{2}$ pro numeratore; poſterioris autem diuiſionis quotiens erit $-\frac{1}{12} - \frac{1}{2a}$, pro denominatore; vtrumque multiplicetur per 12 a, & fiet $\frac{-a^2 + 6a}{-a - 6}$, commutatiſque ſignis fiet $\frac{a^2 - 6a}{a + 6}$.

Diuidatur $a^3 - 36a$
per $-12a^2 - 72a$
———
Orietur $-\frac{a}{12}$ † $\frac{1}{2}$

Diuidatur a^2 † $12a$ † 36
per $-12a^2 - 72a$
———
Orietur $-\frac{1}{12} - \frac{1}{2a}$

$$\begin{array}{l} -12a^2 - 72a \\ -\frac{a}{12} + \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{12a^2}{2} - \frac{72a}{2} \\ \frac{12a^3}{12} + \frac{72a^2}{12} \\ \hline a^3 - 36a \text{ productum} \end{array} \qquad \begin{array}{l} -12a^2 - 72a \\ -\frac{1}{12} - \frac{1}{2a} \\ \hline -\frac{12a^2}{2a} + \frac{72a}{2a} \\ \frac{12a^2}{12} - \frac{72a}{12} \\ \hline a^2 + 12a + 36 \text{ productum} \end{array}$$

Exemplum alterum. Præterea ſi proponeretur fractio ad ſimpliciorem reuocanda $\frac{a^3 - 9a}{a^2 + 6a + 9}$, eodem artificio ad hanc reduceretur $\frac{a^2 - 3a}{a + 3}$.

Hæc eadem operatio optimè etiam perficitur, inuentis diuiſoribus tam numeratoris, quàm denominatoris, quemadmodum fieri ſolet in minutijs vulgarium numerorum, quamobrem ſi proponeretur fractio $\frac{a^3 - a b^2}{a^2 + 2ab + b^2}$, ad hanc facile reduci poterit $\frac{a^2 - ab}{a + b}$, ſiquidem $a^3 - a b^2$, numerator ſcilicet fractionis diuidi poteſt per a † b, & quidem inſtituta diuiſione proſilit in quotiente $a^2 - ab$; Si autem denominator a^2 † $2ab$ † b^2, diuidatur quemadmodum diuidi poteſt per a † b, fiet quotiens a † b; quamobrem fractio illa ad hanc reuocata erit $\frac{a^2 - ab}{a + b}$.

Idem alio illuſtratur exemplo. Nec diſſimili modo propoſita hæc fractio $\frac{a^2 b - a^2 d}{bd - d^2}$, reuocabitur ad hanc, ſcilicet $\frac{a^2}{d}$; quandoquidem ſi tam $a^2 b - a^2 d$, numerator, quàm $bd - d^2$, denominator diuidatur per communem diuiſorem b − d, ex diuiſione numeratoris orietur quotiens a^2, ex diuiſione verò denominatoris proueniet d, quo fit, vt fractio illa ad hanc ſit reuocata $\frac{a^2}{d}$.

Propoſita

Propoſita ſit fractio $\frac{a^3 - b^3}{a^3 - b^2}$, ad hanc reducetur, nempe $\frac{a^2 - b^2}{a - b}$, quandoquidem ſi $a^3 - b^3$, diuideretur per a † b, fieret quotiens $a^2 - b^2$, eritque numerator fractionis quæſitæ. Si verò diuidatur denominator $a^2 - b^2$, per eundem diuiſorem a † b, proueniet quotiens a † b; atque adeo fractio illa propoſita reuocabitur ad hanc $\frac{a^2 - b^2}{a - b}$, etiam ſi eadem ſuperiori methodo ad hanc $\frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}$, reuocata fuerit, ſunt autem hæ duæ fractiones $\frac{a^2 - b^2}{a - b}$, & $\frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}$, inter ſe æquales. *Exemplum alterum.*

S C H O L I O N.

Quoniam ſuperiùs dictum fuit fractionem $\frac{a^2 b + a^2 d}{bd + d^2}$, ad minimos terminos reuocatam, fieri hanc $\frac{a^2}{d}$, non erit abs re ſi id demonſtratione explicemus; quamobrem eſto. *Declarantur ſuperiora, & ad id Theorema inſtituitur.*

THEOREMA.

SI fuerit fracta magnitudo $\frac{a^2 b + a^2 d}{bd + d^2}$, & elidantur b, & d, tam ex numeratore, quàm ex denominatore, vt remaneat fractio $\frac{a^2}{d}$. Dico fractionem ipſam $\frac{a^2}{d}$, ſuperiori fractioni $\frac{a^2 b + a^2 d}{bd + d^2}$, eſſe æqualem. *Theorema inſigne.*

Quoniam enim elidendo b, & d, ex numeratore nos diuidimus illud per b † d. Idem eſt enim a^2 b † a^2 d, ac eſt productum ex b † d, in a^2. Dum itaque eliduntur b, & d, ſeu quod idem eſt b † d, diuidimus a^2 b † a^2 d, per b † d. Item elidendo b, & d, ex denominatore, nos diuidimus illud per b † d, idem eſt enim b d † d^2, ac eſt productum ex b † d, in d; Si itaque elidatur b † d, diuiditur b d † d^2, per b † d. At verò in quacumque fractione diuiſis numeratore, & denominatore per communem diuiſorem, fractio proueniens eſt priori æqualis; per communem enim illam diuiſionem non immutatur proportio numeratoris ad denominatorem, & fractiones æquales ſunt, in quibus eadem eſt proportio numeratoris ad denominatorem. Quare ſi fuerit fracta magnitudo &c. Quod oportebat oſtendere.

Præterea illud etiam oportet aduertere. Quando fuerit data fractio $\frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}$, ad hanc reducitur $\frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}$. Si enim diuidatur $a^3 - b^3$, per $a^2 - b^2$, fiet quotiens a, quo ducto in $a^2 - b^2$, fiet $a^3 - a b^2$, quo ſubtracto ex $a^3 - b^3$, remanet † a $b^2 - b^3$, quo tanquam diuiſore oportet diuidere $a^2 - b^2$, & fiet quotiens $\frac{a}{b^2}$ ✠ $\frac{1}{b}$. Si enim ſit $\frac{a^2 - b^2}{ab^2 - b^3}$. Diuiſo primo membro per a, fiet $\frac{a}{b^2}$; at verò ſi —, diuidatur per —, fit †; deinde diuiſo ſecundo membro, ſcilicet $\frac{b^2}{b^3}$, per b^2, fit † $\frac{1}{b}$; quamobrem proueniet quantitas $\frac{a}{b^2}$ ✠ $\frac{1}{b}$, vt dicebamus. *Notandum.*

Præterea dictum ſuperiùs fuit. Si diuidatur $a^3 - b^3$, per a $b^2 - b^3$, fieri quotientem $\frac{a^2}{b^2}$ † $\frac{a}{b}$ † 1; nec immeritò. In huius Veritatis gratiam eſto. *Notandum.*

THEOREMA.

EAdem eſt proportio $a^3 — b^3$, ad a $b^2 — b^3$, quæ eſt $\frac{a^2}{b^2}$ ✠ $\frac{a}{b}$ ✠ 1, ad poſitam. *Theorema præclarum.*

Præſtat autem hæc ad numeros transferre.

Datis

Digitized by Google

Datis duabus, pluribuſue quantitatibus, ſiuè ſimplicibus, ſiue compoſitis; minimam quantitatem, quæ per ipſas ſine reliquo diuidi poſsit, reperire.

Per multiplicationem decuſſatim factâ, optimè fit reductio fractionum ad eandem denominationem. Breuiorem viam tamen calcare expedit. Exemplum.

ETiam ſi fractionum reductio ad eandem denominationem optimè perficiatur per multiplicationem in crucem; nihilominus cum plerumque producta quidem expurgatione indigeant; proindeexpedit breuiorem viam calcare, qualis eſt illa, quam in præſentiarum aggredimur. Datæ igitur ſint duæ quantitates $a^2 b$, $b d$, & oporteat minimam quantitatem reperire, quæ diuiſibilis ſit per prædictas ſine reliquo; conſtituantur $a^2 b$, & $b d$, in formam fractionis hoc modo $\frac{a^2 b}{b d}$, hæc autem fractio ad ſimpliciorem redigatur, nimirum ad $\frac{a^2}{d}$. His autem ita diſpoſitis $\frac{a^2 b}{b d} \times \frac{a^2}{d}$; nunc inſtituatur multiplicatio per crucem, & eadem quantitas proueniet ex multiplicatione $a^2 b$, per d, atque ex $b d$, per a^2, ex vtraque enim multiplicatione conſurgit $a^2 b d$, & hæc erit minima quantitas quæſita, quæ nimirum ſine reliquo diuidi poteſt per $a^2 b$, & $b d$.

Aliud exemplum ad idē.

Datæ ſint duæ quantitates $a^2 b - a^2 d$, & $b d - d^2$; oporteat autem minimam quantitatem reperire, qnæ per quantitates prædictas ſine reliquo diuiſibilis ſit. Diſponantur illæ duæ quantitates datæ, vt ſe habeant per modum fractionis hoc pacto $\frac{a^2 b - a^2 d}{b d - d^2}$, quæ quidem reuocari debet ad ſimpliciorem, cuiuſmodi eſt $\frac{a^2}{d}$; His autem iuxta ſe poſitis hoc modo $\frac{a^2 b - a^2 d}{b d - d^2} \times \frac{a^2}{d}$; multiplicatis igitur decuſſatim, fiet quantitas quæſita $a^2 b d - a^2 d^2$, minima ſcilicet, quæ diuidi poſſit per $a^2 b - a^2 d$, & $b d - d^2$.

Aliud exemplum ad idē.

Datæ quoque ſint duæ quantitates $a^4 - b^4$, & $a^2 + a b$; oporteat autem minimam quantitatem reperire per quantitates prædictas ſine reliquo diuiſibilem. Diſponantur, vt fractionem conſtituant $\frac{a^4 - b^4}{a^2 + a b}$, quæ ad ſimpliciorem reducetur talem $\frac{a^3 - a^2 b + a b^2 - b^3}{a}$; facta multiplicatione per crucem proueniet $a^5 - a b^4$; eritq; $a^5 - a b^4$, quantitas quæſita.

Quando contingit aliqua litera variatio quid agendum.

Sic etiam variata aliqua litera procedetur; nihil enim refert, num vna, vel alia adhibeatur litera, dummodo gradus ſcalares ijdem retineantur. Si igitur foret $a^2 c + a^2 d$, quantitas vna, & alia $c d - d^2$, & indaganda eſſet quantitas minima diuiſibilis procedatur non diſſimili modo; forent enim quantitates illæ diſponendæ ad modum fractionis hoc pacto $\frac{a^2 c + a^2 d}{c d + d^2}$, quæ ad ſimpliciorem reuocata erit $\frac{a^2}{d}$; inſtitutaque multiplicatione per crucem proueniet minima quantitas quæſita $a^2 c d + a^2 d^2$. Ita ſi proponeretur inueſtiganda minima quantitas diuiſibilis per $a^4 - c^4$, illa ſiquidem eſſet $a^5 - a c^4$.

Aliud exemplum cum ſpecies numeros afficiunt.

Si verò quæratur minima quantitas diuiſibilis per $a^3 - 36 a$, & $a^2 + 12 a + 36$, diſponantur ad modum fractionis, vt vides $\frac{a^3 - 36 a}{a^2 + 12 a + 36}$, quæ quidem fractio reuocari debet ad primitiuam iuxta præcepta ſuperiùs tradita, & proueniet $\frac{a^2 - 6 a}{a + 6}$. Deinde inſtituta multiplicatione per crucem fiet quantitas quæſita $a^4 + 6 a^3 - 36 a^2 - 216 a$.

$$\frac{a^3 - 36 a}{a^2 + 12 a + 36} \times \frac{a^2 - 6 a}{a + 6}$$

Ita quoque propoſitis duabus quantitatibus $a^3 - 25 a$, & $a^2 + 10 a + 25$, quantitas reperietur $a^4 + 5 a^3 - 25 a^2 - 125 a$.

Quando ſunt plures duabus.

Quandoq; verò poſſunt eſſe plures duabus exempligratia tres; tunc oportet reperire minimam quantitatem diuiſibilem per duas ex illis; deinde ſi hæc inuenta fuerit diuiſibilis ſine reliquo per tertiam, factum erit quod oportet. Si autem reperiatur minima diuiſibilis ſine reliquo per hanc inuentam, & illam tertiam. Quia verò non raro accidit quantitates datas ad ſimpliciores reduci non poſſe. Tunc oportet vnam

in aliam ducere; productum enim quantitas erit quæſita, Vt ſi foret $a^2 - ab$, & $a + b$. Diſponantur in modum fractionis $\frac{a^2 - ab}{a + b}$, hæc primitiua eſt, neque reducibilis, ad ſimpliciorem; multiplicentur inter ſe, & fiet $a^3 - ab^2$, quantitas quæſita.

Qua Arte fractiones ad eandem denominationem reuocentur.

Vtiliſſima hæc eſt operatio qua fractiones ad eandem denominationem reuocantur.

HÆc operatio vtiliſſima eſt, eaque facilè ex dictis hactenus conſtare poterit. Propoſitę ſint fractiones $\frac{b^2 d}{a^2 f}$, & $\frac{a^3}{d f}$. Primò quærenda eſt minima quantitas, quæ diuidi poſſit per denominatores $a^2 f$, & $d f$; hæc autem erit $a^2 d f$, quæ tamquam communis denominator inſeruiet; ad inueniendos autem numeratores diuidatur inuentus denominator $a^2 d f$, per $a^2 f$, & per $d f$, ſingulos nimirum denominatores datos, & quotientes videlicet d, & a^2, multiplicentur per numeratores $b^2 d$, & a^3, propoſitarum fractionum vt quæſiti numeratores conſurgant $b^2 d^2$, & a^5, erunt igitur fractiones à nobis quæſitæ $\frac{b^2 d^2}{a^2 d f}$, & $\frac{a^5}{a^2 d f}$. Sint fractiones datæ $\frac{b^4}{a^2 f - a^2 d}$, & $\frac{a^3 + b^3}{d f - d^2}$. Oporteat has fractiones ad eandem denominationem reuocare; inueniatur minima quantitas diuiſibilis per $a^2 f - a^2 d$, & $d f - d^2$, quæ quidem quantitas erit $a^2 d f - a^2 d^2$, deinde diuidatur $a^2 d f - a^2 d^2$, per $a^2 f - a^2 d$, & $d f - d^2$; quotientes autem d, & a^2, multiplicentur per numeratores b^4, & $a^3 + b^3$, fient autem fractiones $\frac{b^4 d}{a^2 d f - a^2 d^2}$, & $\frac{a^5 + a^2 b^3}{a^2 d f - a^2 d^2}$. Quæ vt melius percipiantur adhibitis ijſdem præceptis aliqua mutata ſpecie idem perſequemur. Proponatur fractiones $\frac{b^2 d}{a^2 c}$, & $\frac{a^3}{c d}$, quas oporteat ad eandem denominationem reuocare. Inuenta quantitate minima diuiſibili quidem per $a^2 c d$, & hæc eadem erit communis denominator. Deinde diuidatur hic denominator $a^2 c d$, per $a^2 c$, & $c d$, quotientes autem d, & a^2, ducantur in numeratores illarum fractionum, nempe $b^2 d$, & a^3, vt habeantur numeratores $b^2 d^2$, & a^5; eruntque fractiones quæſitæ $\frac{b^2 d^2}{a^2 c d}$, & $\frac{a^5}{a^2 c d}$. Præterea oporteat reducere $\frac{b^4}{a^2 c - a^2 d}$, & $\frac{a^3 + b^3}{c d - d^2}$, ad eandem denominationem. Reperiatur communis denominator iuxta regulas præſcriptas, erit $a^2 c d - a^2 d^2$; quandoquidem ſi duæ quantitates $a^2 c - a^2 d$, & $c d - d^2$, diſponantur in modum fractionis, fiet $\frac{a^2 c - a^2 d}{c d - d^2}$, quæ quidem fractio ad ſimpliciorem hanc $\frac{a^2}{d}$ redigetur, tum verò multiplicatione inſtituta per crucem comparabitur $a^2 c d - a^2 d^2$, tamquam minima quantitas diuiſibilis per $a^2 c - a^2 d$, & $c d - d^2$, ſine reliquó eritque communis denominator. Hæc igitur quantitas $a^2 c d - a^2 d^2$, diuidatur per $a^2 c - a^2 d$, & $c d - d^2$. Ex priori diuiſione oritur quantitas d, ex poſteriori verò a^2; modò multiplicetur b^4, numerator fractionis $\frac{b^4}{a^2 c - a^2 d}$, per d, & a^2, multiplicetur per $a^3 + b^3$, numeratorem fractionis illius $\frac{a^3 + b^3}{c d - d^2}$, & his multiplicationibus peractis eodem denominatore retento habebimus fractiones $\frac{b^4 d}{a^2 c d - a^2 d^2}$, & $\frac{a^5 + a^2 b^3}{a^2 c d - a^2 d^2}$, eiuſdem denominationis, ad quas fractiones, illas redigere contendebamus.

Quando fractiones ſunt plures duabus qua methodo procedendum.

Quod ſi fractiones fuerint plures duabus non diſſimili modo procedetur.

Si propoſitæ forent fractiones $\frac{216}{a^3 - 36 a}$, & $\frac{a^2 - 36}{a^2 + 12 a + 36}$, quas ad eandem denominationem redigere velimus. Diſponantur $a^3 - 36 a$, & $a^2 + 12 a + 36$, ad modum fractionis; vt nimirum fractio iſta $\frac{a^3 - 36 a}{a^2 + 12 a + 36}$, reuocetur ad ſimpliciorem ac primitiuam ſuam $\frac{a^2 - 6 a}{a + 6}$, inſtitutaque multiplicatione per crucem, comperiemus minimam quantitatem diuiſibilem per illas ſine reliquo eſſe $a^4 + 6 a^3 - 36 a^2 - 216 a$; atque communis denominator, qui diuidatur per $a^3 - 36 a$, & $a^2 + 12 a + 36$, & quotientes ex diuiſione orti, nempe $a - 6$, & $a^2 - 6 a$, multiplicentur per numeratores propoſitarum fractionum, & fient $216 a + 1296$, & $a^4 - 36 a^2 + 216 a$, eruntque numeratores, eodemque denominatore retento; nempe $a^4 + 6 a^3 - 36 a^2 - 216 a$, erunt fractiones iſtæ $\frac{216 a + 1296}{a^4 + 6 a^3 - 36 a^2 - 216 a}$, & $\frac{a^4 - 36 a^2 + 216 a}{a^4 + 6 a^3 - 36 a^2 - 216 a}$.

Nec diſſimiliter fractiones iſtas $\frac{125}{a^3 - 25 a}$, & $\frac{a - 5}{a^2 + 10 a + 25}$, ad has eiuſdem denominationis reuocabimus $\frac{125 a + 625}{a^4 + 5 a^3 - 25 a^2 - 125 a}$, & $\frac{a^3 - 10 a^2 + 25 a}{a^4 + 5 a^3 - 25 a^2 - 125 a}$.

Additio

Digitized by Google

Additio Fractarum Magnitudinum.

OPERATIO PRIMA.

Fractarum magnitudinũ additio fit non ſecus ac in minutijs vulgaribus.

HÆc fractarum magnitudinum additio non ſecus fit, ac in minutijs vulgarium numerorum. Oportet igitur diſtinguere; vel enim ſunt fractiones denominationis eiuſdem, vel diuerſæ; Quando fractiones eiuſdem denominationis extiterint; oportet earum numeratores addere, ſummæque collectæ communem denominatorem ſubſcribere. Oporteat $\frac{a^3}{d}$, addere ad $\frac{b^3}{d}$, ſumma fractionum iſtarum erit $\frac{a^3 + b^3}{d}$, & ita de conſimilibus. Quamobrem ſi fuerit $\frac{a^2 b}{b + d}$, addenda ad $\frac{a^2 d}{b + d}$, fiet ſumma $\frac{a^2 b + a^2 d}{b + d}$, ſeu quod idem eſt a^2, & ita in conſimilibus. Vt ſi $\frac{a^2 d}{d + f}$, oporteret addere ad $\frac{a^2 f}{d + f}$, fieret ſumma $\frac{a^2 d + a^2 f}{d + f}$, ſeu quod idem eſt a^2. Oporteat $\frac{b^3 + a^3}{d + f}$, addere ad $\frac{d^3 + f^3}{d + f}$, fiet ſumma $\frac{b^3 + a^3 + d^3 + f^3}{d + f}$.

Quando fractiones ſunt eiuſdem denominationis.

Quando fractiones ſunt denominationis diuerſæ.

Si verò eſſent fractiones huiuſmodi $\frac{bd}{b + d}$, $d + \frac{b^2}{b + d}$; $g - \frac{d^2}{b + d}$, fieret ſumma $g \maltese \frac{2bd + b^2}{b + d}$, cui ſi deberet addi $a \maltese \frac{a^2}{b + d}$, fieret ſumma $a + g + \frac{2bd + a^2}{b + d}$.

Si verò fractiones diuerſæ denominationis fuerint oportet primò illas ex præceptis iam traditis ad eandem denominationem reducere, quo facto procedendum erit, vt paulò antea dictum fuit. Si igitur ad $\frac{apl.}{b}$, addere deberemus $\frac{bz}{d}$, fieret ſumma $\frac{apl.d + b^2 z}{bd}$. Secundò ſi ad $\frac{apl.}{b}$, addere oporteret $\frac{z^2}{g}$, fieret ſumma $\frac{apl.g + z^2 b}{bg}$. Præterea ſi $\frac{z^2}{d}$, addere oporteret ad $\frac{apl.}{b}$, fieret ſumma $\frac{apl.d + bz^2}{bd}$. Inſuper ſi addere deberemus ad $\frac{a^3}{b^4}$; $\frac{a^3 - a^2 b}{a^3 + a b}$; $\frac{a^2 - b^2}{a^4 + a^2 b^2}$; ac demum $\frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}$, fiet ſumma $\frac{a^9 - 2 a^8 b + 2 a^7 b^2 + \dots - 3 a^5 b^4 + a^3 b^5 - a^2 b^7 + b^9}{a^6 + a^2 b^4}$.

Ad maiorem intelligentiã, quædam hic afferuntur.

Quæ vt melius intelligantur. Supponamus fractionem $\frac{a^2}{3}$, addendum alteri $\frac{b^2}{3}$, fiet ſumma $\frac{a^2 + b^2}{3}$. Et ſi ſit $\frac{a^2}{b}$, & addi debeat ad $\frac{c^2}{b}$, fiet ſumma $\frac{a^2 + c^2}{b}$. Si verò fuerit $\frac{2ab}{b + c}$, addenda quidem huic $\frac{2ac}{b + c}$, fiet $2ab + 2ac$, ſeu $2a$, & ita de conſimilibps.

Quando fractiones denominationis diuerſæ.

Quod ſi fractiones fuerint denominationis diuerſæ procedendum vt ſupra dictum fuit. Quamobrem ſi forent fractiones addendæ $\frac{b^2 d}{a^2 c}$, & $\frac{a^2}{cd}$. Primò quærenda eſt quantitas diuiſibilis per denominatores $a^2 c$, & $c d$, ea verò eſſet $a^2 c d$, tamquam communis denominator; deinde indagentur numeratores vt ſupra docuimus, & euadent illæ fractiones addendæ $\frac{b^2 d^2}{a^2 c d}$, & $\frac{a^4}{a^2 c d}$, harum autem fractionum ſumma erit $\frac{b^2 d^2 + a^4}{a^2 c d}$. Ita quoque ſi forent fractiones addendæ $\frac{b^4}{a^2 c} - a^2 d$, & $\frac{a^4 + b^4}{cd - d^2}$, fieret ſumma $\frac{b^4 d + a^4 + a^2 b^4}{a^2 c d} - a^2 d^2$. Item ad addendum $\frac{a^7}{a^4 - b^4}$; $\frac{a^3 - a^2 b}{a^2 + ab}$; $\frac{a^3 - b^3}{a^4 + a^2 b^2}$; & $\frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}$, prouenie ſumma quidem $\frac{a^7 - 2 a^6 b + 2 a^5 b^2 - 3 a^4 b^3 + a^3 b^4 - 2 a^2 b^5 + b^7}{a^6 + a^2 b^4}$. Præterea ſi addere oporteat $\frac{a^2 b}{a^3 - 25 a}$, ad $\frac{a - 25}{a^2 + 10 a + 25}$, prouenie $\frac{a^3 - 50 a^2 + 25 a + 625}{a^4 + 5 a^3 - 25 a^2 - 125 a}$.

Demonſtratio additionis.

Demonſtratio ſic ſe habet.

Sinto fractiones A B, C D, ducatur autem B, quidem in C, vt fiat E. Deinde multiplicetur D, per A, vt fiat F, mox autem in vnam ſummam colligantur G, & multiplicetur B, per D, vt fiat H; ita vt eueniat ſumma G H. Quoniam ergo B, multiplicans ſingulas quantitates C, D, facit ſingulas E, H; erit vt C, ad D; ita E, ad H, &c.

A	$apl.$		C	z^2
B	b		D	g
E	$b z^2$		F	$apl.g$
H	$b g$		H	$b g$
G	$apl.g + b z^2$			
H	$b g$			

Rurſus quoniam D, multiplicans ſingulas quantitates A, B, facit ſingulas F, H; erit

ſicut,

Digitized by Google

ſicut A, ad B, ita F, ad H, quare quantitas E H, æqualis erit quantitati C D, & F H, æqualis erit ipſi A B. At verò vt E, ad H, ſic eſt E H, ad poſitam quantitatem, & vt F, ad H, ita F H, ad poſitam, erit igitur vt aggregatum ex E, & F, ad H, hoc eſt G, ad H, ita aggregatum ex ipſis F H, E H, hoc eſt ex A B, C D, ad poſitam; ergo G H, fractionum A B, C D, aggregatum ſignificabit; atque adeo ſumma erit quæſita. Hoc idem aliter demonſtrabimus infrà.

Subtractio Fractarum Magnitudinum.

OPERATIO SECVNDA.

FRactiones ſunt in duplici differentia, quemadmodum de earum additione tractantes dicebamus; Vel enim ſunt denominationis eiuſdem, vel diuerſæ. Si primo modo ſe habeant numeratorum inſtituatur ſunbtractio, atque reliquo communis denominator ſubſcribatur. Vt ſit iniunctum a b $\frac{az}{d}$, ſubtrahere $\frac{bz}{d}$, fiet reſiduum $\frac{az-bz}{d}$. Ita quoque ſi ab $\frac{a^2b}{b-d}$, oporteat ſubtrahere $\frac{a^2d}{b-d}$, fiet reliquum $\frac{a^2b-a^2d}{b-d}$, ſeu quod idem eſt a^2. Nec diſſimili modo ſi abs $\frac{bz}{b+d}$, ſubtrahere deberemus $\frac{bd}{b+d}$, reliquum fieret $\frac{bz-bd}{b+d}$. Quod ſi eſſet ex d + $\frac{bz}{b+d}$, ſubtrahendum $\frac{bd}{b+d}$, remaneret $\frac{dz+bz}{b+d}$. Si enim multiplicemus d, per b + d, fiet b d + d^2; ob id euadet fractio $\frac{bd+dz+bz}{b+d}$, à qua ſi ſubtraxeris $\frac{bd}{b+d}$, remanebit $\frac{dz+bz}{b+d}$. Ita etiam ſi ex $\frac{3ab}{b-c}$, oporteat ſubtrahere $\frac{2ac}{b-c}$, fiet reſiduum $\frac{3ab-2ac}{b-c}$; Si verò eſſet ex $\frac{2ab}{b-a}$, ſubtrahenda fractio $\frac{2aa}{b-a}$, fiet reſiduum 2 a. Ita pariter ſi ſubducere debeamus $\frac{ea}{b+d}$, ex b + $\frac{dz}{b+d}$, fiet reſiduum $\frac{b^2+bd+dz-ae}{b+d}$. Et ſi foret c + $\frac{d^2}{c+d}$, & ex hac ſubtrahere oporteat $\frac{cd}{c+d}$ — a remanebit $\frac{c^2+d^2+ac+ad}{c+d}$, Oportet enim fractionem illam integro adiuncto, nempe c + $\frac{d^2}{c+d}$, reuocare ad hanc $\frac{c^2+cd+d^2}{c+d}$, & illam $\frac{cd}{c+d}$ — a, ad hanc $\frac{cd-ac-ad}{c+d}$, ſubtractoque numeratore c d — a c — a d, ex numeratore c^2 + c d + d^2, & remanebit c^2 + d^2 + a c + a d, cui ſubſcripto denominatore c + d, fiet fractio, vt ſupra.

Si verò fuerint denominationis diuerſæ. Oportet illas ad eandem denominationem reuocare, vt ſuperiùs agentes de fractionum additione dicebamus. Si fuerint fractiones propoſitæ $\frac{az}{b}$, & $\frac{bz}{g}$, & hanc ex illa ſit iniunctum ſubducere, fiet reſiduum $\frac{azg-b^2z}{bg}$; Præterea ſi ex $\frac{az}{b}$, oporteat ſubtrahere z, remanebit $\frac{az-bz}{b}$. Sit ſubtrahendum $\frac{a^2+ab}{a+b}$, ex a, reuocetur a, ad eandem denominationem, vt fiat $\frac{a^2+ab}{a+b}$, & ex hac ſubtrahatur $\frac{a^2+ab}{a+b}$, & remanebit nihil. Si verò illa fractio, quæ ſubtrahi deberet ex a fuiſſet $\frac{a^2-ab}{a+b}$, iterum reuocato a, ad illam denominationem, ita vt denominator ſit a + b, ſubtractione inſtituta fiet reſidua fractio $\frac{2ab}{a+b}$. Quod ſi foret $\frac{bd}{a^2c-a^2d}$, quam oporteat ſubtrahere ex $\frac{a^2+b^2}{cd-d^2}$, reuocabimus illas ad eandem denominationem iuxta præcepta ſuperius tradita, ex quibus conſtat denominatorem eſſe a^2 c d − a^2 d^2; adeo vt fractiones illæ ad iſtas redactæ ſint $\frac{bdd}{a^2cd-a^2d^2}$, & $\frac{a^4+a^2b^2}{a^2cd-a^2d^2}$, inſtituatur verò ſubtractio, & fiet reſiduum $\frac{a^4+a^2b^2-bdd}{a^2cd-a^2d^2}$ &c.

Deinde ſi propoſitæ eſſent fractiones $\frac{125}{a^3-25a}$, & $\frac{a-25}{a^2+10a+25}$, fiet reſiduum $\frac{a^3-30a^2-625}{a^4+5a^3-25a^2-125a}$, id autem hunc in modum perficitur. Reperiatur communis denominator, puta minima quantitas, quæ per a^2 + 10 a + 25, & a3 — 25 a, diuidi poſſit; ea verò eſt a^4 + 5 a^3 — 125 a, quæ ſi diuidatur per a^3 — 25 a, fit quotiens a + 5, at ſi diuidatur per a^2 + 10 a + 25, fiet quotiens a^2 − 5 a, ductis his in numeratores, nempe a + 5, in 125, fit 125 a + 625, & a — 25, in a^2 — 5 a, fiet a^3 — 30 a^2 + 125 a, vnde fractiones huiuſmodi prouenient $\frac{125a+625}{a^4+5a^3-25a^2-125a}$, & $\frac{a^3-30a^2+125a}{a^4+5a^3-25a^2-125a}$, atque hunc in modum fractiones illæ redactæ ſunt ad eandem denominationem; prædictarum autem fractionum differentia eſt $\frac{a^3-30a^2-625}{a^4+5a^3-25a^2-125a}$.

Quando ex integro ſubtrahi debet fractio, vel contra integrum reuocetur ad fractionem eiuſdem denominationis, & abſoluitur operatio, vt ſupra; quare ex a ſubtracto $\frac{a^2-ab}{a+b}$, remanet $\frac{2ab}{a+b}$, vt infra quoque dicetur.

Fractiones ſũt in duplici differentia. Quædam ſunt eiuſdem quædam diuerſæ denominationis. Quando ſunt eiuſdem denominationis, qua arte fit in illis tenenda ſubtractio. Exempla.

Quando ſunt denominationis diuerſæ.

Exempla.

Cùm ex integro ſubtrahi debet fractio, quid agendũ.

 Demonſtra-

Demonſtratio ſubtractionis fractionum, diuerſæ denominationis.

Demonſtratio ſubtractionis fractionum diuerſæ denominationis, cum fiat per multiplicationem in crucem ſic ſe habet.

Sunto fractiones A B, C D, hæc quidem ſubtrahenda, & illa ſit à qua fieri debet ſubtractio. Ducatur A, in D, vt fiat E, deinde multiplicetur E, per C, vt fiat F, ſubtrahatur F, ex E, vt remaneat G, multiplicetur deinde B, per D, vt fiat H. Dico G H, fractionem eſſe reliquam ſubtracta C D, ex A B.

$$\text{A}\ \frac{a\ pl.}{b}\ \text{B} \qquad \text{C}\ \frac{z\ quad}{g}\ \text{D}$$

$$\text{E}\ \frac{a\ pl.\ g}{b\ g}\ \text{H} \qquad \text{F}\ \frac{b\ z\ quad}{b\ g}\ \text{H}$$

$$\text{G}\ \frac{a\ pl.\ g - b\ z\ quad}{b\ g}\ \text{H}$$

Quoniam B, multiplicans ſingulas C, D, facit ſingulas F, H, erit vt C, ad D, ita F, ad H: Inſuper quoniam D, multiplicans ſingulas A, B, facit ſingulas E, H, erit vt A, ad E, ita B, ad H; Quamobrem E H, æqualis erit ipſi A B, & F H, ipſi C D, & quoniam fractiones E H, F H, eundum habent denominatorem H, proinde erunt inter ſe, vt numeratores E, F. Quoniam igitur E H, F H, eundem habent denominatorem H, erit vt E, ad F, ita E H, ad F H; ergo diuidendo erit, vt E, minus F, ad F, ita E H, minus F H, ad F H, & quia fractiones F H, ſunt eiuſdem denominationis, erit vt F, ad G, ita F H, ad G H, quare ex æquo erit vt E, minus F, ad G, ita E H, minus F H, ad G H; At verò E, minus F, ad G, habet proportionem æqualitatis, ſubtracto enim F, ex E, remanet G, ergo E H, minus F H, ad G H, æqualitatis proportionem habebit; eſt autem E H, minus F H, differentia inter E H, & F H, proinde G H, erit differentia ſupradictarum fractionum E H, F H, ſed hæ ſunt oſtenſæ æquales A B, C D, ergo G H, erit differentia prædictarum fractionum A B, C D. Quod oportebat oſtendere.

Alia inſtituitur demoſtratio, & primò cùm fractiones ſunt eiuſdem denominationis.

Vel ſic, & primò fractiones eiuſdem ſint denominationis,

$$\frac{\text{A}}{\text{B}} \qquad \frac{\text{C}}{\text{B}} \qquad \frac{\text{D}}{\text{B}}$$

Sint fractiones A B, C B, & ex A B, ſubtrahenda ſit C B. Detracto prius C, numeratore minoris fractionis, ex A, numeratore maioris, fiat reliquum D, cui idem denominator B, ſupponatur. Dico facta ſubtractione iam dicta reſiduum eſſe C D. Quoniam enim C, ſubtracto ex A, remanet D, componetur A, ex C, & D. Fractio igitur A B, cuius numerator A, ex numeratoribus C D, collectus eſt ſumma quidem eſt duarum fractionum C B, D B, vt conſtat ex elementis. Detracta igitur fractione C B, ex A B, remanet fractio D B.

Quando fuerint denominationis diuerſæ. Proplema primum.

Quod ſi fuerint denominationis diuerſæ, ita procedendum,

$$\frac{\text{A}}{\text{B}} \longrightarrow \frac{\text{C}}{\text{D}} \qquad \frac{\text{G}}{\text{H}} \qquad \frac{\text{E}}{\text{F}}$$

Sint fractiones A B, C D, quarum denominatores B D, ſint diuerſi, & minor fractio C D, ſubtrahenda ſit ex maiori A B, ex C, numeratore minoris in B, denominatorem maioris proueniat E, & ex A, denominatore maioris in D, denominatorem minoris proueniat F; ſubtracto E, ex F, remanet G, cui ſupponatur denominator H, factus ex mutua multiplicatione denominatorum B, D. Dico fractionem G H, eſſe reſiduum proueniens facta ſubtractione fractionis C D, ex fractione A B. Quandoquidem D, multiplicans A, B, facit F H, erit vt A, ad B, ita F, ad H, vt autem A, ad B, ita eſt fractio A B, ad integrum, vt conſtat.

Erit igitur etiam vt F, ad H, ita fractio A B, ad integrum. Deinde quoniam B, multiplicans C D, facit E H, erit vt C, ad D, ita B ad H, vt autem C, ad D, ita eſt fractio C D, ad integrum ergo erit quoque, vt E, ad H, ita fractio C D, ad integrum. Quoniam igitur eſt vt E, prima quantitas ad H, ſecundum, ita fractio C D, tertia ad integrum quartem, & vt G, quinta ad eandem H, ſecundam, ita fractio G H, ſexta ad idem integrum quartam, propterea vt E, G, prima, & quinta ſimul ad H, ſecundam, ita fractiones C D, G H, tertia, & ſexta, ſimul ad integrum quartam.

Vt

Vt autem L G, ſimul ad H; ita eſt F, ipſis E G, æqualis (remanet enim G, ſi E, ſubtrahatur ex F), ad eandem quantitatem H, proinde erit etiam, vt F, ad H, ita fractiones C D, G H, ſimul ad integrum.

Demonſtrationis concluſio. Cum igitur demonſtratum fuerit, vt eſt F, ad H, ita eſſe fractionem A B, ad integrum erit pariter, vt fractio A B, ad integrum, ita fractiones C D, G H, ſimul ad idem integrum, quamobrem fractiones C D, G H, ſimul æquales erunt fractioni A B, ſubtracta igitur fractione C D, ex fractione A B, remanet fractio G H, quod erat operæ pretium oſtendere.

Multiplicatio Fractarum Magnitudinum.

OPERATIO TERTIA.

Ad perficiendam multiplicationem in ſpecierum fractionibus, non ſecus procedendum, ac in minutijs vulgarium numerorum. AD hanc Operationem perficiendam procedendum eſt, quemadmodum in fractionibus vulgaribus. Ducantur igitur inter ſe magnitudines ſuperiores nimirum, & inferiores, hoc eſt numerator in numeratorem, & denominator in denominatorem. Iniunctum ſit multiplicare $\frac{a\,pl.}{b}$, per b, producetur quidem $\frac{a\,pl.\,b}{b}$, hoc eſt a pl. Ita ſi opus ſit multiplicare $\frac{a\,pl.}{b}$ per 2, producetur $\frac{a\,pl.\,2}{b}$. Præterea ſit iniunctum multiplicare $\frac{a\,pl.}{b}$, per $\frac{2a}{g}$, producetur $\frac{a\,pl.\,2a}{bg}$, eodem modo ſi $\frac{a^2}{b}$, oporteat ducere in b, producetur $\frac{a^2 b}{b}$, hoc eſt a^2. Inſuper ſi $\frac{b^2}{d}$, ducatur in $\frac{a\,pl.}{g}$, producetur $\frac{b^2\,a\,pl.}{dg}$. *Explicatur operatio præcepto, ac exemplis illuſtratur.* Deinde multiplicandum ſit $\frac{ab}{g}$, per $\frac{dk}{f}$, multiplicetur a b, per d k, & producetur a b d k; deinde multiplicetur g, per f, & fiet f g; quamobrem productum erit $\frac{abdk}{fg}$. Debeat inſumer multiplicari $\frac{a^2+b^2}{d}$, per $\frac{2ab}{b+d}$, & producetur $\frac{2a^3b+2ab^3}{bd+d^2}$, Præterea oporteat multiplicare $\frac{a^2-b^2}{a+b}$, per $\frac{a^2-ab}{d}$, & producetur $\frac{a^4-a^3b-a^2b^2+ab^3}{ad+bd}$. Cum autem propoſitæ eſſent fractiones $\frac{a^2c-a^2d-b^2c+b^2d}{a^2+2ab+b^2}$, & $\frac{a^3-ab^2}{cd-d^2}$, ita vt illa per hanc duci debeat. *Præſtat reductionem inſtituere ad ſimpliciores.* Quoniam $a^2c - a^2d - b^2c + b^2d$, & $cd - d^2$, reduci poſſunt ad ſimpliciores $a^2 - b^2$, & d, quemadmodum, & $a^3 - ab^2$, & $a^2 + 2ab + b^2$ ad $a^2 - ab$, & $a + b$; propterea loco multiplicandi $a^2c - a^2d - b^2c + b^2d$, per $a^3 - ab^2$, multiplicare oporteat $a^2 - b^2$, per $a^2 - ab$, & loco multiplicandi $a^2 + 2ab + b^2$, per $cd - d^2$, multiplicare oporteat $a + b$, per d, fiet enim productum $\frac{a^4-a^3b-a^2b^2+ab^3}{ad+bd}$. Hic autem aduerte huiuſmodi artificium.

Res diligentius explicatur. Ad has igitur illæ fractiones reuocatæ ſunt, ad has inquam $\frac{a^2-b^2}{a+b}$, & $\frac{a^2-ab}{d}$, quæ, vt melius percipiantur aduertendum eſt pragmatiam in eo conſiſtere, quod ſi fuerint duæ fractiones verbigratia $\frac{36}{9}$, & $\frac{60}{8}$, diuidatur 36, numerator, & 9, denominator per communem diuiſorem, iſque ſit 3; proueniet autem 12, & 3.

$$\frac{a^2c - a^2d - b^2c + b^2d}{a^2 + 2ab + b^2} \times \frac{a^3 - ab^2}{cd - d^2}$$

$$\frac{a^2 - b^2}{a + b} \qquad \frac{a^2 - ab}{d}$$

Deinde diuidatur 60, numerator, & 8 denominator per communem diuiſorem, iſque ſit 4, & fient 2, & 15, vnde erunt fractiones $\frac{12}{3}$, & $\frac{15}{2}$, quæ inter ſe ductæ hoc eſt multiplicatis numeratoribus, & denominatoribus tantum producetur, quantum fit ex multiplicatione fractionum initio propoſitarum, qua de re alibi fuſius.

Quando fractio per integrum multiplicari debeat. Quod ſi fractio multiplicari debet per integrum; diſponatur integrum ad modum fractionis ſubſcripta vnitate pro denominatore; quamobrem ſi multiplicare debeamus $a^2 - b^2$, per $\frac{a^2-ab}{a+b}$, ipſi $a^2 - b^2$, ſubſcribi debet vnitas, vt fiat $\frac{a^2-b^2}{1}$, numerator autem $a^2 - b^2$, & denominator $a + b$, reduci debent ad $a - b$, & 1; multiplica-

Aduerte reductionem illam; cum ſcilicet reducimus $a^2 - b^2$, ad $a - b$, & $a + b$, ad 1. Exemplum.

tis verò numeratoribus inter ſe, vt etiam denominatoribus fiet productum $\frac{a^3-2a^2b+ab^2}{1}$, ſeu quod idem eſt $a^3 - 2a^2b + ab^2$. Ita pariter ſi multiplicare deberemus b per $\frac{aa+bb}{a+a}$, intelligatur integro b, ſubſcripta vnitas, vt fiat $\frac{b}{1}$, inſtituta multiplicatione inter numeratores ad inuicem, vt & inter denominatores fiet productum $\frac{aab+bbb}{a+a}$.

At verò ſi multiplicare oporteat $a + \frac{b^2}{a-b}$, per $a - 2b + \frac{b^2}{a}$. Integrum illud a reuocetur ad fractionis naturam, & proueniet $\frac{a^2-ab+b^2}{a-b}$, multiplicandum per $\frac{a^2-2ab+b^2}{a}$, ad hanc enim fractionem reuocatur illud $a - 2b + \frac{b^2}{a}$, quoniam igitur $a^2 - 2ab + b^2$, & $a - b$, reduci poſſunt ad $a - b$, & 1; Propterea multiplicatis $a^2 - ab + b^2$, per $a - b$, & a per 1, proueniet fractio ſequens, nempe $\frac{a^3-2a^2b+2ab^2-b^3}{a}$, ſeu quod idem eſt $a^2 - 2ab + 2b^2 - \frac{b^3}{a}$; Si enim diuidamus $a^3 - 2a^2b + 2ab^2$, per a, fiet quotiens $a^2 - 2ab + 2b^2$, ſolaque particula $- b^3$, diuiſionem non patitur, quam proinde eo ſymbolo ſignificamus.

Nota reductionem.

Exemplum alterum.

Inſuper iniunctum ſit multiplicare $a + \frac{b^2}{a-b}$, per $a - b$, quoniam igitur a per $a - b$, facit $a^2 - ab$, & $\frac{b^2}{a-b}$, per $a - b$, facit b^2, proinde quæſitum productum erit $a^2 - ab + b^2$.

Exemplum ad idem.

Nec diſſimiliter ſi multiplicare oporteat $\frac{a^2-ab}{a+b}$, per $a^2 - b^2$. Quoniam igitur $a^2 - b^2$, fit ex $a + b$, in $a - b$, & $\frac{a^2-ab}{a+b}$, ductum in $a + b$, producit $a^2 - ab$, oportebit multiplicare $a^2 - ab$ per $a - b$, ita enim proueniet $a^3 - 2a^2b + ab^2$; hæc autem cernere licet à latere.

Qua arte euitetur aſcenſus ad altiores gradus.

Hoc igitur modo euitari poteſt aſcenſus ad altiores gradus parodicos, ad quos deueniendum foret vulgari methodo.

$$\frac{a^2 - ab}{a + b} \qquad \frac{a^2 - b^2}{1} \qquad \begin{array}{r} a^2 - ab \\ a - b \\ \hline - a^2b + ab^2 \\ a^3 - a^2b \\ \hline a^3 - 2a^2b + ab^2 \end{array}$$

$$\frac{a^2 - ab}{1} \qquad \frac{a - b}{1}$$

Exemplum idem quod ſupra.

Denique ſit iniunctum multiplicare $\frac{a^3-ab^2}{cd-d^2}$, per $c - d$. Diuiſis $cd - d^2$, per $c - d$, proueniet $\frac{a^3-ab^2}{d}$; Cùm enim multiplicatio reſtituat, quod diuiſione deperditur; propterea quod diuidatur $a^3 - ab^2$, per $cd - d^2$, ſi minuatur diuiſor, ſiue denominator quantum importat illud, in quod ductio facienda eſt, proueniet quæſitum, atq; illud erit $\frac{a^3-ab^2}{d}$, tantum igitur ex hac proueniet multiplicatione.

Exemplum pro ſuperadictorum maiori explicatione.

Deinde ſi multiplicari debeat $\frac{ab}{c}$, per $\frac{df}{g}$, fiet productum $\frac{abdf}{cg}$. Item ſi multiplicetur $a^2 + b^2$ per $\frac{ab}{d+c}$, fiet productum $\frac{a^3b+ab^3}{d+c}$. Præterea ſit iniunctum multiplicare $\frac{a^3-abd}{c^2-cg}$, per $\frac{b^2+ef}{d^2+bc}$, fiet productum $\frac{a^3b^2-ab^3d+a^3ef-abdef}{c^2d^2+bc^3-d^2cg-bc^2g}$. Sit inſuper $\frac{a^2+b^2}{ad+da}$, multiplicandum per $a^2 - 2ab$, fiet productum $\frac{a^4+a^2b^2-2a^3b-2ab^3}{ad+da}$.

Quando datæ fractiones ad ſimpliciores reuocari poſſunt quid agendum. Exemplum.

Quando verò datæ fractiones ad ſimpliciores reuocari poſſunt, expedit id quidem efficere, quandoquidem hoc pacto ipſæ fractiones elegantiùs tractantur, vt vnicuiq; perſpicuum eſſe poteſt.

** Intelligaſa ſtar ductione ad ſimpliciores vt ſupra.*

Si proponeretur multiplicandum $a + \frac{b^2}{a-b}$, per $a - 2b + \frac{b^2}{a}$, ducatur $+ a$, in $a - b$, fiet productum $a^2 - ab$, cui ſubſcripto eodem denominatore fiet fractio $\frac{a^2-ab+b^2}{a-b}$, mox autem $a - 2b$, repertum ſilicet in illa fractione $a - 2b + \frac{b^2}{a}$, ducatur in a, fiet* productum hoc ſilicet $\frac{a^2-2ab+b^2}{a}$, multiplicentur autem numeratores, atque denominatores inter ſe, fiet productum $\frac{a^3-2a^2b+2ab^2-b^3}{a}$, ſeu quod idem eſt, vt ſuperiùs dicebamus, fiet $a^2 - 2ab + 2b^2 - \frac{b^3}{a}$.

Exemplum.

Rurſus ſi fuerit multiplicandum $\frac{a^3-3a^2b}{d^2}$, per a^2, fiet productum $\frac{a^5-3a^4b}{d^2}$, Deinde ſi multiplicandum foret $\frac{a^3-3a^2b+ab^2}{d-b}$, per $a - b$, fieret productum $\frac{a^4-4a^3b+4a^2b^2-ab^3}{d-b}$. Inſuper ſi ſit opus multiplicare $\frac{4a^2-ab+c}{3a^2+d}$, per $3a^2 - 3$, fiet $\frac{12a^4-3a^3b-12a^2+3ab-3c}{3a^2+d}$. Quod ſi deinde nos ducere deberemus $\frac{ab^2}{abc}$, in $\frac{a^3-abd}{cd-bc}$, præſtabit ad ſimpliciores, propoſitas fractiones reuocare; & quidem $\frac{ab^2}{abc}$,

$$\begin{array}{r} a^3 - 3a^2b + ab^2 \\ a - b \\ \hline - a^3b + 3a^2b^2 - ab^3 \\ a^4 - 3a^3b + a^2b^2 \\ \hline a^4 - 4a^3b + 4a^2b^2 - ab^3 \end{array}$$

ad

ad hanc $\frac{b^2}{c}$, & aliam puta $\frac{a^2c-a^2d}{cd-d^2}$, ad hanc $\frac{a^2}{d}$, ſi itaque inſtituatur multiplicatio tam inter numeratores, quàm inter denominatores, fiet productum $\frac{a^2b^2}{cd}$. At ſi neglecta reuocatione ad ſimpliciores, productum extitiſſet huiuſmodi $\frac{a^2b^2c-a^2b^2d}{abc^2d-abcd^2}$.

$$\begin{array}{r} 4a^2 - ab + 2 \\ 3a^2 - 3 \\ \hline -12a^2 + 3ab - 6 \\ 12a^4 - 3a^3b + 6a^2 \\ \hline 12a^4 - 3a^3b - 6a^2 + 3ab - 6 \end{array}$$

Exemplum.

Propoſitum ſit multiplicare $d + \frac{b^2}{d-b}$, per $d - b$. Cum itaque ſi multiplicetur d, per $d - b$, producatur $d^2 - bd$, & $\frac{b^2}{d-b}$, per $d - b$, faciat b^2, proinde quæſitum productum erit $d^2 - bd + b^2$. In hoc exemplo ſupponimus magnitudinem d, maiorem eſſe quam b, quod ſi b, foret maior quàm d, non diſſimili modo procederetur. Sit igitur multiplicandum $d + \frac{b^2}{b-d}$, per $b - d$, fiet productum $bd - d^2 + b^2$. Quod ſi deberemus multiplicare $\frac{a^2-ab}{a+b}$, per $a^2 - b^2$, multiplicetur $a^2 - ab$, per $a - b$, vt proueniat $a^3 - 2a^2b + ab^2$. Huius autem compendij ratio iam ſuperiùs explicata fuit, hoc eodem exemplo adhibito.

Demonſtratio ſic ſe habet. Sunto fractiones A B, C D, ducantur numeratores inter ſe, ſicut, & denominatores, vt fiat fractio E F. Quoniam igitur ratio fractionis E F, ad C D, componitur ex rationibus ipſius E, ad C, & D, ad F; ratio verò quantitatis A B, ad poſitam componitur ex ratione ipſius A, ad vnitatem, & vnitatis ad B, vt autem eſt A, ad vnitatem, ſic eſt E, ad C, & vt vnitas ad B, ſic D, ad F, ergo per æqualem proportionem erit quantitas E F, ad quantitatem C D, vt quantitas A B, multiplicans ad poſitam; ergo, & E F, erit proueniens quantitas ex ductu A B, multiplicantis in C D, multiplicatam; Quod erat operæ prætium oſtendere.

$$\text{A}\ \frac{\text{a pl.}}{\text{b}}\ \text{B} \qquad \text{C}\ \frac{\text{z quad}}{\text{g}}\ \text{D} \qquad \text{E}\ \frac{\text{a pl. z quad}}{\text{b g}}\ \text{F}$$

Demonſtratio explicatæ pragmatia.

Aliter etiam ſic.

Sit fractio A B, per fractionem C D, multiplicanda. Ducantur numeratores A, C, inter ſe, vt proueniat E, cui ſubſcribatur F, genitus ex multiplicatione denominatorum B, D. Dico fractionem E F, procreari, ex multiplicatione fractionum A B, C D, inter ſe. Ex E, in D, fiat G, & ex C, in F, fiat H; erit propterea, vt fractio E F, ad fractionem C D, ita G, ad H. (Si numerator enim vnius fractionis in denominatorem alterius, & contra inſuper ducatur, prior fractio, ad poſteriorem eſt, vt primum productum, ad ſecundum quod facile poteſt oſtendi). Quoniam autem C, multiplicans A, F, facit E, H, erit vt A, ad F, ita E, ad H, & permutando, vt A, ad E, ita F, ad H.

$$\text{A}\ \frac{\text{a pl.}}{\text{b}}\ \text{B} \qquad \text{C}\ \frac{\text{z quad}}{\text{g}}\ \text{D} \qquad \text{E}\ \frac{\text{a pl. z quad}}{\text{b g}}\ \text{F} \qquad \text{G}\ \frac{\text{a pl. z quad g}}{\text{b g z quad}}\ \text{H}$$

Demonſtratio alia ad idem inſtituitur.

Deinde quandoquidem D, multiplicans E, & B, facit G, & F, erit vt E, ad B, ita G, ad F, ex æqualitate igitur perturbata erit, vt A, ad E, ita G, ad H; ſed vt G, ad H, oſtenſum eſt fractionem E F, eſſe ad fractionem C D, & vt A, ad B, ita eſt fractio A B, ad integrum (numerator enim cuiuſlibet fractionis ad denominatorem eiuſdem eandem habet rationem, quam fractio ad integrum, quod facilè etiam conſtat) ergo erit quoque, vt fractio E F, ad fractionem C D, ita fractio A B, ad integrum. Propterea, vt conſtat. ex definitione multiplicationis, fractio E F, producetur ex multiplicatione fractionis A B, in fractionem C D. Quod erat operæ pretium oſtendere.

Demonſtrationis continuatio.

Applicatio,

Applicatio, ſeu Diuiſio fractarum Magnitudinum,

OPERATIO QVARTA.

Fractiones aut ſunt eiuſdem, vel diuerſæ appellationis.

FRactiones, aut ſunt appellationis eiuſdem, vel diuerſæ. Si fuerint eiuſdem appellationis Applicatio, ſeu Diuiſio hunc in modum inſtituetur. Sit iniunctum diuidere $\frac{ab^3}{d}$, per $\frac{b^2}{d}$. Diuidatur ab^3, per b^2, neglecto denominatore d, fiet quotiens a b. Præterea ſi ſit opus diuidere $\frac{a^3-ab^2}{a-d}$, per hanc fractionem $\frac{a^2+2ab+b^2}{a-d}$, fiet quotiens $\frac{a^3-ab^2}{a^2+2ab+b^2}$, vel quod idem eſt $\frac{a^2-ab}{a+b}$. Cum enim negligendus ſit denominator, quia communis eſt vtrique fractioni; ob id perinde erit diuidere quotientes, hoc eſt numeratores, diuiſos per denominatorem, ac eſt diuidere numeratorem vnum per alium. Vt ſi $\frac{40}{5}$, diuidi debeat per $\frac{10}{5}$, perinde eſt diuidere 8, æquipollentem ipſi $\frac{40}{5}$, per 2, æquipollentem ipſi $\frac{10}{5}$, ac eſt diuidere 40, numeratorem per 10, itidem numeratorem; ex vtraque enim diuiſione prouenit 4. Cæterum fractionem illam, id eſt $\frac{a^3-ab^2}{a^2+2ab+b^2}$, reduci ad hanc $\frac{a^2-ab}{a+b}$, facilè conſtat; nam ſi diuidatur a^3-ab^2, per $a+b$, fit quotiens a^2-ab. Si per idem $a+b$, diuidatur hoc trinomium $a^2+2ab+b^2$, fiet quotiebs $a+b$; quamobrem illa fractio $\frac{a^3-ab^2}{a^2+2ab+b^2}$, reuocatur ad hanc $\frac{a^2-ab}{a+b}$.

Quando fractiones diuerſæ appellationis extiterint.

At verò ſi diuerſæ appellationis, ſiue denominationis extiterint, ad eundem denominatorem per multiplicationem in crucem reduci debent, quemadmodum fieri ſolet in fractionibus numerorum vulgarium. Sit igitur iniunctum diuidere $\frac{a^3+b^3}{a+b}$, per $\frac{a^2+ab+b^2}{d}$, inſtituta multiplicatione per crucem fiet quotiens $\frac{a^3d+b^3d}{a^3+2a^2b+2ab^2+b^3}$. Si verò diuidi deberet $\frac{a^3-b^3}{a+b}$, per $\frac{a^2-ab+b^2}{d}$, non diſſimili modo procedentes, comperiemus quotientem eſſe $\frac{a^3d-b^3d}{a^3+b^3}$. Præterea ſit iniunctum diuidere $\frac{a^2}{b}$, per d, fiet quotiens $\frac{a^2}{bd}$. Rurſus oporteat applicare b d, ad $\frac{a^2}{f}$, ducta vtraque magnitudinum in f, & facta applicatione ad a^2, numeratorem, fiet quotiens $\frac{bdf}{a^2}$.

$$\frac{a^3+b^3}{d} \qquad \frac{a^2+ab+b^2}{a+b} \qquad \frac{a^3d+b^3d}{\;}$$

$$a^3d+b^3d \qquad a^2b+ab^2+b^3 \qquad a^3+2a^2b+2ab^2+b^3$$

$$\frac{a^3+a^2b+ab^2}{a^3+2a^2b+2ab^2+b^3}$$

Quod ſi proponatur $\frac{b^2}{d}$, & diuidi debeat per $\frac{a^2}{f^2}$, orietur $\frac{b^2f^2}{a^2d}$. Ita ſi applicetur b c ad $\frac{a\,pl.}{d}$, facta eadem multiplicatione per crucem, proueniet quantitas $\frac{bcd}{a\,pl.}$. Denique oporteat applicare $\frac{bc}{s}$ ad $\frac{a^2}{d\,pl.}$, erit magnitudo ortiua $\frac{bcd\,pl.}{a^2s}$.

Quando fractiones ad ſimpliciores reduci poſſunt.

Si verò proponatur fractiones, quarum vna per aliam diuidi debeat, & vna vel altera, aut etiam vtraque ad ſimpliciores reduci poſſit. Tunc debet prius reductio fieri, poſtea procedendum, vt prius; redactis enim fractionum numeratoribus, atq; denominatoribus ad ſimpliciores terminos, Operatio ipſa faciliùs exercetur, ac longe elegantiùs perficitur.

Exemplis res explicatur.

Quamobrem ſi darentur fractiones $\frac{a^4-b^4}{a^2+2ab+b^2}$, & $\frac{a^2+ab}{a-b}$, adeo vt illa per hanc diuidi debeat. Reducantur numeratores, qua reductione facta, erunt numeratores $a^3-a^2b+ab^2-b^3$, & a; denominatores verò erunt $a-b$, & 1; adeo vt fractiones illæ redactæ ſint ad has $\frac{a^3-a^2b+ab^2-b^3}{a-b}$, & $\frac{a}{1}$. Conſtabit autem ex infrappoſito paradigmate, ducto $a^3-a^2b+ab^2-b^3$, in $a+b$, fieri a^4-b^4; ac proinde diuiſo a^4-b^4, per $a+b$ quotientem fieri $a^3-a^2b+ab^2-b^3$. Cum igitur $a+b$,

diuidens $a^2 + a\,b$, reddat a, diuidens autem $a^4 - b^4$, reddat $a^3 - a^2 b + a\,b^2 - b^3$, erunt numeratores, vt diximus, at verò $a - b$, diuidens ſe ipſum reddit 1, diuidens autem denominatorem alterius fractionis, nempe $a^2 - 2\,a\,b + b^2$, reddit $a - b$; proinde erunt denominatores, vt dictum fuit; at verò ſi fractiones illæ renocatæ fuerint ad has, nempe $\frac{a^3 - a^2 b + a b^2 - b^3}{a - b}$, & $\frac{a}{1}$, erit illa per hanc diuidenda, quod perficiemus multiplicando $a^3 - a^2 b + a\,b^2 - b^3$, per 1, ex quo nulla ſequitur immutatio; deinde multiplicando $a - b$, per a, & producetur $a^2 - a\,b$, ille erit numerator hic autem denominator, adeo vt fiat quotiens $\frac{a^3 - a^2 b + a b^2 - b^3}{a^2 - a b}$.

$$\begin{array}{r} a^3 - a^2 b + a\,b^2 - b^3 \\ a + b \\ \hline + a^3 b - a^2 b^2 + a\,b^3 - b^4 \\ a^4 - a^3 b + a^2 b^2 - a\,b^3 \\ \hline a^4 - b^4 \end{array}$$

Demonſtratio ſuperioris pragmatis.

Demonſtratio ſic ſe habet. Quoniam ratio quantitatis A B, ad quantitatem E F, componitur ex ratione ipſius A, ad E, & ratione ipſius F, ad B; & vt A, ad E, ita vnitas ad D, & ſicuti F, ad E, ita C, ad vbitatem, & ratio quantitatis C D, ad poſitam componitur ex ratione ipſius C, ad vnitatem, & ex ratione vnitatis ad D, ergo per æquam proportionem ratio quantitatis A E, diuiſæ ad quantitatem E F, prouenientem, erit vt quantitas C D, diuidens ad poſitam; ergo ex diuiſione quantitatis A B, per quantitatem C D, prouenit F F. Quod erat oſtendendum. Aliter etiam hæc eadem operatio demonſtrari poteſt hæc tamen attuliſſe ſufficiat.

$$\frac{A}{B} \qquad \frac{C}{D} \qquad \frac{E}{F}$$

Subijciam autem hic nonnulla, quæ valde proſunt Analyſtæ.

PROPOSITIO I.

Propoſitio prima.

DVorum laterum aggregato, differentiam eorundem addere. Latus vnum eſto a, aliud verò b, horum aggregatum eſt $a + b$, differentia verò $a - b$, qua addita ad aggregatum prædictum fit $2\,a$. Hinc.

THEOREMA.

Theorema primum.

AGgregatum duorum laterum additum differentiæ eorundem æquale eſt duplo lateris maioris.

PROPOSITIO II.

Propoſitio ſecunda.

DVorum laterum aggregato eorundem differentiam ſubducere. Iiſdem poſitis lateribus aggregatum erit $a + b$, differentia verò $a - b$, quæ ſubtracta ex aggregato iam dicto, ſit reſiduum $2\,b$. Hinc.

THEO-

Digitized by Google

THEOREMA.

Theorema ſecundum. AGgregatum duorum laterum multatum differentia eorundem, æquale eſt duplo lateris minoris.

PROPOSITIO III.

Propoſitio tertia. CVm idem latus contrahitur inæquali decremento, alterum ex altero ſubducere.

Ex a, ſupponamus eſſe ſubtractum b, & ex eodem ſubtractum eſse c, & oporteat ex a – b, ſubducere a – c; ſubtractione facta remanet c – b. Hinc.

THEOREMA.

Theorema tertium. SI latus inæquali minuatur decremento, differentia contractionum, æqualis eſt differentiæ contractorum.

PROPOSITIO IV.

Propoſitio quarta. CVm idem latus protrahitur inæquali cremento, alterum ex altero ſubducere.

Sit lateri a, additum b, vt fiat a † b, itemque eidem a, additum ſit d, vt fiat a † d. Oporteat verò ex a † b, ſubducere a † d, reſiduum fiet b – d. Hinc.

THEOREMA.

Theorema quartum. SI idem latus inæquali augeatur cremento, differentia protractionum æqualis eſt differentiæ protractorum.

PROPOSITIO V.

Propoſitio quinta. CVm idem latus protrahitur, & contrahitur inæquali cremento, & decremento, alterum ex altero ſubducere.

Sit latus vnum a, cui additum ſit b, vt fiat a † b, & ex eodem a, ſubtractum ſit d, vt remaneat a – d, quod ſubtrahendum ſit ex a † b, fiet reſiduum b ✠ d. Hinc.

THEOREMA.

Theorema quintum. SI idem latus potrahatur, & contrahatur inæquali cremento, & decremento, differentia potractæ, & contractæ æqualis eſt aggregato protractionis, & contractionis.

Digitized by Google

De Poteſtatum Geneſi.

CAPVT SEXTVM.

GENESIS vniuſcuiuſque poteſtatis opere multiplicationis comparatur. Quoniam verò duplex eſt poteſtas, alia nimirum pura, & alia affecta; proptereà dictante naturæ ordine primùm de geneſi puræ poteſtatis ſermonem inſtituemus, & quidem à binomia radice. *Cuiuſcunque poteſtatis geneſis opere multiplicationis comprobatur.*

PROPOSITIO I.

POteſtatem puram à binomia radice componere. *Propoſitio prima.*

Sit binomia radix a † e, conſtans ex duobus nominibus a, & e, oporteat verò puram poteſtate componere.

Sit autem primò componendum quadratum. Quoniam igitur latus ductum in ſe facit quadratum; ducatur proinde a † e, in a † e, & colligantur effecta ſingularia plana, eaque ſunt a^2, 2 a e, e^2. Quæquidem proptereà ſimul iuncta æquabuntur quadrato ex a † e. Erit autem,

			a	†	e	
			a	†	e	
			a e	†	e^2	
a^2	†		a e			
a^2	†	2	a e	†	e^2	

Theorema Geneſcos Quadrati.

SI fuerint duo latera: Quadratum lateris primi, plus duplo plano à latere primo in latus ſecundum, plus quadrato lateris ſecundi æquatur quadrato aggregati laterum. *Theorema primum.*

Latus vnum eſto a, alterum autem e. Dico a^2, plus 2 a e, plus e^2, æquari quadrato ex a † e. Huius Theorematis veritas ex opere multiplicationis innoteſcit.

PROPOSITIO II.

COmponendus ſit cubus. *Propoſitio ſecunda.*

Quoniam igitur latus ductum in ſui quadratum producit cubum. Ducatur a † e, in expoſitum quadratum ex a † e; & colligantur effecta ſingularia ſolida. Ea verò ſunt a^3, 3 a e, 3 a e^2, e^3; quæ propterea ſimul iuncta æquabuntur cubo ex a † e. Erit autem.

 Theorema

Theorema Geneſeos Cubi.

Theorema ſecundum.

SI fuerint duo latera, cubus lateris primi, plus triplo ſolido à quadrato lateris primi in latus ſecundum, plus triplo ſolido à latere primo in quadratum lateris ſecundi, plus cubo eiuſdem ſecundi lateris, æquatur cubo aggregati laterum.

Sit latus vnum a, alterum autem e. Dico $a^{3} \dagger 3a^{2} e \dagger 3 a e^{2} \dagger e^{3}$, æquari cubo ex $a \dagger e$. Huius autem Theorematis veritas depræhenditur ex opere multiplicationis; Ducta enim $a \dagger e$, binomia radix in $a^{2} \dagger 2 a e \dagger e^{2}$, quadratum ſui facit $a^{3} \dagger 3 a^{2} e \dagger 3 a e^{2} \dagger e^{3}$.

PROPOSITIO III.

Propoſitio tertia.

COmponendum ſit quadrato-quadratum.

Quoniam latus ductum in ſui cubum facit quadrato-quadratum. Ducatur $a \dagger e$, in cubum iam expoſitum ex $a \dagger e$, & colligantur effecta ſingularia plano-plana. Eruntque illa a^{4}, $4 a^{3} e$, $6 a^{2} e^{2}$, $4 a e^{3}$, e^{4}, quæ propterea ſimul iuncta æquabuntur quadrato-quadrato, ex $a \dagger e$. Erit autem.

Theorema Geneſeos Quadrato-quadrati.

Theorema tertium.

SI fuerint duo latera. Quadrato-quadratum lateris primi, plus quadruplo plano-plano à cubo lateris primi in latus ſecundum, plus ſextuplo plano-plano abs quadrato lateris primi in quadratum ſecundi, plus quadruplo plano-plano à latere primo in cubum ſecundi, plus quadrato-quadrato lateris ſecundi, æquatur quadrato-quadrato aggregati laterum.

Sit latus vnum a, alterum autem e, Dico $a^{4} \dagger 4 a^{3} e \dagger 6 a^{2} e^{2} \dagger 4 a e^{3} \dagger e^{4}$, æquari quadrato-quadrato ex $a \dagger e$. Huius autem Theorematis veritas innoteſcit ex opere multiplicationis. Ducta enim $a \dagger e$, binomia radix in ſui cubum $a^{3} \dagger 3 a^{2} e \dagger 3 a e^{2} \dagger e^{3}$, facit &c.

PROPOSITIO IV.

Propoſitio quarta.

COmponendus ſit quadrato-cubus.

Quoniam igitur latus ductum in ſui quadrato-quadratum facit quadrato-cubum. Ducatur $a \dagger e$, in quadrato-quadratum iam expoſitum ex $a \dagger e$, & colligantur effecta ſingularia plano-ſolida. Erunt autem illa a^{5}, $5 a^{4} e$, $10 a^{3} e^{2}$, $10 a^{2} e^{3}$, $5 a e^{4}$, e^{5}; quæ quidem ſimul ſumpta æquabuntur quadrato-cubo ex $a \dagger e$. Erit autem.

Digitized by Google

Theorema Geneſeos Quadrato-cubi.

SI fuerint duo latera. Quadrato-cubus lateris primi plus quintuplo plano ſolido à quadrato-quadrato lateris primi, in latus ſecundum, plus decuplo plano-ſolido à cubo lateris primi in quadratum lateris ſecundi, plus decuplo plano-ſolido à quadrato lateris primi, in cubum ſecundi, plus quintuplo plano ſolido à latere primo in quadrato-quadratum lateris ſecundi, plus quadrato-cubo lateris ſecundi æquatur quadrato-cubo aggregati laterum. *Theorema quartum.*

Sit latus vnum a, alterum autem e. Dico $a^5 + 5a^4e + 10a^3e^2 + 10a^2e^3 + 5ae^4 + e^5$, æquari quadrato-cubo ex $a + e$. Huius Theorematis veritas deprehenditur ex opere multiplicationis $a^4 + 4a^3e + 6a^2e^2 + 4ae^3 + e^4$, per $a + e$.

PROPOSITIO V.

COmponendus ſit cubo-cubus. *Propoſitio quinta.*

Quoniam igitur latus ductum in ſui quadrato-cubum, facit cubo-cubum. Propterea ducatur $a + e$, in quadrato cubum, iam expoſitum abs $a + e$, & colligantur facta ſingularia ſolido-ſolida, erunt autem illa a^6, $6a^5e$, $15a^4e^2$, $20a^3e^3$, $15a^2e^4$, $6ae^5$, e^6, quæ quidem æquabuntur cubo-cubo ex $a + e$. Erit autem.

Theorema Geneſeos cubo-cubi.

SI fuerint duo latera. Cubo-cubus lateris primi plus ſextuplo ſolido-ſolido à quadrato-cubo lateris primi in latus ſecundum, plus decuquintuplo ſolido-ſolido à quadrato-quadrato lateris primi in quadratum ſecundi, plus vigecuplo ſolido-ſolido à cubo lateris primi in cubum lateris ſecundi, plus decuquintuplo ſolido-ſolido, à quadrato lateris primi in quadrato-quadratum lateris ſecundi, plus ſextuplo ſolido-ſolido à latere primo in quadrato-cubum lateris ſecundi, plus cubo-cubo eiuſdem ſecundi lateris, æquabitur cubo-cubo aggregati laterum. *Theorema quintum.*

Sit latus vnum a, alterum autem e. Dico $a^6 + 6a^5e + 15a^4e^2 + 20a^3e^3 + 15a^2e^4 + 6ae^5 + e^6$, æquari cubo-cubo ex $a + e$. Huius Theorematis demonſtratio conſtat ex opere multiplicationis $a^5 + 5a^4e + 10a^3e^2 + 10a^2e^3 + 5ae^4 + e^5$, per $a + e$.

Sic etiam reliquarum poteſtatum Geneſis comprobabitur.

Quod ſi in animo eſt poteſtates componere à differentia laterum eadem omninò efficientur ſingularia compoſitionis homogenea affirmabuntur tamen, & negabuntur alterne, initio facto à poteſtate maioris lateris; cum par fuerit ſingulorum homogeneorum numerus, vt in cubo quadrato-cubo, & ex inde alternis: In reliquis verò ſiue à maioris, ſiue à minoris lateris poteſtate ducatur initium nihil refert.

Si tamen placet poteſtatem puram è laterum differentia componere. Differentia laterum eſto $a - e$, & ex hac ſit componenda pura poteſtas. *Poteſtas pura à laterum differentia componitur.*

PROPOSITIO I.

COmponendum ſit quadratum.

Quoniam igitur latus ductum in ſe facit quadratum; propterea ducatur $a - e$, in *Propoſitio prima.*

ſe, & colligantur ſingularia effecta plana, eruntque illa $a^2 - 2ae + e^2$; quæ æquabuntur quadrato ex $a - e$. Erit autem.

Theorema Geneſeos Quadrati.

Theorema primum.

SI fuerint duo latera. Quadratum lateris maioris, minus duplo plano à latere maiori in latus minus, plus quadrato lateris minoris; æquatur quadrato differentiæ laterum.

Sit latus maius a, minus autem e. Dico $a^2 - 2ae + e^2$, æquari quadrato ex $a - e$. Huius Theorematis veritas conſtat ex opere multiplicationis $a - e$, in $a - e$.

PROPOSITIO II.

Propoſitio ſecunda.

COmponendus ſit cubus.

Quoniam igitur latus ductum in ſui quadratum facit cubum; ducatur $a - e$, in quadratum iam expoſitum ex $a - e$, & colligantur effecta ſingularia ſolida, illaque erunt a^3; $3a^2e$; $3ae^2$; e^3, quæ ſimul iuncta æquabuntur cubo ex $a - e$. Erit autem.

Theorema Geneſeos Cubi.

Theorema ſecundum.

SI fuerint duo latera. Cubus lateris maioris, minus triplo ſolido à quadrato lateris maioris in latus minus, plus triplo ſolido à latere maiori in quadratum lateri minoris, minus cubo minoris lateris; æquatur cubo à differentia laterum.

Sit latus maius a, at verò minus ſit e. Dico $a^3 - 3a^2e + 3ae^2 - e^3$, æquari cubo ex $a - e$. Theorematis autem veritas conſtat ex opere multiplicationis $a^2 - 2ae + e^2$, per $a - e$.

PROPOSITIO III.

Propoſitio tertia.

COmponendum ſit quadrato-quadratum.

Quoniam igitur latus ductum in ſui cubum facit quadrato-quadratum. Ducatur $a - e$, in cubum iam expoſitum ab $a - e$; & colligantur effecta ſingularia plano-plana. Eruntque illa a^4; $4a^3e$; $6a^2e^2$; $4ae^3$; e^4, quæ ſimul iuncta æquabuntur quadrato-quadrato ex $a - e$. Erit autem.

Theorema Geneſeos Quadrato-quadrati.

Theorema tertium.

SI fuerint duo latera: Quadrato-quadratum lateris maioris, minus quadruplo plano-plano à cubo lateris maioris in latus minus, plus ſextuplo plano-plano abs quadrato lateris maioris, in quadratum lateris minoris, minus quadruplo plano-plano à latere maiori, in cubum lateris minoris, plus quadrato-quadrato lateris

lateris minoris; æquatur quadrato-quadrato differentiæ laterum.

Maius latus eſto a, at verò minus ſit e. Dico $a^4 - 4a^3e + 6a^2e^2 - 4ae^3 + e^4$, æquari quadrato-quadrato ex $a - e$. Huius Theorematis veritas conſtat ex opere multiplicationis $a^3 - 3a^2e + 3ae^2 - e^3$, per $a - e$.

PROPOSITIO IV.

COmponendus ſit quadrato-cubus. *Propoſitio quarta.*

Quoniam igitur latus ductum in ſui quadrato-quadratum facit quadrato-cubum, ducatur $a - e$, in quadrato-quadratum iam expoſitam ab $a - e$, & colligantur effecta ſingularia plano-ſolida; eruntque illa a^5; $5a^4e$; $10a^3e^2$; $10a^2e^3$; $5ae^4$ — e^5, quæ ſimul iuncta æquabuntur quadrato-cubo ex $a - e$. Erit autem.

Theorema Geneſeos Quadrato-Cubi.

SI fuerint duo latera, Quadrato-cubus lateris maioris, minus quintuplo plano ſolido à quadrato-quadrato lateris maioris, in latus minus, plus decuplo plano ſolido à cubo lateris maioris, in quadratum lateris minoris, minus decuplo plano ſolido à quadrato lateris maioris, in cubum lateris minoris, plus quintuplo plano ſolido à latere maiori in quadrato-quadratum lateris minoris, minus quadrato cubo minoris lateris; æquatur quadrato-cubo differentiæ laterum. *Theorema quartum.*

Sit latus maius a, at verò e, ſit minus. Dico $a^5 - 5a^4e + 10a^3e^2 - 10a^2e^3 + 5ae^4 - e^5$, æquari quadrato-cubo ex $a - e$. Theorematis autem veritas deprehenditur ex multiplicatione $a^4 - 4a^3e + 6a^2e^2 - 4ae^3 + e^4$, per $a - e$.

PROPOSITIO V.

COmponendus ſit cubo-cubus. *Propoſitio quinta.*

Quoniam igitur latus ductum in ſui quadrato-cubum facit cubo-cubum. Ducatur $a - e$, in quadrato-cubum iam expoſitum ab $a - e$, & colligantur effecta ſingularia ſolido-ſolida, eruntque illa a^6; $6a^5e$; $15a^4e^2$; $20a^3e^3$; $15a^2e^4$; $6ae^5$; e^6, quæ propterea ſimul iuncta æquabuntur cubo-cubo ex $a - e$. Erit autem.

Theorema Geneſeos Cubo-cubi.

SI fuerint duo latera. Cubo-cubus lateris maioris, minus ſextuplo ſolido-ſolido à quadrato-cubo lateris maioris in latus minus, plus decuquintuplo ſolido-ſolido à quadrato-quadrato lateris maioris, in quadratum lateris minoris, minus vigecuplo ſolido-ſolido à cubo lateris maioris, in cubum lateris minoris, plus decuquintuplo ſolido-ſolido à quadrato lateris maioris in quadrato-quadratum lateris minoris, minus ſextuplo ſolido-ſolido à latere maiori in quadrato-cubum lateris minoris, plus cubo-cubo lateris minoris æquatur cubo-cubo differentiæ laterum. *Theorema quintum.*

Sit

Sit latus maius quidem a, at verò e, ſit minus. Dico $a^6 - 6a^5e + 15a^4e^2 - 20a^3e^3 + 15a^2e^4 - 6ae^5 + e^6$, æquari cubo-cubo ex $a - e$. Theorematis autem veritas conſtat ex multiplicatione $a^5 - 5a^4e + 10a^3e^2 - 10a^2e^3 + 5ae^4 - e^5$, per $a - e$.

Corollarium ex hactenus traditis. Hæc autem ſubijciemus, quæ maximè ad ſequentia conducunt.

PROPOSITIO I.

Propoſitio prima. QVadrato aggregati laterum, quadratum differentiæ eorundem addere.

Sit latus vnum a, alterum autem e. Sitque iniunctum quadrato ex $a + e$, addere quadratum ex $a \backsim e$. Quadratum ex $a + e$, eſt $a^2 + 2ae + e^2$, quadratum ex $a - e$, eſt $a^2 - 2ae + e^2$. Facta autem vnius ad alterum additione fit $2a^2 + 2e^2$; Hinc infertur.

THEOREMA.

Theorema primum. QVadratum aggregati laterum, plus quadrato differentiæ eorundem æquatur duplo aggregato quadratorum eorundem laterum.

PROPOSITIO II.

Propoſitio ſecunda. QVadrato aggregati duorum laterum, quadratum differentiæ eorundem ſubducere.

Latus vnum eſto a, alterum autem e; Sit autem iniunctum a quadrato, ex $a + e$, ſubtrahere quadratum ex $a \backsim e$, planis ſingularibus, quibus conſtat quadratum ab $a + e$, auferantur plana ſingularia, quibus conſtat quadratum ex $a \backsim e$, & fit differentia $4ae$. Hinc infertur.

THEOREMA.

Theorema ſecundum. QVadratum aggregati duorum laterum, minus quadrato differentiæ eorundem, æquatur quadruplo plano ſub lateribus.

Proponuntur nonnulla, quæ præcipue ad ſequentia conducunt. Ex hoc infertur, quod etiam in Geometria oſtenditur, nempe planum ſub duobus lateribus, minus eſſe quadrato à dimidio aggregati laterum, quod euidenter colligitur ex præcedenti; Siquidem quadratum aggregati duorum laterum, minus quadrato differentiæ eorundem æquabatur quadruplo plano, ſub lateribus; conſequens propterea eſt, vt æqualitas etiam ſeruetur inter ſubquadrupla extrema; quapropter quadratum aggregati dimidij laterum, maius erit plano ſub lateribus, illique præſtabit, vel quadrato dimidiæ differentiæ, aut non erunt quadrata diuerſa, ſed æqualia.

Digitized by Google

PROPOSITIO III.

DIfferentiam duorum laterum in eorundem aggregatum ducere. *Propoſitio tertia.*

Latus vnum, nempe maius ſit a, at verò minus ſit e. Ducatur $a - e$, in $a \dagger e$, nempe differentia laterum in aggregatum eorundem, ſingularia plana colligantur, eruntque illa a^2; e^2, quæ ſimul juncta æquabuntur producto ex $a - e$, in $a \dagger e$. Hinc.

THEOREMA.

FActum ex differentia duorum laterum, in eorundem aggregatum æquale eſt differentiæ quadratorum. Itaque factum ex $a - e$, in $a \dagger e$, eſt $a^2 - e^2$. *Theorema tertium.*

Ex quo illud intelliges, quod nos in prima Parte etiam oſtendimus Differentia quadratorum, ſi applicetur differentiæ laterum, oritur laterum aggregatum, & contra. Differentia quadratorum ſi applicetur aggregato laterum oritur laterum differentia.

PROPOSITIO IV.

CVbo aggregati duorum laterum, cubum differentiæ eorundem addere. *Propoſitio quarta.*

Latus vnum eſto a, alterum autem e. Oporteat cubo ex $a \dagger e$, addere cubum ex $a \backsim e$. Cubus ex $a \dagger e$, eſt $a^3 \dagger 3a^2e \dagger 3ae^2 \dagger e^3$, at verò cubus ex $a \backsim e$, eſt $a^3 - 3a^2e \dagger 3ae^2 - e^3$, His autem additis fit ſumma $2a^3 \dagger 6ae^2$. Hinc.

THEOREMA.

CVbus aggregati laterum plus cubo differentiæ eorundem, æqualis eſt duplo cubo lateris maioris, plus ſextuplo ſolido à latere maiori, in lateris minoris quadratum. *Theorema quartum.*

PROPOSITIO V.

CVbo aggregati duorum laterum, cubum differentiæ eorundem ſubducere. *Propoſitio quinta.*

Latus vnum eſto a, alterum autem e. Oporteat cubo ex $a \dagger e$, ſubducere cubum ex $a \backsim e$. A ſolidis ſingularibus quibus componitur cubus ex $a \dagger e$, auferantur ſingularia ſolida, quibus conſtat cubus ex $a \backsim e$; fiet enim reſiduum $6a^2e \dagger 2e^3$. Hinc.

THEOREMA.

CVbus aggregati duorum laterum, minus cubo differentiæ eorundem æqualis eſt ſextuplo ſolido à lateris maioris quadrato in latus minus, plus duplo cubo lateris minoris. *Theorema quintum.*

Digitized by Google

PROPOSITIO VI.

Propoſitio ſexta.

QVadrato-quadrato aggregati duorum laterum; quadrato-quadratum differentiæ eorundem addere.

Latus vnum eſto a, alterum autem e; Oporteat quadrato-quadrato ex $a + e$, addere quadratum ex $a \sim e$. Quadrato-quadratum effectum ab $a + e$, conſtat $a^4 + 4 a^3 e + 6 a^2 e^2 + 4 a e^3 + e^4$; at verò quadrato-quadratum effectum ab $a \sim e$, conſtat $a^4 - 4 a^3 e + 6 a^2 e^2 - 4 a e^3 + e^4$. Horum additione facta proueniet ſumma $2 a^4 + 12 a^2 e^2 + 2 e^4$. Hinc.

THEOREMA.

Theorema ſextum.

QVadrato-quadratum aggregati duorum laterum, plus quadrato-quadrato differentiæ eorundem, æquatur duplo aggregato quadrato-quadratorum laterum plus duodecuplo plano-plano à quadrato lateris maioris, in quadratum lateris minoris.

PROPOSITIO VII.

Propoſitio ſeptima.

QVadrato-quadrato aggregati duorum laterum, quadrato-quadratum differentiæ eorundem ſubducere.

Latus vnum eſto a, alterum autem e. Oporteat quadrato-quadrato ex $a + e$, ſubducere quadrato-quadratum ex $a \sim e$; Colligantur ſingularia plano-plana, quibus conſtat, quadrato-quadratum effigendum ab $a + e$; & ab ijs auferantur ſingularia plano-plana, quibus conſtat quadrato-quadratum ab $a \sim e$; proueniet enim differentia $8 a^3 e - 8 a e^3$. Hinc.

THEOREMA.

Theorema ſeptimum.

QVadrato-quadratum aggregati duorum laterum, minus quadrato-quadrato differentiæ eorundem æquatur octuplo plano-plano à cubo lateris maioris in latus minus minuſoctuplo plano-plano à latere maiori in cubum lateris minoris.

PROPOSITIO VIII.

Propoſitio octaua.

QVadrato cubo aggregati duorum laterum, quadrato cubum differentiæ eorundem addere.

Sit latus vnum a, alterum e. Oporteat quadrato cubo ex $a + e$, addere quadrato cubum ex $a \sim e$.

Quadrato cubus ex $a + e$, conſtat $a^5 + 5 a^4 e + 10 a^3 e^2 + 10 a^2 e^3 + 5 a e^4 + e^5$; at verò quadrato-cubus ex $a \sim e$, conſtat $a^5 - 5 a^4 e + 10 a^3 e^2 - 10 a^2 e^3 + 5 a e^4 - e^5$, Facta autem additione, fiet ſumma $2 a^5 + 20 a^3 e^2 + 10 a e^4$: Hinc.

THEO-

THEOREMA.

QVadrato-cubus aggregati duorum laterum, plus quadrato-cubo differentiæ corundem æquatur duplo quadrato-cubo lateris maioris, plus vigecuplo plano-ſolido à cubo lateris maioris, in quadratum lateris minoris, plus decuplo plano ſolido à latere maiori in quadrato-quadratum lateris minoris. *Theorema octauum.*

PROPOSITIO IX.

QVadrato-cubo aggregati duorum laterum, quadrato-cubum differentiæ eorundem demere. *Propoſitio nona.*

Sit latus vnum a, alterum autem e. Oporteat ex quadrato-cubo abs a † e, ſubtrahere quadrato-cubum ab a ∽ e.

A plano-ſolidis, quibus conſtat effingendus quadrato-cubus ab a † e, auferantur ſingularia plano-ſolida, quibus conſtat quadrato-cubus, ab a ∽ e; proueniet enim differentia 10 a^4 e † 20 a^2 e^3 † e^5. Hinc.

THEOREMA.

QVadrato-cubus aggregati duorum laterum, minus quadrato-cubo differentiæ corundem, æquatur decuplo plano-ſolido à quadrato-quadrato lateris maioris in latus minus, plus vigecuplo plano-ſolido à quadrato lateris maioris, in cubum lateris minoris, plus duplo quadrato-cubo lateris minoris. *Theorema nonum.*

PROPOSITIO X.

CVbo-cubo aggregati duorum laterum, cubo-cubum differentiæ eorundem addere. *Propoſitio decima.*

Latus vnum ſit a, alterum autem e. Oporteat cubo-cubo ex a † e, addere cubo-cubum ex a ∽ e.

Cubo-cubus autem effectus ab a † e, conſtat a^6 † 6 a^5 e † 15 a^4 e^2 † 20 a^3 e^3 † 15 a^2 e^4 † 6 a e^5 † e^6. Cubo-cubus autem effectus ab a ∽ e, conſtat a^6 — 6 a^5 e † 15 a^4 e^2 — 20 a^3 e^3 † 15 a^2 e^4 — 6 a e^5 † e^6. Facta autem additione prouenit ſumma 2 a^6 † 30 a^4 e^2 † 30 a^2 e^4 † 2 e^6. Hinc.

THEOREMA.

CVbo-cubus aggregati duorum laterum plus cubo-cubo differentiæ, eorundem, æquatur duplo cubo-cubo ipſorum laterum, plus trigecuplo ſolido-ſolido à quadrato-quadrato lateris maioris in quadratum lateris minoris, plus trigecuplo ſolido-ſolido à quadrato lateris maioris in quadrato-quadratum lateris minoris, plus duplo cubo-cubo lateris minoris. *Theorema decimum.*

PROPOSITIO XI.

Propoſitio decimaprima.

CVbo-cubo aggregati duorum laterum, cubo-cubum differentiæ eorundem demere.

Oporteat cubo-cubo ex $a + e$, demere cubo-cubum ex $a \backsim e$.

A ſolido-ſolidis ſingularibus, quibus conſtat effingendus cubo-cubus ab $a + e$, auſferantur ſingularia ſolido-ſolida, quibus conſtat cubo-cubus ab $a \backsim e$; fiet autem differentia $12 a^5 e + 40 a^3 e^3 + 12 a e^5$. Hinc.

THEOREMA.

Theorema decimumprimum.

CVbo-cubus aggregati duorum laterum, minus cubo-cubo differentiæ eorundem æquatur duodecuplo ſolido-ſolido à quadrato-cubo lateris maioris, in latus minus, plus quadrageecuplo ſolido-ſolido à cubo lateris maioris, in cubum lateris minoris, plus duodecuplo ſolido-ſolido à latere maiori in quadrato-cubum lateris minoris.

PROPOSITIO XII.

Propoſitio decimaſecunda.

DIfferentiam duorum laterum in tria ſingularia plana, quibus conſtat quadratum aggregati ipſorum laterum ſemel ſumpta, ducere.

Latus maius ſit a, at verò minus ſit e. Oporteat $a - e$, ducere in $a^2 + a e + e^2$. Fiat ductio particularis, ſimulque colligantur ſingularia ſolida; eruntq; illa $a^3 - e^3$. Hinc.

THEOREMA.

Theorema decimumſecundum.

QVod fit ex differentia duorum laterum in tria ſingularia plana quibus conſtat quadratum aggregati ipſorum laterum ſemel ſumpta æquale eſt differentiæ cuborum. Vnde.

Differentia cuborum, ſi applicetur ad laterum differentiam, orientur tria ſingularia plana, quibus conſtat quadratum aggregati laterum ſemel ſumpta.

Et permutatim.

Differentia cuborum ſi applicetur ad tria ſingularia plana quibus conſtat quadratum aggregati laterum ſemel ſumpta orietur differentia laterum.

PROPOSITIO XIII.

Propoſitio decimatertia.

AGgregatum duorum laterum in tria ſingularia plana quibus conſtat quadratum differentiæ eorundem laterum ſemel ſumpta, ducere.

Sit latus vnum a, alterum verò e. Oporteat $a + e$, ducere in $a^2 - a e + e^2$, fiat particularis ductio, ſimulque colligantur ſingularia ſolida, & illa quidem erunt $a^3 + e^3$. Hinc.

THEO-

THEOREMA.

QVod ſit ex aggregato duorum laterum in tria ſingularia plana, quibus conſtat quadratum differentiæ ipſorum laterum æquale eſt aggregato cuborum. Vnde ſit, vt. *Theorema decimumtertiũ.*

Aggregatum cuborum ſi applicetur ad aggregatum laterum oriantur tria ſingularia plana, quibus conſtat quadratum differentiæ ipſorum laterum, ſemel ſumpta.

Et permutatim.

PROPOSITIO XIV.

DIfferentiam duorum laterum in quatuor ſingularia ſolida, quibus conſtat cubus aggregati ipſorum laterum ſemel ſumpta, ducere. *Propoſitio decimaquarta.*

Latus maius ſit a, minus autem e. Oporteat $a - e$, ducere in $a^3 \dagger a^2 e \dagger a e^2 \dagger e^3$. Particulari ductione colligantur ſingularia plano-plana, eruntque illa $a^4 - e^4$. Hinc.

THEOREMA.

QVod ſit ex differentia duorum laterum in quatur ſingularia ſolida, quibus conſtat cubus aggregati ipſorum laterum ſemel ſumpta, æquale eſt differentiæ quadrato-quadratorum. Vnde. *Theorema decimumquartũ*

Differentia duorum quadrato-quadratorum. Si applicetur ad diffentiam laterum oriuntur quatuor ſingularia ſolida, quibus conſtat cubus aggregati laterum ſemel ſumpta; Et permutatim.

PROPOSITIO XV.

AGgregatum duorum laterum in quatuor ſingularia ſolida, quibus conſtat cubus differentiæ ipſorum laterum ſemel ſumpta, ducere. *Propoſitio decimaquinta.*

Oporteat ducere $a \dagger e$, aggregatum laterum in $a^3 - a^2 e \dagger a e^2 - e^3$. Palticulari ductione facta colligantur ſingularia plano-plana, eruntque illa $a^4 - e^4$. Hinc.

THEOREMA.

QVod ſit ex aggregato duorum laterum, in quatuor ſingularia ſolida, quibus conſtat cubus differentiæ ipſorum laterum ſemel ſumpta æquale eſt differentiæ quadrato quadratorum. Vnde. *Theorema decimumquintũ*

Differentia quadrato-quadratorum ſi applicetur ad aggregatum laterum oriuntur quatuor ſingularia ſolida, quibus conſtat cubus differentiæ laterum ſemel ſumpta. Præterea.

Vt differentia laterum ad aggregatum, ita quatuor ſingularia ſolida, quibus conſtat cubus differentiæ ipſorum laterum ſemel ſumpta, ad quatuor ſingularia ſolida, quibus conſtat cubus aggregati eorundem laterum, ſemel quoque ſumpta.

Digitized by Google

PROPOSITIO XVI.

Propoſitio decimaſexta. DIfferentiam duorum laterum in ſingularia quinque plano-plana; quibus conſtat quadrato-quadratum aggregati ipſorum laterum ſimul ſumpta, ducere.

Latus maius ſit a, minus autem e; Oporteat $a - e$, ducere in $a^4 + a^3 e + a^2 e^2 + a e^3 + e^4$. Fiat particularis ductio, & ſingularia plano-ſolida colligantur, ea autem erunt $a^5 - e^5$. Hinc.

THEOREMA.

Theorema decimumſextū. QVod fit ex differentia duorum laterum in quinque ſingularia plano-plana, quibus conſtat quadrato-quadratum aggregati ipſorum laterum, ſemel ſumpta æquale eſt differentiæ quadrato-cuborum. Vnde.

Differentia quadrato-cuborum ſi applicetur ad differentiam laterum, oriuntur quinque ſingularia plano-plana, quibus conſtat quadrato-quadratum aggregati ipſorum laterum, ſemel ſumpta. Et contra.

PROPOSITIO XVII.

Propoſitio decimaſeptima. AGgregatum duorum laterum in quinque ſingularia plano-plana, quibus conſtat quadrato-quadratum differentiæ ipſorum laterum ſemel ſumpta, ducere.

Sit latus vnum a, alterum autem e. Oporteat $a + e$, ducere in $a^4 - a^3 e + a^2 e^2 - a e^3 + e^4$. Fiat particularis ductio, & ſingularia plano-ſolida colligantur; Erunt autem illa $a^5 + e^5$. Hinc.

THEOREMA.

Theorema decimiſeptimi. QVod fit ex aggregato duorum laterum in quinque ſingularia plano-plana, quibus conſtat quadrato-quadratum differentiæ ipſorum laterum ſemel ſumpta æquale eſt aggregato quadrato-cuborum. Vnde.

Aggregatum quadrato-cuborum; ſi applicetur ad aggregatum laterum, orientur quinque ſingularia plano-plana, quibus conſtat quadrato-quadratum differentiæ ipſorum laterum ſemel ſumpta, & permutatim.

PROPOSITIO XVIII.

Propoſitio decimaoctaua. DIfferentiam duorum laterum in ſex ſingulatia plano-ſolida, quibus conſtat quadrato-cubus aggregati ipſorum laterum ſemel ſumpta, ducere.

Sit latus maius a, at verò minus ſit e. Oporteat $a - e$, ducere in $a^5 + a^4 e + a^3 e^2 + a^2 e^3 + a e^4 + e^5$. Fiat ductio particularis, & colligantur ſingularia ſolido-ſolida. Etunt autem illa $a^6 - e^6$. Hinc.

THEO-

THEOREMA.

QVod fit ex differentia duorum laterum in ſex ſingularia plano-ſolida, quibus conſtat quadrato-cubus aggregati ipſorum laterum ſemel ſumpta, eſt æquale differentiæ cubo-cuborum. Vnde. *Theorema decimumoctauū*

Differentia cubo-cuborum ſi applicetur ad differentiam laterum orientur, ſex ſingularia plano-ſolida quibus conſtat quadrato-cubus aggregati ipſorum ſemel ſumpta.

PROPOSITIO XIX.

AGgregatum duorum laterum in ſex ſingularia plano-ſolida, quibus conſtat quadrato-cubus differentiæ ipſorum laterum ſemel ſumpta, ducere. *Propoſitio decimanona.*

Latus vnum ſit a, alterum autem e. Oporteat a + e, ducere in $a^5 - a^4 e + a^3 e^2 - a^2 e^3 + a e^4 - e^5$. Fiat particularis ductio, & colligantur ſingularia ſolido-ſolida; Eruntque illa $a^6 - e^6$. Hinc.

THEOREMA.

QVod fit ex aggregato duorum laterum in ſex ſingularia plano-ſolida; quibus conſtat quadrato-cubus differentiæ ipſorum laterum ſemel ſumpta eſt æquale differentiæ cubo-cuborum. Vnde. *Theorema decimumnonū.*

Differentia cubo-cuborum ſi applicetur ad aggregatum duorum laterum, orientur ſex ſingularia plano-ſolida, quibus conſtat quadrato-cubus differentiæ ipſorum laterum ſemel ſumpta. Et.

Vt differentia laterum ad aggregatum, ita ſex ſingularia plano-ſolida, quibus conſtat quadrato-cubus differentiæ ipſorum laterum, ſemel ſumpta, ad ſex ſingularia plano-ſolida, quibus conſtat quadrato-cubus aggregati ipſorum laterum, ſemel quoq; ſumpta.

Hinc etiam, hæc vniuerſalia Theoremata colligere, cum Vieta licet nimirum.

THEOREMA I.

QVod fit ex differentia duorum laterum in ſingularia homogenea; quibus conſtat poteſtas aggregati ipſorum laterum ſemel ſumpta, eſt æquale differentiæ poteſtatum gradus proximè ſuperioris. Vnde colligitur illud. *Theorema primum ex collectis.*

THEOREMA II.

DIfferentia poteſtatum ſi applicetur ad differentiam laterum orientur ſingularia homogenea, quibus conſtat poteſtas gradus proximè inferioris aggregati ipſorum laterum ſemel ſumpta, & contra. *Theorema ſecundum.*

THEO-

Digitized by Google

THEOREMA III.

Theorema tertium.

DIfferentia poteſtatum ſi applicetur ad ſingularia homogenea, quibus conſtat poteſtas gradus proximè inferioris aggregati ipſorum laterum ſemel ſumpta orietur differentia laterum.

THEOREMA IV.

QVod fit ex aggregato duorum laterum in ſingularia homogenea quibus conſtat poteſtas differentiæ ipſorum laterum, ſemel ſumpta eſt æquale aggregato, vel differentiæ poteſtatum ordinis proximè ſuperioris aggregato quidem ſi impar fuerit ſingularium homogeneorum numerus, differentiæ verò ſi par fuerit ſingularium homogeneorum numerus. Vnde colligitur illud.

THEOREMA V.

Theorema quartum.

AGgregatum, vel differentia poteſtatum, ſi applicetur ad aggregatum laterum orientur ſingularia homogenea, quibus conſtat poteſtas ordinis proximè inferioris differentiæ ipſorum laterum ſemel ſumpta. Inſuper.

THEOREMA VI.

Theorema quintum.

SI par fuerit numerus ſingulorum homogeneorum quibus conſtat poteſtas aggregati vel differentiæ laterum, erit vt differentia laterum ad aggregatum, ita ſingularia homogenea quibus conſtat poteſtas differentiæ ipſorum laterum ſemel ſumpta ad ſingularia homogenea, quibus conſtat poteſtas aggregati ipſorum laterum, ſemel ſumpta.

PROPOSITIO XX.

Theorema ſextum.

DIfferentiam duorum laterum in ſeptem ſingularia ſolido-ſolida, quibus conſtat cubo-cubus aggregati ipſorum laterum ſemel ſumpta, ducere.

Latus maius ſit a, at verò minus ſit e. Oporteat $a - e$, ducere in a^6 † $a^5 e$ † $a^4 e^2$ † $a^3 e^3$ † $a^2 e^4$ † $a e^5$ † e^6. Fiat particularis ductio, & colligantur ſingularia plano-ſolida; eruntque illa $a^7 - e^7$. Hinc.

THEOREMA.

Theorema.

QVod fit ex differentia duorum laterum in ſeptem ſingularia ſolido-ſolida, quibus conſtat cubo-cubus aggregati ipſorum laterum ſemel ſumpta, æquale eſt differentiæ quadrato-quadrato-cuborum. Vnde.

PROPOSITIO XXI.

Theorema ſeptimum.

DIfferentia quadrato-quadrato-cuborum, ſi applicetur ad differentiam laterum, orientur ſeptem ſingularia ſolido-ſolida, quibus conſtat cubo-cubus aggregati ipſorum laterum, ſemel ſumpta, & permutatim.

THEO-

PROPOSITIO XXI.

AGgregatum duorum laterum in ſeptem ſingularia ſolido-ſolida, quibus conſtat cubo-cubus differentiæ ipſorum laterum, ſemel ſumpta ducere. *Propoſitio vigeſimaprima.*

Latus vnum ſi a, alterum autem e. Oporteat a † b, ducere in $a^6 \dagger a^5 e \dagger a^4 e^2 \dagger a^3 e^3 \dagger a^2 e^4 \dagger a e^5 \dagger e^6$.

Fiat particularis ductio, & colligantur ſingularia plano-plano-ſolida, erunt illa $a^7 - e^7$. Hinc,

THEOREMA.

QVod fit ex aggregato duorum laterum in ſeptem ſingularia ſolido-ſolida, quibus conſtat cubo-cubus differentiæ ipſorum laterum ſemel ſumpta æquale eſt differentiæ quadrato-quadrato-cuborum. Vnde illud infertur. *Theorema vigeſimum primum.*

Differentia quadrato-quadrato-cuborum, ſi applicetur ad aggregatum laterum, orientur ſeptem ſingularia ſolido-ſolida, quibus conſtat cubo-cubus differentiæ ipſorum laterum ſemel ſumpta, & permutatim.

Geneſis Poteſtatum affectarum, & primò affirmatè.

PROPOSITIO I.

QVadratum affectum adiunctione plani ſub latere adſcita congruenter ſublaterali coefficiente longitudine, componere. *Poteſtatum affectarum geneſis. Propoſitio prima.*

Sit binomia radix a † e, coefficiens ſublateralis b, longitudo. Oporteat quadratum abs a † e, affectum adiunctione plani ſub b, & a † e, componere. Ducatur a † e, in a † e † b, & colligantur effecta ſingularia plana, eruntq; illa $a^2 \dagger 2\,a\,e \dagger e^2 \dagger a\,b \dagger e\,b$, quæ quidem æquabuntur eidem quadrato ex a † e, affecto adiunctione plani ex a † e, in b, longitudinem. Hinc.

THEOREMA.

SI fuerint duo latera, & præterea coefficiens ſublateralis longitudo. Quadratum lateris primi, plus duplo-plano à latere primo in latus ſecundum, plus quadrato lateris ſecundi, plus plabo à latere primo in coefficientem longitudinem, plus plano à latere ſecundo in eandem coefficientem longitudinem, æquatur quadrato aggregati laterum affecto adiunctione plani ſub dicto aggregato, & coefficiente longitudine. *Theorema primum.*

Huius Theorematis veritas innoteſcit ex opere multiplicationis a † e † b, per a † e.

Hinc

Plana ſingularia quæ compoſitio affecta puræ compoſitioni addit.

Hinc facilè colliguntur plana ſingularia, quæ compoſitio affecta puræ compoſitioni addit, cùm ſcilicet ab eadem binomia radice duo componuntur quadrata, vnum quidem purum, alterum verò affirmatè affectum ſub eadem binomia radice, & adſcita coefficiente longitudine. Plana verò ſunt.

Planum à latere primo in coefficientem longitudinem.

Planum à latere ſecundo in eandem coefficientem longitudinem.

PROPOSITIO II.

Propoſitio ſecunda.

CVbum affectum adiunctione ſolidi ſub latere à binomia radice adſcito congruenter ſublaterali plano coefficiente, componere.

Sit binomia radix $a \dagger e$, coefficiens autem ſublaterale b pl. Oporteat cubum abs $a \dagger e$, affectum adiunctione ſolidi ſub b plano, & ipſa binomia radice $a \dagger e$, componere. Effingatur quadratum ex $a \dagger e$, & in illud ſuperaddito b pl. ducatur $a \dagger e$. Et colligantur effecta ſingularia ſolida, eruntque illa $a^3 \dagger 3a^2e \dagger 3ae^2 \dagger e^3 \dagger ab$ pl. $\dagger$ e b pl. quæ æquabuntur cubo abs $a \dagger e$, affecto adiunctione ſolidi ſub $a \dagger e$, & b pl. Hinc ordinatur.

THEOREMA.

Theorema ſecundum.

SI fuerint duo latera, & præterea coefficiens ſublaterale planum. Cubus lateris primi, plus triplo ſolido à quadrato lateris primi in latus ſecundum, plus cubo lateris ſecundi, plus ſolido à letere primo in conſiciens planum, plus ſolido à latere ſecundo in idem planum coefficiens æquatur cubo aggregati laterum affecto adiunctione ſolidi ſub aggregato prædicto, & coefficiente plano. Huius Theorematis veritas innoteſcit ex opere multiplicationis $a^2 \dagger 2ae \dagger e^2 \dagger$ b pl. per $a \dagger e$. Hinc.

Solida ſingularia, quæ cōpoſitio affecta, puræ compoſitioni addit.

Facilè colliguntur ſingularia ſolida, quæ compoſitio affecta iam dicta puræ compoſitioni addit, cum ſcilicet ab eadem binomia radice duo componuntur cubi, vnus quidem purus, alter autem affectus ſub eadem binomia radice, & adſcito coefficiente plano-ſolida verò ſingularia ſunt.

Solidum à latere primo in coefficiens planum.

Solidum in idem planum coefficiens.

PROPOSITIO III.

Propoſitio tertia.

CVbum affectum adiunctione ſolidi ſub quadrato à radice binomia adſcita congruenter ſub quadratica longitudine, componere.

Sit binomia radix $a \dagger e$, coefficiens ſubquadratica b, longitudo. Oporteat cubum abs $a \dagger e$, affectum adiunctione ſolidi ſub b, & quadrato abs $a \dagger e$, componere. Effingatur quadratum ex $a \dagger e$, illudque ducatur in $a \dagger e \dagger b$, & colligantur effecta ſingularia ſolida, eruntque illa $a^3 \dagger 3a^2e \dagger 3ae^2 \dagger e^3 \dagger a^2b \dagger 2aeb \dagger e^2b$, quæ propterea erunt æqualia cubo ex $a \dagger e$, affecto adiunctione ſolidi ſub quadrato ipſius $a \dagger e$, & longitudine b. Hinc autem.

THEO-

THEOREMA.

Geneſeos cubi affecti affirmatè ſub quadrato.

SI fuerint duo latera, ac inſuper coefficiens ſubquadratica longitudo: Cubus lateris primi, plus triplo ſolido à quadrato lateris primi in latus ſecundum, plus triplo ſolido à latere primo in lateris ſecundi quadratum, plus cubo lateris ſecundi, plus ſolido à lateris primi quadrato in coefficientem longitudinem, plus ſolido duplo à plano ſub lateribus in coefficientem longitudinem, plus ſolido à lateris ſecundi quadrato in coefficientem longitudinem, æqualis eſt cubo ab aggregato laterum affecto adiunctione ſolidi ſub iam dicti aggregati laterum quadrato, & coefficiente longitudine. *Theorema tertium.*

Huius Theorematis veritas innoteſcit ex opere multiplicationis $a^2 \dagger 2\,a\,e \dagger e^2$, per $a \dagger e \dagger b$.

Ex his facilè conſtat quæ nam ſint ſingularia ſolida, quæ compoſitio affecta, vt dictum eſt, addit compoſitioni puræ. Sunt autem.

Solidum à quadrato lateris primi in coefficientem longitudinem.

Solidum duplum à plano, ſublateribus in coefficientem longitudinem.

Solidum à quadrato lateris ſecundi in coefficientem longitudinem.

PROPOSITIO IV.

QVadrato-quadratum affectum adiunctione plano-plani ſub latere à binomia radice adſcito congruenter ſublaterali coefficiente ſolido, componere. *Propoſitio quarta.*

Sit binomia radix $a \dagger e$, coefficiens ſublaterale b, ſolidum. Oporteat quadrato-quadratum ab $a \dagger e$, affectum adiunctione plano-plani ſub $a \dagger e$, & ipſo b, ſolido, componere. Effingatur cubus ex $a \dagger e$, & ita in illum ſuperaddito b, ſolido ducatur $a \dagger e$, & colligantur effecta ſingularia plano-plana. Eruntq; illa $a^4 \dagger 4\,a^3\,e \dagger 6\,a^2\,e^2 \dagger 4\,a\,e^3 \dagger e^4 \dagger a\,b$ ſol. $\dagger\ e\,b$ ſol. Et hæc æquabuntur propterea quadrato-quadrato ipſius $a \dagger e$, affecto adiunctione plano-plani ſub $a \dagger e$, & ipſo b ſol. Hinc.

THEOREMA.

Geneſeos quadrato-quadrati affecti affirmatè ſub latere.

SI fuerint duo latera, & inſuper coefficiens ſolidum; Quadrato-quadratum lateris primi, plus plano-plano quadruplo à cubo lateris primi in latus ſecundum, plus ſextuplo plano-plano à quadrato lateris primi in lateris ſecundi quadratum, plus quadruplo plano-plano à latere primo in lateris ſecundi cubum, plus quadrato-quadrato lateris ſecundi, plus plano-plano à latere primo in coefficiens ſolidum, plus plano-plano à latere ſecundo in coefficiens ſolidum, æquale eſt quadrato-quadrato aggregati laterum affecto adiunctione plano plani ſub dicto aggregato, & coefficiente ſolido. *Theorema quartum.*

Huius Theorematis veritas innoteſcit ex opere multiplicationis $a^3 \dagger 3\,a^2\,e \dagger 3\,a\,e^2 \dagger e^3 \dagger b$ ſol. per $a \dagger e$.

Digitized by Google

PROPOSITIO V.

Propoſitio quinta.

QVadratum affectum adiunctione plano-plani ſub cubo à radice binomia adſcito congruenter ſub cubica coefficiente longitudine, componere.

Sit binomia radix a † e, coefficiens autem b, longitudo. Oporteat quadrato-quadratum ab a † e, affectum adiunctione plano-plani ſub cubo ex a † e, in b, longitudinem, componere. Effingatur cubus ex a † e, & in illum ducatur a † e † b, & colligantur effecta ſingularia plano-plana. Eruntque illa a^4 † 4 a^3 e † 6 a^2 e^2 † 4 a e^3 † e^4 † a^3 b † 3 a^2 e b † 3 a e^2 b † e^3 b, quæ proinde æqualia erunt quadrato-quadrato ipſius a † e, affecto adiunctione plano-plani ſub cubo ipſius a † e, & ipſa b, longitudine. Hinc infertur.

THEOREMA.

Geneſeos quadrato-quadrati affecti ſub cubo, affirmatè.

Theorema quintum.

SI fuerint duo latera, & coefficiens longitudo: Quadrato-quadratum lateris primi, plus quadruplo plano-plano à cubo lateris primi in latus ſecundum, plus ſextuplo plano-plano à quadrato lateris primi in quadratum lateris ſecundi, plus quadruplo plano-plano à latere primo in lateris ſecundi cubum, plus quadrato-quadrato lateris ſecundi, plus plano-plano à cubo lateris primi in coefficientem longitudinem, plus triplo plano-plano à ſolido ſub quadrato lateris primi, & latere ſecundo in coefficientem longitudinem, plus plano-plano triplo à ſolido ſub latere primo, & lateris ſecundi quadrato in coefficientem longitudinem, plus plano-plano à cubo lateris ſecundi in coefficientem longitudinem, æquatur quadrato-quadrato aggregati laterum affecto adiunctione plano-plani ſub cubo aggregati prædicti, & coefficiente longitudine.

Huius Theorematis veritas innoteſcit ex opere multiplicationis a^3 ✠ 3 a^2 e ✠ 3 a e^2 ✠ e^3, per a ✠ e ✠ b.

Ex his manifeſtum eſt quid compoſitio affecta, vt dictum eſt, addat compoſitioni puræ, ſunt autem hæc ſingularia plano-plana.

Plano-planum à lateris primi cubo.

Plano-planum triplum factum à quadrato lateris primi in planum à latere ſecundo in coefficientem longitudinem.

Plano-planum triplum factum à latere primo in ſolidum à quadrato lateris ſecundi in coefficientem longitudinem.

Plano-planum à cubo lateris ſecundi in coefficientem longitudinem.

PROPOSITIO VI.

Propoſitio ſexta.

QVadrato-quadratum affectum adiunctione duplicis plano-plani, vnius ſub latere, & alterius ſub quadrato, à radice binomia adſcitis congruenter ſublaterali coefficiente ſolido, & ſubquadratico coefficiente plano, componere.

Sit binomia radix a ✠ e, coefficiens ſublaterale b ſolidum coefficiens ſubquadraticum d planum. Oporteat quadrato-quadratum abs a ✠ e, affectum adiunctione duplicis plano-plani, vnius ſub a ✠ e, & b ſol. alterius ſub a † e, quadrato, & d plano componere. Effformetur quadratum ex a ✠ e, & in illud ſuperaddito

d pl.

d pl. ducatur $a + e$, & in effecta ſolida ſuperaddito b ſol. rurſus ducatur $a + e$, colliganturque effecta ſingularia plano-plana, quæ quidem erunt ſequentia $a^4 + 4a^3e + 6a^2e^2 + 4ae^3 + e^4 + a^2$ d pl. $+ 2ae$ d pl. $+ e^2$ d pl. $+ ab$ ſol. $+ eb$ ſol. Hæc igitur ſunt plano-plana, quæ æquantur quadrato-quadrato ipſius $a + e$, affecto adiunctione plano-plani ſub quadrato ipſius $a + e$, & d plano, & plano-plani ſub $a + e$, & b ſol. Hinc autem elicitur.

THEOREMA.

Theorema ſextum.

SI fuerint duo latera, & præterea coefficiens duplex, vnum quidem planum ſubquadraticum, alterùm verò ſublaterale ſolidum. Erit propterea.

Quadrato-quadratum lateris primi, plus quadruplo plano plano à cubo lateris primi in latus ſecundum, plus ſextuplo plano-plano à quadrato lateris primi in lateris ſecundi quadratum, plus quadruplo plano-plano à latere primo in lateris ſecundi cubum, plus quadrato-quadrato lateris ſecundi, plus plano-plano à quadrato lateris primi in coefficiens planum, plus duplo plano-plano à plano ſub lateribus in planum coefficiens, plus plano-plano à quadrato lateris ſecundi in coefficiens planum, plus plano-plano à latere primo in coefficiens ſolidum, plus plano-plano à latere ſecundo in coefficiens ſolidum; æquale eſt quadrato-quadrato aggregati laterum affecto adiunctione duplicis plano plani vnius ſub quadrato aggregati laterum, & coefficiente plano, alterius ſub aggregato laterum, & coefficiente ſolido. Huius Theorematis veritas ex opere multiplicationis innoteſcit. Hinc.

Patet quid prædicta compoſitio affecta addat puræ &c.

PROPOSITIO VII.

Propoſitio ſeptima.

QVadrato-cubum affectum adiunctione plano-ſolidi ſub latere à radice binomia adſcito congruenter ſublaterali plano-plano, componere.

Sit binomia radix $a + e$, coefficiens ſubtaterale b plano-planum. Oporteat componere quadrato-cubum ab $a + e$, affectum adiunctione plano-ſolidi ſub $a + e$, & b plano-plano. Componatur quadrato quadratum ab $a + e$, & in illud ſuperaddito b plano-plano ducatur $a + e$, colliganturque effecta ſingularia plano-ſolida. Eruntque illa $a^5 + 5a^4e + 10a^3e^2 + 10a^2e^3 + 5ae^4 + e^5 + ab$ pl. pl. $+ eb$ pl. pl. quæ æquabuntur quadrato-cubo ipſius $a + e$, affecto adiunctione plano ſolidi ſub $a + e$, & b pl. pl. hinc autem colligitur.

THEOREMA.

Theorema ſeptimum.

SI fuerint duo latera, & inſuper coefficiens ſublaterale plano-planum; Quadrato-cubus lateris primi, plus quintuplo plano-ſolido à quadrato-quadrato lateris primi in latus ſecundum, plus decuplo plano-ſolido à cubo lateris primi in lateris ſecundi quadratum, plus decuplo plano-ſolido à quadrato lateris primi in lateris ſecundi cubum, plus quituplo plano-ſolido à latere primo in lateris ſecundi quadrato-quadratum, plus quadrato-cubo lateris ſecundi, plus plano-ſolido à latere primo in coefficiens plano-planum, plus plano-ſolido à latere ſecundo in coefficiens plano-planum æqualis eſt quadrato-cubo aggregati laterum affecto adiunctione plano-ſolidi ſub aggregato laterum, & coefficiente plano-plano. Huius Theorematis veritas ex opere multiplicationis innoteſcit.

PROPOSITIO VIII.

Propoſitio octaua.

QVadrato-cubum affectum adiunctione plano-ſolidi ſub cubo à radice binomia adſcito congruenter ſubcubico coefficiente plano, componere.

Sit binomia radix a + e, ſubcubicum verò coefficiens b planum. Oporteat quadrato-cubum ex a + e, affectum adiunctione plano-ſolidi ſub a + e, cubo, & b plano, componere. Sumatur quadratum ex a + e, & in illud ſuperaddito b plano, ducatur cubus ex a + e, & colligantur effecta ſingularia plano-ſolida, eruntq; illa $a^5 + 5\,a^4 e + 10\,a^3 e^2 + 10\,a^2 e^3 + 5\,a e^4 + e^5 + a^3$ b pl. + 3 a^2 e b pl. + 3 a e^2 b pl. + e^3 b pl. Hinc.

THEOREMA.

Theorema octauum.

SI fuerint duo latera, & coefficiens planum; Quadrato-cubus lateris primi, plus quintuplo plano-ſolido à quadrato-quadrato lateris primi in latus ſecundum, plus decuplo plano-ſolido à cubo lateris primi in lateris ſecundi quadratum, plus decuplo plano-ſolido à quadrato lateris primi in lateris ſecundi cubum, plus quintuplo plano-ſolido à latere primo in lateris ſecundi quadrato-quadratum, plus quadrato-cubo lateris ſecundi, plus plano-ſolido à cubo lateris primi in coefficiens planum, plus triplo plano-ſolido à ſolido ſubquadrato lateris primi, & latere ſecundo in coefficiens planum, plus triplo plano ſolido à ſolido ſub latere primo, & lateris ſecundi quadrato in coefficiens planum, plus plano-ſolido à cubo lateris ſecundi in planum coefficiens æqualis eſt quadrato-cubo aggregati laterum affecto adiunctione plano-ſolidi ſub plano coefficiente, & cubo aggregati laterum. Huius autem Theorematis veritas ex opere multiplicationis innoteſcit.

PROPOSITIO IX.

Propoſitio nona.

CVbo-cubum affectum adiunctione ſolido-ſolidi ſub latere à binomia radice adſcito congruenter ſublaterali coefficiente plano-ſolido, componere.

Sit binomia radix a + e, coefficiens autem ſublaterale b plano-ſolidum. Oporteat cubo-cubum ab a + e, affectum adiunctione ſolido-ſolidi ex a + e, in b plano-ſolidum, componere. Sumatur quadrato-cubus ab a + e, & in illum ſuperaddito b plano-ſolido, ducatur a + e, & colligantur effecta ſingularia ſolido ſolida; eruntque illa $a^6 + 6\,a^5 e + 15\,a^4 b^2 + 20\,a^3 e^3 + 15\,a^2 e^4 + 6\,a e^5 + e^6$ + a b pl. ſol. + e b pl. ſol. quæ quidem æquabuntur cubo-cubo ex a + e, plus ſolido-ſolido ex a + e, in b plano-ſolidum. Hinc.

THEOREMA.

Theorema nonum.

SI fuerint duo latera vna cum coefficiente ſublaterali plano-ſolido. Cubo-cubus lateris primi, plus ſextuplo ſolido-ſolido à quadrato-cubo lateris primi in latus ſecundum, plus decuquintuplo ſolido-ſolido à quadrato-quadrato lateris primi in lateris ſecundi quadratum, plus vigecuplo ſolido-ſolido à cubo lateris primi in lateris ſecundi cubum, plus decuquintuplo ſolido-ſolido à quadrato lateris primi in lateris ſecundi quadrato-quadratum, plus ſextuplo ſolido-ſolido à latere primo in la-

in lateris ſecundi quadrato-cubum, plus cubo-cubo lateris ſecundi, plus ſolido-ſolido à latere primo in coefficiens plano-ſolidum, plus ſolido-ſolido à latere ſecundo in coefficiens plano-ſolidum æqualis eſt cubo-cubo aggregati laterum, affecto adiunctione ſolido-ſolidi ſub coefficiente plano-ſolido, & aggregato laterum. Theorematis veritas ex opere multiplicationis innoteſcit.

Geneſis Poteſtatum affectarum negatè.

PROPOSITIO I.

QVadratum affectum multa plani ſub latere à binomia, radice adſcito congruenter ſublaterali coefficiente longitudine, componere. *Propoſitio prima.*

Sit binomia radix $a + e$; coefficiens ſublateralis b longitudo. Oporteat quadratum abs $a + e$, affectum multa plani ſub $a + e$, & b longitudine, componere. Ducatur $a + e$, in $a + e - b$, & erunt effecta plana $a^2 + 2ae + e^2 - ab - eb$, quæ quidem æquabuntur quadrato ipſius $a + e$, affecto multa plani ex $a + e$, in b longitudinem; Hinc,

THEOREMA.

SI fuerint duo latera, vna cum coefficiente ſublaterali longitudine: Quadratum lateris primi, plus duplo plano à latere primo in latus ſecundum, plus quadrato lateris ſecundi, minus plano à latere primo in coefficientem longitudinem, minus plano à latere ſecundo in coefficientem longitudinem, æquale eſt quadrato aggregati laterum, affecto multa plani ſub dicto aggregato, & coefficiente longitudine. *Theorema primum.*

PROPOSITIO II.

CVbum affectum multa ſolidi ſub latere à radice binomia, adſcito congruenter ſublaterali coefficiente plano, effingere. *Propoſitio ſecunda.*

Sit binomia radix $a + e$, coefficiens autem ſublaterale b pl. Oporteat cubum abs $a + e$, affectum multa ſolidi ex $a + e$, in b pl. effingere. Componatur quadratum ex $a + e$, & in illud multatum b plano, ducatur $a + e$. Colligantur autem effecta ſingularia ſolida. Eruntque illa $a^3 + 3a^2e + 3ae^2 + e^3 - a$ b pl. $- e$ b pl. & æquabuntur cubo ipſius $a + e$, affecto multa ſolidi ex $a + e$, in b planum. Hinc.

THEOREMA.

SI fuerint duo latera, & prætereà coefficiens ſublaterale planum Cubus lateris primi, plus triplo ſolido à quadrato lateris primi in latus ſecundum, plus triplo ſolido à latere primo in lateris ſecundi quadratum, plus cubo lateris ſecundi, minus ſolido à latere primo in coefficiens planum, minus ſolido à latere ſecundo in planum coefficiens eſt æqualis cubo aggregati laterum affecto multa ſolidi ſub coefficiente plano, & aggregato laterum. Theorematis veritas ex opere multiplicationis innoteſcit. *Theorema ſecundum.*

PROPO-

PROPOSITIO III.

Propoſitio tertia.

CVbum affectum multa ſolidi ſub quadrato, à radice binomia, adſcito congruenter coefficiente ſubquadratica longitudine, componere.

Sit binomia radix $a + e$, coefficiens autem ſubquadratica ſit b longitudo. Oporteat cubum ex $a + e$, affectum multa ſolidi ſub $a + e$, quadrato, & b longitudine, componere. Effingatur quadratum ex $a + e$, & illud ducatur in $a + e - b$, & colligantur effecta ſingularia ſolida, eruntque illa $a^3 + 3\,a^2 e + 3\,a e^2 + a^3 - a^2 b - a\,a\,e\,b - e^2 b$. Quæ quidem æqualia erunt $a + e$, cubo affecto multa ſolidi abs $a + e$, quadrato in b longitudinem. Hinc.

THEOREMA.

Theorema tertium.

SI fuerint duo latera, & inſuper coefficiens ſubquadratica longitudo, Cubus lateris primi, plus triplo ſolido à quadrato lateris primi in latus ſecundum, plus triplo ſolido à latere primo in lateris ſecundi quadratum, plus cubo lateris ſecundi, minus ſolido à quadrato lateris primi in coefficientem longitudinem, minus ſolido duplo à plano ſub lateribus in coefficientem longitudinem, minus ſolido à quadrato lateris ſecundi in coefficientem longitudinem, æquabitur cubo aggregati laterum affecto multa ſolidi ſub coefficiente longitudine, & quadrato aggregati laterum.

Generis Poteſtatum affectarum negatè mixtim, & affirmatè.

PROPOSITIO I.

Propoſitio prima.

QVadrato-quadratum affectum adiunctione plano-plani ſub latere, multa verò plano-plani ſub cubo à radice binomia, adſcito congruenter ſublaterali coefficiente ſolido, & ſubcubica coefficiente longitudine, componere;

Sit binomia radix $a + e$, coefficiens ſublaterale b ſolidum, coefficiens ſubcubica d longitudo. Oporteat quadrato-quadratum ex $a + e$, affectum adiunctione plano-plani ex $a + e$, in b ſolidum; multa verò plano-plani abs $a + e$, cubo in d longitudinem, componere. Ducatur quadratum ex $a + e$, in $a + e - d$, & in effecta ſolida ſuperaddito b ſolido, ducatur $a + e$, & colligantur ſingularia effecta plano-plana, eruntque illa $a^4 + 4\,a^3 e + 6\,a^2 e^2 + 4\,a e^3 + e^4 - a^3 d - 3\,a^2 e d - 3\,a e^2 d - e^3 d + a\,b$ ſol. $+ e\,b$ ſol. Quæ quidem æqualia erunt quadrato-quadrato abs $a + e$, affecto multa plano-plani ex $a + e$, cubo in d, longitudinem, & adiunctione plano-plani ex $a + e$, radice in b ſolidum. Hinc.

THEOREMA

Theorema primum.

SI fuerint duo latera, & præterea coefficiens cubica longitudo atq. etiam coefficiens ſublaterale ſolidum, Quadrato-quadratum lateris primi, plus quadruplo plano-plano à cubo lateris primi in latus ſecundum, plus ſextuplo plano-plano à longitu-

quadrato lateris primi in lateris ſecundi quadratum, plus quadruplo plano-plano à latere primo in lateris ſecundi cubum, plus quadrato-quadrato lateris ſecundi minus plano-plano à cubo lateris primi in coefficientem longitudinem, minus triplo plano-plano à ſolido ſub quadrato lateris primi, & latere ſecundo in coefficientem longitudinem, minus triplo plano-plano à ſolido ſub latere primo, & lateris ſecundi quadrato in coefficientem longitudinem minus plano-plano à cubo lateris ſecundi in coefficientem longitudinem, plus plano-plano, à latere primo in coefficiens ſolidum, plus plano-plano à latere ſecundo in coefficiens ſolidum, æquatur quadrato-quadrato aggregati laterum affecto multa plano-plani ſub cubo aggregati laterum; & coefficiente longitudine, adiunctione verò plano-plani ſub aggregato eodem, & coefficiente ſolido.

PROPOSITIO II.

QVadrato-quadratum affectum multa plano-plani ſub latere adiunctione verò plano-plani ſub cubo, à binomi radice adſcitis congruenter ſublaterali coefficiente ſolido, & ſubcubica coefficiente longitudine, componere. *Propoſitio ſecunda.*

Sit binomia radix $a + e$, coefficiens ſublaterale b ſol. coefficiens ſubcubica d longitudo, Oporteat ex $a + e$, quadrato-quadratum affectum multa plano-plani ſub $a + e$, & b ſolido, & adiunctione plano-plani ſub $a + e$, cubo, & d longitudine, componere. Ducatur quadratum ex $a + e$ in $a + e + d$, & in effecta ſolida multata b ſolido; ducatur $a + e$, & orta plano-plana erunt $a^4 + 4a^3e + 6a^2e^2 + 4ae^3 + e^4 + a^3d + 3a^2ed + 3ae^2d + e^3d - ab$ ſol. $- eb$ ſol. quæ quidem æquabuntur quadrato-quadrato ex $a + e$, affecto adiunctione plano-plani ſub $a + e$, cubo, & longitudine, & multa plano-plani ſub $a + e$, radice, & ipſo b ſolido. Hinc autem,

THEOREMA.

SI fuerint duo latera, & inſuper coefficiens ſubcubica longitudo, atque etiam coefficiens ſublaterale ſolidum; Quadrato-quadratum lateris primi, plus quadruplo plano-plano à cubo lateris primi in latus ſecundum, plus ſextuplo plano-plano à quadrato lateris primi in lateris ſecundi quadratum, plus quadruplo plano-plano a latere primo in lateris ſecundi cubum, plus quadrato-quadrato lateris ſecundi, plus plano plano à cubo lateris primi in coefficientem longitudinem, plus triplo plano plano à ſolido ſub quadrato lateris primi, & latere ſecundo in coefficientem longituninem, plus plano-plano triplo à ſolido ſub latere, primo, & lateris ſecundi quadrato in coefficientem longitudinem, plus plano-plano à cubo lateris ſecundi in coefficientem longitudinem minus plano-plano à latere primo in coefficiens ſolidum minus plano-plano à latere ſecundo in coefficiens ſolidum æquatur quadrato-quadrato aggregati laterum affecto adiunctiue plano-plani ſub cubo aggregati laterum, & coefficiente longitudine, multa verò plano-plani ſub ipſo laterum aggregato, & coefficiente ſolido. *Theorema ſecundum.*

PROPOSITIO III.

QVadrato-cubum affectum adiunctione plano-ſolidi ſub latere, & multa plano-ſolidi ſub cubo à binomia radice adſcitis congruenter ſublaterali coefficiente plano- *Propoſitio tertia.*

plano-plano, & ſubcubico coefficiente plano, componere.

Sit binomia radix $a + e$, coefficiens ſublaterale b plano-planum; ſubcubicum coefficiens d planum. Effingendus verò ſit quadrato-cubus ab $a + e$, affectus adiunctione plano-ſolidi ſub $a + e$, radice, & b plano-plano, multa verò plano-ſolidi ſub $a + e$, cubo, & d plano, componatur quadratum ab $a + e$, & in illud multatum d plano, ducatur idem quadratum ab $a + e$, & orta plano-plana augeantur b plano-plano, & ducantur in $a + e$, orientur hæc plano-ſolida $a^5 + 5 a^4 e + 10 a^3 e^2 + e^5 + 10 a^2 b^3 + 5 a e^4 + e^5 - a^3$ d pl. $- 3 a^2 e$ d pl. $- 3 a e^2$ d pl. $- e^3$ d pl. $+ a b$ pl. pl. $+ e b$ pl pl. Hinc.

THEOREMA.

Theorema tertium.

SI fuerint duo latera, & inſuper ſubcubicum coefficiens planum, nec non, & ſublaterale coefficies plano-planum Quadrato-cubus lateris primi, plus quintuplo plano-ſolido à quadrato-quadrato lateris primi in latus ſecundum, plus decuplo plano-ſolido à cubo lateris primi in lateris ſecundi quadratum, plus decuplo plano-ſolido à quadrato-lateris primi in lateris ſecundi cubum, plus quintuplo plano-ſolido à latere primo in lateris ſecundi quadratoquadratum, plus quadrato-cubo lateris ſecundi, minus plano-ſolido à cubo lateris primi in coefficiens planum, minus triplo plano-ſolido à ſolido ſubquadrato lateris primi, & latere ſecundo in coefficiens planum, minus plano-ſolido à ſolido ſub latere primo, & lateris ſecundi quadrato in coefficiens planum, minus plano-ſolido à cubo lateris ſecundi in coefficiens planum, plus plano-ſolido à latere primo in coefficiens plano-planum, plus plano-ſolido à latere ſecundo in coefficiens plano-planum æquatur quadrato-cubo aggregati laterum affecto multa plano-ſolidi ſub cubo aggregati laterum, & coefficiente plano adiunctione verò plano ſolidi ſub aggregato laterum, & coefficiente plano-plano.

Geneſis poteſtatum auulſarum.

PROPOSITIO I.

Propoſitio prima.

PLanum ſub latere, affectum multa quadrati à binomia radice adſcita congruenter ſublaterali coefficiente longitudine, componere.

Sit binomia radix $a + e$, ſublateralis coefficiens b longitudo. Oporteat planum ſub $a + e$, & b longitudine affectum multa $a + e$, quadrati, componere. Ducatur $b - a - e$, in $a + e$, & orientur ſingularia plana $a b + e b - a^2 - 2 a e - e^2$. Et hinc ordinatur.

THEOREMA.

Theorema primum.

SI fuerint duo latera, atque etiam ſublateralis coefficiens longitudo, Planum à latere primo in coefficientem longitudinem, plus plano à latere ſecundo in coefficientem longitudinem, minus quadrato lateris primi, minus duplo plano ſub lateribus, minus quadrato lateris ſecundi, æquatur plano ſub aggregato laterum, & coefficiente illa, affecto multa quadrati ab aggregato laterum.

PROPO-

PROPOSITIO II.

SOlidum ſub latere affectum multa cubi, à binomia radice, adſcito coogruenter ſublaterali coefficiente plano, effingere. *Propoſitio ſecunda.*

Sit binomia radix $a \dagger e$, ſublaterale coefficiens b pl. Effingendum ſit ſolidum ſub $a \dagger e$, & b pl. affectum multa cubi ex $a \dagger e$. Ducatur $a \dagger e$, in b planum, multetur $a \dagger e$ cubo. Orientur ſolida $a\, b$ pl. $\dagger\, e\, b$ pl. $- a^3 - 3 a^2 e - 3 a e^2 - e^3$. Hinc.

THEOREMA.

SI fuerint duo latera, vna cum coefficiente ſublaterali plano; Solidum à latere primo in coefficiens planum, plus ſolido à latere ſecundo in coefficiens planum minus cubo lateris primi, minus triplo ſolido à quadrato lateris primi in latus ſecundum, minus triplo ſolido à latere primo in lateris ſecundi quadratum, minus cubo lateris ſecundi, æquatur ſolido ſub aggregato laterum, & coefficiente ſublaterali plano, affecto multa cubi ab eodem aggregato laterum. *Theorema ſecundum.*

PROPOSITIO III.

SOlidum ſub quadrato affectum multa cubi à binomia radice, adſcita congruenter ſubquadratica coefficiente longitudine, effingere. *Propoſitio tertia.*

Sit binomia radix $a \dagger e$, ſubquadratica coefficiens b longitudo. Oporteat ſolidum ſub $a \dagger e$, quadrato, & b longitudine, affectum multa cubi ab $a \dagger e$, componere. In $a \dagger e$, quadratum, ducatur $b - a - e$, & orientur ſolida $a^2 b \dagger 2 a e b \dagger e^2 b - a^3 - 3 a^2 e - 3 a e^2 - e^3$. Hinc.

THEOREMA.

SI fuerint duo latera, & ſubquadratica coefficiens longitudo; Solidum à quadrato lateris primi in coefficientem longitudinem, plus duplo ſolido à plano ſub lateribus in coefficientem longitudinem, plus ſolido à quadrato lateris ſecundi in coefficientem longitudinem, minus cubo lateris primi, minus triplo ſolido à quadrato lateris primi in latus ſecundum, minus triplo ſolido à latere primo in lateris ſecundi quadratum, minus cubo lateris ſecundi, eſt æquale ſolido ſub quadrato aggregati laterum, & coefficiente longitudine, affecto multa cubi ab aggregato laterum. *Theorema tertium.*

PROPOSITIO IV.

PLano-planum ſub latere affectum multa quadrato-quadrati à binomia radice, adſcito congruenter ſublaterali coefficiente ſolido, componere. *Propoſitio quarta.*

Sit binomia radix a † e, coefficiens ſublaterale b ſolidum. Oporteat componere plano-planum ex b ſolido in a † e, affectum multa a † e, quadrato-quadrati. Auferatur a † e, cubus, ex ipſo b ſolido, & ducatur in a † e. Orientur plano-plana a b ſol. † e b ſol. $- a^4 - 4 a^3 e - 6 a^2 b^2 - 4 a e^3 - e^4$, & Hinc ordinabitur &c.

THEOREMA.

Theorema quartum.

SI fuerint duo latera, & præterea coefficiens ſolidum Plano-planum à latere primo in coefficiens ſolidum, plus plano-plano à latere ſecundo in coefficiens ſolidum, minus quadrato-quadrato lateris primi, minus quadruplo plano-plano à cubo lateris primi in latus ſecundum, minus ſextuplo plano plano à quadrato lateris primi in lateris ſecundi quadratum, minus quadruplo plano-plano à latere primo in lateris ſecundi cubum, minus quadrato-quadrato lateris ſecundi, æquatur plano-plano ex aggregato laterum in coefficiens ſolidum, affecto multa quadrato-quadrati ex predicto laterum aggregato.

PROPOSITIO V.

Propoſitio quinta.

PLano-planum ſub cubo, affectum multa quadrato-quadrati à binomia radice, adſcita congruenter ſubcubica coefficiente longitudine, effingere.

Eſto binomia radix a † e, ſubcubica verò coefficiens b longitudo. Oporteat ſolidum ab a † e, cubo, & ipſa b longitudine affectum multa quadrato-quadrati ab a † e, componere. Ducatur b — a — e, in a † e, cubum, & efficientur ſingularia plano-plana a^3 b † 3 a^2 e b † 3 a e^2 b † e^3 b — a^4 — 4 a^3 e — 6 a^2 e^2 - 4 a e^3 - e^4. Hinc autem.

THEOREMA.

Theorema quintum.

SI fuerint duo latera, & præterea coefficiens longitudo Plano-planum à cubo lateris primi in coefficientem longitudinem, plus triplo plano-plano à ſolido ſub quadrato lateris primi, & latere ſecundo, in eandem coefficientem longitudinem, plus triplo plano-plano à ſolido ſub latere primo, & lateris ſecundi quadrato, in eandem longitudinem, plus plano-plano à cubo lateris ſecundi in eandem longitudinem, minus quadrato-quadrato lateris primi, minus quadruplo plano-plano à cubo lateris primi in latus ſecundum, minus ſextuplo plano-plano à quadrato lateris primi, in lateris ſecundi quadratum, minus quadruplo plano plano à latere primo, in lateris ſecundi cubum, minus quadrato-quadrato lateris ſecundi, æquatur plano-plano ſub coefficiente longitudine, & cubo aggregati laterum, affecto multa quadrato-quadrati aggregati laterum.

MONITUM.

ATque hunc in modum licet procedere ad altiſſimos gradus in infinitum; ſimilitudine enim eorum, quæ ſuperiùs attulimus cætera deinceps tractanda forent.

SCHO-

Digitized by Google

SCHOLION.

HAEC autem præſertim conducunt ad reſolutionem numeroſam Poteſtatum, de qua ſuperiùs, in prima nimirum huius Operis parte, diſſeruimus.

Vt ſi ſupponamus poteſtatem puram, verbigratia quadratum, atque ſit eius analyſis inſtituenda; Id verò vt ſuo loco diximus beneficio ſpecioſæ conſequemur; ſuppoſito quod requiſita radix binomia ſit, hoc eſt duobus nominibus conſtet, in cuius gratiam hanc geneſin Poteſtatum purarum adiecimus; hinc enim facilè conſtat quomodo ſit numeroſæ Poteſtatis, pura Analyſis inſtituenda. *Analyſis numeroſa poteſtatis beneficio ſpecioſæ comparatur.*

Radix	$a \dagger c$	R
Radix	$a \dagger c$	R
	$ac \dagger c^{2}$	
	$a^{2} \dagger ac$	
Quadratum	$a^{2} \dagger 2ac \dagger c^{2}$	Q
Radix	$a \dagger c$	
	$a^{2}c \dagger 2ac^{2} \dagger c^{3}$	
	$a^{3} \dagger 2a^{2}c \dagger ac^{2}$	
Cubus	$a^{3} \dagger 3a^{2}c \dagger 3ac^{2} \dagger c^{3}$	C
Radix	$a \dagger c$	
	$a^{3}c \dagger 3a^{2}c^{2} \dagger 3ac^{3} \dagger c^{4}$	
	$a^{4} \dagger 3a^{3}c \dagger 3a^{2}c^{2} \dagger ac^{3}$	
Quadrato-quadratum	$a^{4} \dagger 4a^{3}c \dagger 6a^{2}c^{2} \dagger 4ac^{3} \dagger c^{4}$	QQ
Radix	$a \dagger c$	
	$a^{4}c \dagger 4a^{3}c^{2} \dagger 6a^{2}c^{3} \dagger 4ac^{4} \dagger c^{5}$	
	$a^{5} \dagger 4a^{4}c \dagger 6a^{3}c^{2} \dagger 4a^{2}c^{3} \dagger ac^{4}$	
Quadrato-cubus	$a^{5} \dagger 5a^{4}c \dagger 10a^{3}c^{2} \dagger 10a^{2}c^{3} \dagger 5ac^{4} \dagger c^{5}$	QC
Radix	$a \dagger c$	
	$a^{5}c \dagger 5a^{4}c^{2} \dagger 10a^{3}c^{3} \dagger 10a^{2}c^{4} \dagger 5ac^{5} \dagger c^{6}$	
	$a^{6} \dagger 5a^{5}c \dagger 15a^{4}c^{2} \dagger 10a^{3}c^{3} \dagger 5a^{2}c^{4} \dagger ac^{5}$	
Cubo-cubus	$a^{6} \dagger 6a^{5}c \dagger 10a^{4}c^{2} \dagger 20a^{3}c^{3} \dagger 15a^{2}c^{4} \dagger 6ac^{5} \dagger c^{6}$	CC

Si igitur data poteſtas quadratum fuerit, conſtat illud ſi ſit à binomia radice, conſtat inquam quadrato nominis primi, plus duplo plano ſub lateribus, ſeu nominibus, plus quadrato ſecundi nominis, adeo vt latus vniuerſum conſtans duobus ſingularibus lateribus, in ſe quadraticè ductum faciat, poteſtatem, quæ commemoratis planis conſtet, ac ad id inſtituenda erit analyſis, iuxta ea, quæ ſuo loco tradidimus. *Quibus planis conſtet poteſtas quæ quadratum dicitur.*

Propoſitum ſit latus quadratum ex 4096, elicere: facta ſignatione per puncta, vt agentes de interpunctione analytica docuimus, cùm deprehenſum fuerit radicem eſſe binomiam, atque duobus ſingularibus lateribus conſtare; in memoriam eſt redigendum Theorema ſyntheticum, vnde deprhenditur, ſi radix vniuerſa fuerit a, & e, quadratum conſtare $a^{2} \dagger$ *Exemplum.*

2 a e † e², hoc eſt quadrato primi nominis, plus duplo rectangulo ſub ipſis nominibus, plus quadrato ſecundi nominis; Atque adeo primum eſt inquirendum nomen primum; & procedendum, vt ex Paradigmate elicietur.
Non ſecus intelligendum de alijs poteſtatibus altioribus.

De Radicum extractione.

CAPVT VII.

De radicum extractione ſuperiùs actū eſt, obiter propterea hic ex inſtituto rurſus eadem de re diſſeritur. Cui perſpecta eſt ratio extractionis radicis ex numeris, eidem quoque conſtat quod hoc in loco tractandum aſſumitur.

HAC de re ſuperiùs etiam, etſi obiter tractauimus, nunc iterum diligentiùs: præſertim cum hoc loco de extractione quoque radicis ex fractionibus habendus ſit ſermo, cæterum vt ſuperiùs quoque adnotauimus.

Qui modum extrahendi radicem ex numeris vulgaribus nouerit, facilè quidem intelliget, vt opinor, qua via in his magnitudinibus procedendum ſit ad radicis extractionem. Eſt autem radicis extractio, quædam diuiſionis ſpecies. Si enim conſideremus naturam ipſius, perſimilem diuiſioni reperiemus; extrahendo ſiquidem radicem ex propoſita magnitudine nos reperiemus, magnitudinem ad quam propoſitam magnitudinem cuius, radicem quærimus, dum applicamus, ipſi ortiuæ magnitudini eſſe æqualem. Dum enim ex 625, radicem quadratam eruere contendimus, certè nil aliud agendum ſuſcipimus, quàm diuidere 625, per quendam numerum, puta per 25, itaut ex huiuſmodi diuiſione proueniat itidem 25, & vt 25, ductus in 25, facit 625, cuius radix ſiue latus quadratum dicitur 25, ita, & radice quadrata extracta ex 625, proueniet rurſus 25, & ita de radicibus alijs, puta cubica &c. Quæ vt rei propoſitæ ſint accommodata. Quæmadmodum a, ductum in a, facit a², cuius radix, ſiue latus dicitur a, ita radice quadrata extracta ex a², proueniet rurſus a. Non diſſimiliter cum a², multiplicatum per a, producit a³, nempe cubum ex a; Ita quoque extracta radice cubica ex a³, fit a. Et ſic de cæteris radicibus.

Exemplis res illuſtratur ſpeciebus adhibitis.

Quamobrem ſi proponatur a², cuius radix quadrata quæritur, illa quidem erit a, nam hæc in ſe ducta producit a². Si verò foret a³, eius radix eſſet itidem a; nam hæc in ſe cubicè ducta facit a³. Non diſſimili modo procedendum erit in quantitatum compoſitarum extractione, vt enim ex quantitatibus ſimplicibus radicis extractio, non ſecus ſe habet, ac radicis extractio ex aliquo numero, qui vnius tantùm ſit characteris, ita radix quantitate exiſtente compoſita, non diſſimiliter extrahetur, ac ſi ex aliquo numero, radix eliceretur, dum numerus ille pluribus notis conſtaret.

Proponitur extrahenda radix ex binomio.

Itaque ſi radicem quadratam elicere deberemus ex hoc trinomio a² † 2 a e † e². Primò extrahi debet radix ex a², eaque erit a, quæ quidem in ſe ducta producit a², quo dempto ex a², remanet o; vt in paradigmate cernitur. Modo autem multiplicetur a, per 2, fit 2 a, per quod ſi diuidatur ✠ 2 a e, fit ✠ e, quod adſcribendum eſt priori radici inuentæ a, vt fiat a ✠ e, multiplicetur autem 2 a, per e, fiet productum ✠ 2 a e, ſubtrahendum ex 2 a e, ſupereſt autem tantummodo ✠ e². Ob id quadraticè ducatur in ſe ✠ e, ſecundum nomen extractæ radicis, primo exiſtente nomine a, & fiet ✠ e², quo ſubtracto ex ✠ e², remanet o,

	a² ✠ 2 a e ✠ e²		
	a² ✠ 2 a e ✠ e²		
Radix	a ✠ e		
		✠ 2 a e	✠ e²
Diuiſor	2 a	✠ 2 a	
		a ✠ e	
		a ✠ e	
		a e ✠ e²	
	a² ✠	a e	
	a² ✠ 2 a e ✠ e²		

quamo-

quamobrem quæſita radix erit $a + e$, hæc enim in ſe quadraticè ducta producit $a^2 + 2ae + e^2$, vt ex paradigmate conſtat.

Quod ſi alijs vtamur characteribus nihil refert.

Nihil refert alijs vti characteribus.

Nos in prima huius Operis parte vti conſueuimus vocalibus, ad ſignificandas quantitates ignotas, ob id ſic ſe habet hypotheſis a, nimirum eſt primum nomen, at verò e, eſt ſecundum, itaque binomia radix, vtpote conſtans ex duobus nominibus eſt $a + e$, cuius quadratum eſt $a^2 + 2ae + e^2$, eadem autem præcepta forent obſeruanda, ſi vteremur a, & b, vel alijs quibuſcunque literis &c.

Cubica radix ex compoſita quãtitate proponitur extrahenda.

Propoſitum ſit ex quantitate compoſita cubicam radicem extrahere, & propoſita quantitas ſit $a^3 + 3a^2e + 3ae^2 + e^3$.

$$\begin{array}{l} a^3 + 3a^2e + 3ae^2 + e^3 \\ a^3 + 3a^2e + 3ae^2 + e^3. \\ \hline \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \\ \text{Radix } a + e \\ \text{Diuiſor } 3a^2 \\ + 3a^2e \mid + e \\ + 3a^2 \end{array}$$

Primò ſumatur cubica radix ex a^3, eaque eſt a, quæ in ſe cubicè ducta facit a^3, quo ſubtracto ex a^3, nihil remanet. Deinde diuidatur $3a^2e$, per $3a^2$, triplum quadratum ipſius a^2, & fit quotiens e, nempe ſecundum nomen vniuerſæ radicis primo exiſtente a, ducatur autem e, in $3a^2$, fit productum $3a^2e$, quo ſubtracto ex $3a^2e$, nihil remanet. Mox verò ducatur $3a$, triplum primi nominis in e^2, quadratum ſecundi nominis, & fit $3ae^2$, quo ſubtracto ex $3ae^2$, nihil remanet; Denique ducatur e, in ſe cubicè, & fiet e^3; quo ſubtracto ex e^3, remanet nihil; Atq; adeo hunc in modum ad finem operationis peruentum eſt.

Cum radix binomia fuerit quid obſeruandum.

Cæterùm hic obſerua, cùm radix fuerit binomia; nomina ipſa eſſe latera poteſtatum, quibus conſtat id, cuius radix quæritur, & quidem latera illius denominationis, quam poteſtates ipſæ denotant, vt cùm fuerit $a^2 + 2ae + e^2$, quæratur autem eius radix quadrata; quoniam autem poteſtates quibus conſtat propoſita magnitudo, eſt a^2, & e^2, propterea, quærantur latera quadrata ipſorum a^2, & e^2, quæ ſunt a, & e, connectantur ſigno +, & fiet $a + e$, hæc igitur erit radix quadrata propoſitæ magnitudinis.

Operationis comprobatio.

Operationis comprobatio ſic ſe habet.

$$\begin{array}{r} a + e \\ a + e \\ \hline ae + e^2 \\ a^2 + ae \quad \\ \hline a^2 + 2ae + e^2 \\ a + e \\ \hline a^2e + 2ae^2 + e^3 \\ a^3 + 2a^2e + ae^2 \quad \\ \hline a^3 + 3a^2e + 3ae^2 + e^3 \end{array}$$

Vides enim ſi ducatur in ſe quadratice $a + e$, radix iam dicta; fieri $a^2 + 2ae + e^2$, quod ſi ducatur in $a + e$, fieri $a^3 + 3a^2e + 3ae^2 + e^3$.

Nec diſſimiliter ſi propoſita magnitudo foret $a^3 + 3a^2e + 3ae^2 + e^3$, eius enim radix eſſet $a + e$, & eodem modo, quicunque adhibeantur characteres. At ſi propoſitum foret ex $a^4 + 2a^2e^2 + e^4$, radicem quadratam extrahere.

Superiora illuſtrãtur exẽplis.

Sumatur primò radix quadrata ex a^4, eaque eſt a^2, cuius quadratum eſt a^4.

Deinde accepto duplo huius nominis a^2, illud eſt $2a^2$, per illud diuidatur $2a^2e^2$, fiet quotient e^2, eritque ſecundum quæſitæ radicis nomen, itaut binomia radix ſit $a^2 + e^2$, ducatur $2a^2$, in e^2, fit productum $2a^2e^2$, quo ſubtracto ex $2a^2e^2$, nihil remanet, mox verò ducatur e^2, in ſe quadraticè, fit e^4, quo ſubtracto ex e^4 nihil remanet, atque ita ad extremum operationis peruentum eſt.

$$\begin{array}{l} a^4 + 2a^2e^2 + e^4 \\ a^4 + 2a^2e^2 + e^4 \\ \hline \circ \quad \circ \quad \circ \\ \text{Radix } a^2 + e^2 \qquad 2a^2e^2 \mid e^2 \\ \text{Diuiſor } 2a^2 \qquad 2a^2 \mid \end{array}$$

Compro-

Comprobatio operationis multiplicationis præſidio.

Comprobatur autem multiplicationis præſidio; ſi enim $a^2 + e^2$, ducatur in ſe quadraticè, producitur $a^4 + 2\, a^2 e^2 + e^4$, quod requirebatur,

$$\begin{array}{r} a^2 + e^2 \\ a^2 + e^2 \\ \hline a^2 e^2 + e^4 \\ a^4 + a^2 e^2 \quad\quad \\ \hline a^4 + 2\, a^2 e^2 + e^4 \end{array}$$

Rurſus eadē declaratur alijs exemplis.

Ita ſi quadratum foret $a^4 - 2\, a^2 b^2 + b^4$, cuius radix quadrata deſideretur, illa quidem erit $a^2 - b^2$, non ſecus enim elicietur, ac ſuperior ex binomio ſimili, in quo tantùm intercedebat ſignum affirmatiuum, hìc igitur ſolum habenda eſt ratio ſigni negatiui.

$$\begin{array}{lccccc} & a^4 & - & 2\, a^2 b^2 & + & b^4 \\ & a^4 & - & 2\, a^2 b^2 & + & b^4 \\ \hline & 0 & & 0 & & 0 \\ \text{Radix} & a^2 - b^2 & & -\,2\, a^2 b^2 & | & -\, b^2 \\ \text{Diuiſor} & 2\, a^2 & & +\,2\, a^2 & | & \end{array}$$

Quando proponuntur numeri.

Ita quoque in numeris, ſi foret extrahenda radix ex $64\, a^2 + 160\, a + 100$, extracto latere quadrato ex $64\, a^2$, nempe $8\, a$; atq; diuiſo $160\, a$, per $16\, a$, duplum ipſius $8\, a$, prouenict radix vniuerſa $8\, a + 10$, conſtans ex duobus nominibus $8\, a$, & 10, connexis per ſignum $+$, quemadmodum ſit $8\, a - 10$, radix ipſius $64\, a^2 - 160\, a + 100$, ſolum enim ſit differentia in ſignis $+$, & $-$,

$$\begin{array}{ll} & 64\, a^2 + 160\, a + 100 \\ \hline \text{Radix} & 8\, a + 10 \\ \hline \text{Diuiſor} & 16\, a \\ \text{Vel ſit} & 64\, a^2 - 160\, a + 100 \\ \hline \text{Radix} & 8\, a - 10 \\ \hline \text{Diuiſor} & 16\, a \end{array}$$

Exemplum ad idem.

$$\begin{array}{cccccc} a^2 + & 2\, a\, c + & c^2 + & 2\, a\, b + & 2\, b\, c + & b^2 \\ a^2 + & 2\, a\, c + & c^2 + & 2\, a\, b + & 2\, b\, c + & b^2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{Radix} & a + c + b & \\ \hline \text{Primus diuiſor} & 2\, a & \\ \text{Quadratum} & a^2 & a + c \\ & & \quad\quad 2 \\ \text{Radix} & a & \\ & & 2\, a + 2\, c \ \text{Secundus diuiſor} \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 2\, a\, c & + c \\ 2\, a & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 2\, a\, b + 2\, b\, c & + b \\ 2\, a + 2\, c & \end{array}$$

Hac itaq; lege procedendum in huiuſmodi radicum extractionibus. Vbi obſerua producta facta à quotientibus in diuiſores ſubtrahenda eſſe à propoſito plurinomio, itaut ijs, & ſingulorum nominorum poteſtatibus inde ſubtractis nihil remaneat. Hæc enim eſt vniuerſalis extrahendarum radicum lex, vt ex dictis perſpicuum eſt.

Primus

Primus diuiſor eſt 2 a, nempe duplum nominis primi.

$$\begin{array}{c} a \\ \text{per } 2 \\ \hline 2a \end{array} \text{ Primus diuiſor} \qquad \begin{array}{c} a \\ a \\ \hline a^2 \end{array} \qquad \begin{array}{c} a + c \\ \text{per } 2 \\ \hline 2a + 2c \end{array} \text{ Secundus diuiſor}$$

$$+ 2ab + 2bc \;|\; + b \text{ quotus ſecundus}$$
$$+ 2a \quad + 2c$$

$$+ 2ac \;|\; + c \text{ quotus primus}$$
$$+ 2a$$

$$\begin{array}{c} 2a + 2c \\ + b \\ \hline + 2ab + 2bc \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 2a \\ + c \\ \hline + 2ac \end{array} \qquad \begin{array}{c} + c \\ + c \\ \hline + c^2 \end{array} \qquad \begin{array}{c} + b \\ + b \\ \hline + b^2 \end{array}$$

Quod ſi daretur quatrinomium, & eius eſſet exhibenda radix cubica; procedendum foret iuxta naturam cubicæ radicis; Vnde latus ſingulare primum eſſet a, cuius cubus ſubtractus ex a^3, nihil relinquit, at verò ad indagandum ſingulare latus ſecundum, paratur diuiſor accipiendo triplum quadratum lateris primi, atq; reperitur latus vniuerſum a + c. *Exemplum alterum cum radix extrahenda eſt cubica.*

$$\begin{array}{ll} \text{Cubus} & a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ \hline \text{Radix} & a + b \\ \hline \text{Diuiſo} & 3a^2 \end{array}$$

$$+ 3a^2b \;|\; + b$$
$$+ 3a^2$$

Idem agendum, cùm ex numeris extrahenda fuerit radix cubica, itaut quadrinomium ſit cubicum, & ex ipſo elicienda ſit radix. *Quando ex numeris extrahenda eſt radix.*

Propoſitum ſit ex $27a^6 + 54a^5 + 36a^4 + 8a^3$ latus elicere

$$\begin{array}{c} 27a^6 + 54a^5 + 36a^4 + 8a^3 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

Primò extrahatur latus ſingulare primum ex $27a^6$, illudque erit $3a^2$, cuius cubus eſt $27a^6$; quo ſubtracto ex $27a^6$, nihil remanet. Deinde paretur diuiſor ad indagandam ſingulare latus ſecundum. *Explicatio.*

$$\begin{array}{ll} & 27a^6 + 54a^5 + 36a^4 + 8a^3 \\ & 27a^6 + 54a^5 + 36a^4 + 8a^3 \\ \hline & 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ \text{Radix} & 3a^2 + 2a \\ \hline \text{Diuiſor} & 3a^4 \end{array}$$

Diuiſor autem eſt triplum quadratum lateris primi, nempe $3a^4$; & proueniet 2 a, pro ſingulari latere ſecundo, nempe diuiſo $54a^5$. Ducatur igitur $3a^2$; nempe latus primum, ducatur inquam in ſe quadraticè, & proueniet $9a^4$, quod ductum in 2 a, ſingulare latus ſecundum, fiet $18a^5$, cuius triplum eſt $54a^5$, quo ſubtracto ex $54a^5$, nihil remanebit. Deinde verò, ſumatur $4a^2$, nempe quadratum ſingularis lateris ſecundi, & illud multiplicetur per latus primum, nempe per $3a^2$, fiet autem productum $12a^4$, cuius triplum eſt $36a^4$, quo

ſubtracto

ſubtracto ex $36\,a^4$, nihil remanet. Ad extremum ducatur 2 a, ſingulare latus ſecundum, ducatur inquam in ſe cubicè, vt fiat $8\,a^3$, quo ſubtracto ex $8\,a^3$, nihil remanet. Atque ita ad extremum operationis peruentum erit.

Exemplum ad idem.

Deinde ſit cubus $27a^6 - 54a^5 + 171a^4 \quad 188a^3 + 285a^2 - 150a + 125$

$$
\begin{array}{l}
27a^6 - 54a^5 + 36a^4 \quad 8a^3 + 60a^2 - 150a + 125 \\
\hline
0 \quad 0 \quad +135a^4 - 180a^3 + 225a^2 \quad 0 \quad 0 \\
 +135a^4 - 180a^3 + 225a^2 \\
\hline
 0 \qquad 0 \qquad 0
\end{array}
$$

Cubus $27\,a^6$
Radix $3\,a^2$

Radix $3\,a^2 - 2\,a + 5$

$$
\begin{array}{r}
3\,a^2 \\
3\,a^2 \\
\hline
9\,a^4 \\
\text{per } 3 \\
\hline
27\,a^4 \text{ primus diuiſor} \\
-\,2\,a \text{ quotus primus}
\end{array}
$$

Primus diuiſor $27\,a^4 \qquad -54\,a^5$
Secundus diuiſor $27\,a^4 - 36\,a^3 + 12\,a^2 \qquad +27\,a^4$

$$
\begin{array}{r}
+27\,a^4 \\
-\,2\,a \\
\hline
-54\,a^5
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
-\,2\,a \\
-\,2\,a \\
\hline
+4\,a^2 \\
+3\,a^2 \\
\hline
+12\,a^4 \\
\text{per } 3 \\
\hline
+36\,a^4
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
3\,a^2 - 2\,a \\
3\,a^2 - 2\,a \\
\hline
-6\,a^3 + 4\,a^2 \\
9\,a^4 - 6\,a^3 \\
\hline
9\,a^4 - 12\,a^3 + 4\,a^2 \\
\text{per} \qquad\qquad 3 \\
\hline
27\,a^4 - 36\,a^3 + 12\,a^2 \text{ ſecundus diuiſor}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
+135\,a^4 & +5 \text{ quotus ſecundus} \\
+27\,a^4 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
+5 \\
+5 \\
\hline
+25 \\
+3\,a^2 - 2\,a \\
\hline
+75\,a^2 - 50\,a \\
\text{per } 3 \\
\hline
+225\,a^2 - 150\,a
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
+5 \\
+5 \\
\hline
+25 \\
+5 \\
\hline
+125
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
+27\,a^4 - 36\,a^3 + 12\,a^2 \\
+5 \\
\hline
+135\,a^4 - 180\,a^3 + 60\,a^2
\end{array}
$$

Quando contingit, vt radix prædicto modo erui nõ poſſit.

Sæpè autem contingit, vt quandtitates ex quibus radix extrahi debet, ita ſe habeant, vt radix prædicto modo erui non poſſit, tunc autem deſignabitur ipſa de qua quæritur præfigendo propoſitis quantitatibus ſignum radicale cuiuſmodi eſt ℞, & quidem iuxta naturam quæſitæ radicis, vt ad extrahendam radicem quadratam ex a b, ſcribendum ℞ a b, quo ſymbolo denotamus radicem quadratam ex a b, extractam, vel adhuc extrahendam eſſe. Quod ſi in animo, ſit extrahere radicem ex binomio, vt ex $a^2 + b^2$, præfigendum eſt character radicalis, priùs clauſo binomio intra parentheſin, vt hinc, qui ſequitur in modum ℞$(a^2 + b^2)$, vel loco parenteſis adhiberi etiam ſolet lineola deſuper vt ℞ $\overline{a^2 + b^2}$.

Quod de quadratis radicibus dicitur, idem dicendum de cæteris.

Quæ autem diximus de radicibus quadratis, intelligenda de cæteris, quamobrem, ſi foret extrahenda radix cubica ex a^2 b, ſcribendum eſſet ℞ c, a^2 b, & ſi ex

quantitate

quantitate compoſita, idem perficiendum adhibita parentheſi, vt ℞ c $(a^3 - b^3 \dagger a b^2)$, vel deſcripta deſuper lineola ℞ c $\overline{a^3 - b^3 + a b^2}$.

Hę autem quantitates ſurdæ; ſiue irrationales dicuntur.

Ex Fractionibus Radicum extractio.

EX Arithmeticæ præceptis manifeſtè conſtat, quandocunque ex fractionibus erunda ſit radix aliqua, nil aliud agendum eſſe, quàm radicem extrahere illius generis, tàm ex numeratore, quàm ex denominatore, hoc enim pacto propoſitæ radicis fractionis radix comprobatur. Si itaque radix eſt extrahenda quadrata ex $\frac{a^2 b^2}{c^2}$. Quoniam igitur radix quadrata ex $a^2 b^2$, eſt $a b$, & radix quadrata ex c^2, eſt c, propterea propoſitæ quantitatis radix erit $\frac{a b}{c}$.

Ex fractionibus qua arte radices extrahatur exemplum.

Non diſſimiliter ſi extrahatur radix quadrata ex $\frac{a^4 - 2 a^2 b^2 + b^4}{a^2 + 4 a b + 4 b^2}$, fiet enim radix $\frac{a^2 - b^2}{a + 2 b}$. Ita quoque ad extrahendam radicem quadratam ex $4 \dagger \frac{36 a^2 - 96 a}{16}$, quandoquidem $4 \dagger \frac{36 a^2 - 96 a}{16}$, in formam fractionis facit $\frac{64 - 96 a + 36 a^2}{16}$, & radix quadrata ex $64 - 96 a \dagger 36 a^2$ eſt $8 - 6 a$, vt radix quadrata ex 16, eſt 4, propterea quæſita radix erit $\frac{8 - 6 a}{4}$, hoc eſt $2 - \frac{6 a}{4}$.

Exemplum alterum.

Nec diſſimiliter in radicibus alterius generis procedendum; Vnde ſi foret propoſitum radicem cubicam extrahere ex loco propoſito multinomio $\frac{a^6 + 3 a^4 e^2 + 3 a^2 e^4 + e^6}{b^3}$. Quandoquidem radix cubica numeratoris eſt $a^2 \dagger e^2$, radix verò cubica denominatoris eſt b, propterea quantitatis propoſitæ cubica radix erit $\frac{a^2 + e^2}{b}$.

Eodem modo in radicibus alterius generis producendum.

In numeris verò, ſi proponeretur $\frac{512 - 1152 a + 864 a^2 - 216 a^3}{64}$, & huius exhibenda foret radix, ea quidem eſſet $\frac{8 - 6 a}{4}$, vt multiplicatione comprobari poteſt, latus enim cubicum numeratoris $8 - 6 a$, & denominatoris itidem latus cubicum eſt 4.

Idem in numeris oſtenditur quod in ſpeciebus.

Algorithmus quantitatum Surdarum.

OMnis quantitatis diuiſio per aliam quantitatem dum perficitur, ita contingit, vt imperfecta, vel perfecta ſit; hoc ſecendo modo euenit, cum fit adeo vt ſine reliquo eueniat quotus; primò autem cum reliquo prouenit, atque adeo non diſſimiliter eſt ratiocinandum in extractione radicis, vnde cum ex aliqua quantitate radix eſt eruenda, aut ita radix elicitur, vt iuxta conditionem, atque naturam radicis in ſe ducta totam quantitatem reſtituat, vel ita extrahitur vt non præciſè ſua iam dicta multiplicatione quantitatem efficiat, quia nimirum nulla reperiri poteſt, quæ quantitatem illam, cuius radix quæritur, ad vnguem in ſe ducta, iuxta quæſitæ radicis naturam, efficiat. Inde igitur ſurdæ quantitatis eueniunt, ac proinde hæ tractandæ quoque ſunt in fractionibus. Primùm autem, quod occurrit eſt quantitatum ſurdarum Reductio.

De quantitatibus ſeu radicibus ſurdis agendum ſupereſt.

Vnde quantitates ſurdæ ortum ducát.

De reductione Surdarum quantitatum.

QVemadmodum ad operationem fractionum diuerſæ denominationis oportet priùs ipſas ad eundem denominatorem reducere, ita non ſecus ęſt opus quantitates ſurdas, cum diuerſa radicalia ſigna habuerint, ad idem radicale ſignum reducere.

Reductio quãtitatum ſurdarum quæ arte perficiatur.

Hoc autem perficitur ſi ad numeros, à quibus radices denominantur minimus reperiatur numerus, qui per ipſos ſine reliquo diuidi poſſit.

M Opus

Digitized by Google

Exemplũ reductionis.

Opus igitur ſit has quantitates ℞ Q ab, & ℞ C $a^2 b$, ad idem radicale ſignum reuocare. Quęrendus eſt igitur ad 2, & 3, numeros, à quibus Q, & C, denominantur, quærendus inquam eſt numerus minimus, qui per ipſos ſine reliquo diuidi poſſit, hic autem numerus eſt 6, qui nimirum per 2, diuidi poteſt, itemq; per 3. Cùm igitur ſi 6, diuidatur per 2, oriatur 3, & ſi idem 6, diuidatur per 3, oriatur 2, fit vt ab multiplicandum ſit in ſe cubicè, & $a^2 b$, ducendum ſit in ſe quadraticè fient enim eodem ſigno affecta ℞ C C $a^3 b^3$, & ℞ C C $a^4 b^2$. Vel iuxta alios fit ℞ Q C &c. Ita ℞ ab, & ℞℞ $\overline{a^2 b + a b^2}$, ſub eodem radicali ſigno; erunt ℞℞ $a^2 b^2$, & ℞℞ $\overline{a^2 b + a b^2}$.

Sæpe contingit vt aliqua quantitas rationalis ad aliquam irrationale duci debeat.

Ita quoque ſæpe accidit, vt aliqua quantitas rationalis reduci debeat, ad aliquod ſignum radicale, fitque per multiplicationem in ſe. Vt ſi opus ſit $a + b$, reducere ad idem ſignum radicis ℞ $\overline{a^2 + b^2}$, oportet multiplicare $a + b$, in ſe quadratè, & fit ℞ $\overline{a^2 + 2ab + b^2}$. Quod ſi idem binomium $a + b$, multiplicetur in ſe cubicè producetur ℞ C $\overline{a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3}$, nempe ſub eodem ſigno radicis, cum exempligratia ℞ C $\overline{a^3 - b^3 + ab^3}$.

Quandoque ſurdæ quantitates ad ſimpliciores reducuntur.

Reducuntur quandoque ſurdæ quantitates ad ſimpliciores, tollendo ex ſigno radicali quicquid rationale eſt, nempe diuidendo quantitates ſub eodem ſigno radicali comprehenſas per aliquod quadratum, vel per aliquem cubum, & quidem per quadratum illud, cui præfixo ſigno radicali, ductum fuit in quantitatem irrationalem, eodem modo de cubo intelligendum.

Exemplum.

Sit verbigratia ℞ $\overline{108 a^2}$, reducenda, & quidem ad 6 a ℞ 3, reduci poterit; quandoquidem 108 a^2, producitur ex multiplicatione 36 a^2, per 3, quarum radices ſunt 6 a, & ℞ 3. Itaque ſi 108 a^2, diuidatur per 36 a^2, ſuperſit ſcribendum tantummodo 3, ſub ſigno radicali, vt fiat 6 a ℞ 3. Id autem oſtendit 6 a, ſeu quod idem eſt ℞ $\overline{36 a^2}$, multiplicatum eſſe per ℞ 3.

Exemplum alterum.

Ita ſi fuerit ℞ $\overline{a^3 b + a^2 b^2}$, loco ipſius ſubſtitui poterit a ℞ $\overline{ab + b^2}$, propterea quod $a^3 b + a^2 b^2$, diuidi poteſt per quadratum iſtud a^2, ex qua diuiſione emergit $ab + b^2$, ſi enim $ab + b^2$, ducatur in a^2, fit productum $a^3 b + a^2 b^2$, vt patet.

Quid præſtet hac in re operari.

Quia tamen haud facile eſt reperire quadratum, cubum &c. per quod diuiſio ad huiuſmodi reductionem neceſſaria perfici queat, præſtat ob id diligenter inquirere, qua ratione datarum quarumlibet quantitatum diuiſores omnes inueniantur, de quo infra.

Additio quantitatum Surdarum.

Additio ſurdarum quantitatum, quo artificio inſtitui debeat.

AD addendas quantitates ſurdas, oportet primùm explorare, vtrum ſint inter ſe communicantes, an non; Si enim communicantes fuerint, addantur tantum quantitates, vel numeri, qui extra ſignum radicale ſunt conſtituti. Vt ad addendum ℞ $\overline{75 a^2}$, & ℞ $\overline{27 a^2}$, ſeu quod idem eſt 5 à ℞ 3, & 3 a ℞ 3. Addere oportet 5 a, & 3 a, vt fiat ſumma 8 a, cui annexa ℞ 3, fiet ſumma 8 a ℞ 3.

Exempla. Ad maiorem intelligentiã, quid agendũ.

Hęc vt intelligantur, adhibendus eſt numerus rationalis velut irrationalis, & ſupponendum eſt numero aliquod radicis pretium. Vt exempligratia ſit ℞ $\overline{100 a^2}$, & ℞ $\overline{64 a^2}$, quarum ſumma fiet 9 a ℞ 4. Nam idem eſt ℞ $\overline{100 a^2}$, ac eſt 5 a ℞ 4, & ℞ $\overline{64 a^2}$, idem quod 4 a ℞ 4 quarum ſumma eſt 9 a ℞ 4. Vt igitur meliùs hæc percipiantur: Supponamus a valere 3, igitur ℞ $\overline{100 a^2}$, ſeu 5 a ℞ 4. Idem eſt quod 15 ℞ 4, hoc eſt ℞ producti ex 225, in 4, hoc eſt ℞ 900. At verò ℞ 64 a^2, hoc eſt 4 a ℞ 4. idem eſt quòd 12 ℞ 4, hoc eſt ℞ 576. At verò ſi ℞ 900, & ℞ 576, ſimul addantur, fiet ſumma ℞ 2916, & ita eſt nàm ℞ 900, eſt 30, ℞ 576, eſt 24, quorum

Præcepti comprobatio.

ſumma eſt 54, at verò ℞ 2916, eſt idem quod 54. Rectè igitur præceptum ſcribit, vt ſimul addantur numeri extra ſignum radicale exiſtentes.

Non diſſimiliter ſi fuerint ℞ $\overline{a^4 + a^2 b^2}$, & ℞ $\overline{a^2 b^2 + b^4}$, hoc eſt a ℞ $\overline{a^2 + b^2}$, & b ℞ $\overline{a^2 b^2}$. Additis a, & b, fiet ſumma a + b ℞ $\overline{a^2 b^2}$. *Exemplum.*

Præterea propoſitum ſit ad ℞ $\overline{\frac{a^2 b^2}{c^2} + \frac{4 c d b^2}{c^2}}$, & addere ℞ $\overline{\frac{a^2 c^2 a^2}{d^2 b^2} + \frac{4 a^2 c^3}{d b^2}}$, hoc eſt ad $\frac{b}{c}$ ℞ $\overline{a^2 + 4 c d}$, addere $\frac{ac}{db}$ ℞ $\overline{a^2 + 4 c d}$, fiet autem ſumma $\frac{d b^2 + a c^2}{c d b}$ ℞ $\overline{a^2 + 4 c d}$. Non diſſimiliter ſi ad ℞ $\frac{a^2 b^2 - a^2 u^2}{b^2}$, vel $\frac{a}{b}$ ℞ $\overline{b^2 - u^2}$, addere oporteret ℞ $\overline{b^2 - u^2}$, fiet enim ſumma $\frac{a + b}{b}$ ℞ $\overline{b^2 - u^2}$. Itemque addito ℞ $\overline{a^4 \dagger 6 a^3 \dagger 21 a^2 \dagger 72 a \dagger 108}$, ad ℞ $\overline{a^4 - 10 a^3 + 37 a^2 - 120 a + 300}$, hoc eſt addito a + 3 ℞ $\overline{a^2 + 12}$ ad $\overline{5 - a}$, ℞ $\overline{a^2 + 12}$, fiet ſumma 8 ℞ $\overline{a^2 + 12}$. *Exemplum alterum ad idem.*

At ſi non fuerint communicantes addi non poterunt; itaut vnam radicem conſtituant. Vnde oportet illas addere mediante ſigno +, ex quo binomia, ac multinomia conſurgunt. Vt ſi fuerit addendum ℞ $\overline{a^2 + b^2}$, ad ℞ $\overline{a^2 - b^2}$, fiet ſumma ℞ $\overline{a^2 + b^2}$ + ℞ $\overline{a^2 - b^2}$. *Quando non ſunt communicantes, addi non poſſunt, vt vnam radicē conſtituant.*

Deinde ſi fuerit opus addere a + b, ad ℞ $\overline{a^2 + b^2}$, fiet ſumma a + b + ℞ $\overline{a^2 + b^2}$, eſt enim a + b, quantitas rationalis, & ℞ $\overline{a^2 + b^2}$, Irrationalis. Non diſſimili modo ex $a^2 + b^2 + a$ ℞ $\overline{a^2 + b^2}$, & $a^2 - b^2 - b$ ℞ $\overline{a^2 - b^2}$, fiet $2 a^2 + a - b$ ℞ $\overline{a^2 + b^2}$. *Exemplum.*

Quandoque verò ſunt addendæ quantitates irrationales ſic ſe habentes.

Supponamus propoſitam eſſe ℞ $b^2 a$, cui ſit addenda ℞ $d^2 a$, hoc autem modo intelligimus a, quod ſupponere poſſumus radicem Geometricæ progreſſionis ductum eſſe in b, radicem quadratam ipſius b^2, itemque a, ductum eſſe in d, radicem quadratam ipſius d^2, vnde ſi foret ℞ b pl. a, & ℞ d pl. a, eundem ſenſum redderet. *Aliquando cõtingit vt inſtituenda ſit additio inter quãtitates irrationales.*

Ad has autem radices addendas, conducunt præcepta tradita in prima huius Operis parte; duci enim debet b^2, in d^2, vt fiat $b^2 d^2$, cuius radix quadrata eſt b d; vt ibi oſtendimus in numeris, cuius duplum eſt 2 b d, cui addere oportet $b^2 \dagger d^2$, vt fiat $2 b d \dagger b^2 \dagger d^2$, ex quo eruendum eſt latus quadratum, illudque eſt $b \dagger d$, quo ducto in a, fit $b a \dagger d a$, atque tantum eſt aggregatum ex ℞ $b^2 a$, & ℞ $d^2 a$, & quidem ita eſt, nam ℞ $b^2 a$, idem eſt quod b a, & ℞ $d^2 a$, idem quod d a, quare aggregatum ex illis erit $b a \dagger d a$. *Ad has addẽdas radices cõducunt præcepta tradita in prima huius Operis parte.*

At ſi foret ℞ b pl. a cui addenda eſſet ℞ d pl. a, non diſſimili artificio procedendum. Duc enim b pl. in d pl. vt fiat b pl. d pl. cuius latus quadratum eſt ℞ (b pl. d pl.) huius duplum eſt 2 ℞ (b pl. d. pl.), ſeu ℞ (4 b pl. d pl.), cui oportet addere b pl. plus d pl. vt fiat ℞ (4 b pl. d pl.) † b pl. † d pl.) quo ducto in a, fiet ℞ (4 b pl. d pl.) † b pl. † d pl.) a, cuius ſenſus eſt, vt extrahatur latus quadratum ex quadruplo producto abs b pl. in d pl. & extracto lateri addatur eorundem aggregatum, ex ſumma verò extrahatur latus, quod intelligitur ductum in a, dignitatem. *Exemplum ad hæc illuſtranda.*

At ſi fuerint radices cubicæ, vt ℞ c b^3 a, & ℞ c d^3 a, additio inſtituetur non per illam multiplicationem &c. ea ſiquidem regula generalis non eſt, ſed tantummodo Radicibus quadratis inſeruit. Quamobrem extrahenda erit radix cubica ex ipſis quantitatibus, puta b^3, & d^3, & quidem ipſius b^3, radix cubica eſt b, at verò ipſius d^3, eſt d, addito autem b, ad d, fit $b \dagger d$; quo ducto in a, fiet $b a \dagger d a$, ſeu $b \dagger d)$ a, tantum igitur conſurget ex additione ipſius ℞ c d^3 a, ad ℞ c b^3 a. *Quando fuerint radices cubicæ.*

At ſi quantitates illæ non haberent latera cubica, vt ℞ c b ſol. a, & ℞ c d ſol. a; in huiuſmodi caſu quoniam non poteſt addi ℞ c d ſol. ad ℞ c b ſol. reperto communi diuiſore, ob id oportebit inſtituere additionem beneficio ſigni †, ad hunc modum ℞ c b ſol. a † ℞ c d ſol. a, & ita de reliquis. *Quando illæ quantitates nõ habent latera cubica.*

At ſi fuerint radices vniuerſales, itidem cum dignitatibus vt ℞ (b pl. a), & ℞ (d pl a), vbi ℞ (b pl. a), ſignificat extrahendam eſſe radicem quadratam ex producto ab a, in b pl. vel ab a, in d pl. &c. vbi nimirum a, ponitur, tanquam radix alicuius progreſſionis geometricæ incipientis ab vno; vel demum accipitur veluti quantitas multiplicans tam b pl. quam d pl. In harum autem vniuerſalium radicum additione ſic procedendum erit. *Quando fuerint radices vniuerſales.*

Sit exempligratia ℞ (d^2 a), addenda ad ℞ (b^2 a), quarum ſignificatio patet ex dictis, etenim ℞ (d^2 a), ſignificat radicem quadratam producti ex a, in d^2, & ℞ (b^2 a), importat radicem quadratam producti ex a, in b^2. *Exemplo res illuſtratur.*

M 2 Ducatur

Operationis explicatio.

Ducatur igitur b^2, in d^2, & fiet productum $b^2 d^2$, huius latus eſt b d, cuius duplum 2 b d; cui annectantur b^2, & d^2, fiet enim 2 b d + b^2 + d^2, cuius radix quadrata eſt ℞ (2 b d + b^2 + d^2), quæ ducta in a, faciet quidem ℞ (2 b d + b^2 + d^2) a, nempe ſummam duarum propoſitarum radicum.

Idem contigit ſi quantitates illas tractaremus non ſecus ac ſi latera nõ haberent.

Idem porro contingeret, ſi quantitates illas, tractaremus non ſecus ac ſi latera non haberent; vt ſi b^2, duceremus in d^2, fieret enim $b^2 d^2$, cuius latus erit ℞ ($b^2 d^2$) cuius duplum eſt 2 ℞ ($b^2 d^2$), ſeu quod idem eſt ℞ (4 $b^2 d^2$), cui additis b^2, & d^2, fiet ℞ (4 $b^2 d^2$) + $b^2 d^2$, huius verò latus eſt ℞ (4 $b^2 d^2$) + b^2 + d^2), quo ducto in a, fit ℞ (4 $b^2 d^2$) + b^2 + d^2) a, tantaq; erit ſumma propoſitarum radicum vniuerſalium.

Quando latera magnitudinum exhiberi non poſſunt, quid agendum.

At ſi latera magnitudinum, nempe ipſarum b^2, & d^2, exhiberi non poſſint; vt ſi foret b pl. d pl. horum latera cum non reperiantur, procedendum ob id hunc in modum. Ducatur igitur b pl. in d pl. & fiet b pl. d pl. cuius latus eſt ℞ (b pl. d pl.) huius duplum eſt 2 ℞ (b pl. d pl.), ſeu quod idem eſt ℞ (4 b pl. d pl.), cui addere oportet b pl. + d pl. vt fiat ℞ (4 b pl. d pl.) + b pl. + d pl.). Itaque additione ℞ (b pl. a), ad ℞ (d pl. a), fiet ſumma ℞ (4 b pl. d pl.) + b pl. + d pl.) a.

Præcepta ſuperiora numeris illuſtrantur.

Hæc autem hunc in modum numeris illuſtrabimus. Supponamus a, valere 9, at verò b^2, valere 16, item d^2, valere 25. Itaque ℞ (b^2 a), idem erit quod 21, latus quadratum numeri 144, producti ex 9, in 16.

Proſequitur explicatio.

Præterea ℞ (d^2 a), idem erit, quod 15, latus quadratum numeri 225, producti ex 9, in 25. Procedatur autem vt Præceptum iubet, nempe ducatur 16, in 25, vt fiat 400, cuius latus quadratum eſt 20, huius duplum eſt 40, cui additis 16, & 25, fit 81, quo ducto in 9, fit 729, cuius latus quadratum eſt 27, quantum profecto eſt pretium iſtius ℞ (4 b pl. d pl.) + b pl. + d pl.) a, namque b pl. eſt 16, quo ducto in d pl. nempe 25, fit 400, huius quadruplum eſt 1600, cuius latus quadratum eſt 40, cui addito b pl. nempe 16, fit 56, cui addito d pl. puta 25, fit 81; quo ducto in 9, pretium ipſius a, fit 729, cuius latus quadratum eſt 27. Itaque rectè præceptum iubet &c.

Subtractio quantitatum Surdarum.

Subtractio ſurdarum quantitatum, qua arte ſit inſtituenda.

Quemadmodum de Additione diximus hæc in ſubtractione occurrunt.

Subtractio vt inſtituatur, primò eſt obſeruandum, an ipſæ quantitates ſurdæ ſint, vel non ſint communicantes. Si fuerint communicantes, ſubtrahantur quantitates, quæ extra ſignum radicale exiſtunt. Vt ſi fuerit iniunctum ſubtrahere inuicem has quantitates ℞ 75 a^2, & ℞ 27 a^2, hoc eſt 5 a ℞ 3, & 3 a ℞ 3, oporteat igitur harum quantitatum minorem ex maiori ſubducere, inſtituatur ſubtractio inter numeros exiſtentes extra ſignum radicale, nempe inter 5 a, & 3 a, reliquum enim erit 2 a ℞ 3. Non ſecus ſi fuerit opus exhibere differentiam inter

Exemplis illuſtrãtur præcepta.

℞ $\overline{a^4 + a^2 b^2}$, & ℞ $\overline{a^2 b^2 + b^4}$, hoc eſt inter a ℞ $\overline{a^2 + b^2}$, & b ℞ $\overline{a^2 + b^2}$, reperiatur enim differentia inter a, & b, quæ eſt a ∽ b, & fiet differentia quæſita a ∽ b ℞ $\overline{a^2 + b^2}$.

Hæc autem numeris illuſtrari poſſunt, quemadmodum fecimus ſupra in operatione Additionis.

Exempla ad idem.

Non diſſimiliter ſi fuerint ℞ [illegible] + [illegible], & ℞ [illegible] + 4 [illegible], hoc eſt [illegible] ℞ $\overline{a^2 + 4 c d}$, & [illegible] ℞ $\overline{a^2 + 4 c d}$, fiet reſiduum [illegible], ℞ $\overline{a^2 + 4 c d}$, Non ſecus etiam ſi fuerit ℞ [illegible], vel [illegible] ℞ $\overline{b^2 - u^2}$, & ℞ $\overline{b^2 - u^2}$, fiet enim differentia [illegible] ℞ $b^2 - u^2$.

Quod

Quod ſi fuerint $\text{℞}\,\overline{a^4 + 6a^3 + 21a^2 + 72a + 108}$, & inſuper $\text{℞}\,\overline{a^4 - 10a^3 + 37a^2 - 120a + 300}$, hoc eſt $a + 3\ \text{℞}\,\overline{a^2 + 12}$, & $\overline{5 - a}\ \text{℞}\,\overline{a^2 + 12}$, fiet differentia $2a - 2\ \text{℞}\,a^2 + 12$.

Alia proponuntur exempla.

At verò ſi quantitates communicantes non fuerint, inſtitui debebit ſubtractio beneficio ſigni —. Vnde reſidua, & multinomia proueniunt. Vt ſi fuerit ſubtrahendum $\text{℞}\,\overline{a^2 - b^2}$, de $\text{℞}\,\overline{a^2 + b^2}$, fiet reſiduum $\text{℞}\,\overline{a^2 + b^2} - \text{℞}\,\overline{a^2 - b^2}$. Non ſecus ſubtrahatur $\text{℞}\,\overline{a^2 + b^2}$, de $a + b$, fiet reliquum $a + b - \text{℞}\,\overline{a^2 + b^2}$, eſt enim $a + b$, quantitas rationalis, ſecus verò $\text{℞}\,\overline{a^2 + b^2}$.

Quando quãtitates nõ fuerint communicantes.

Sic etiam ſi propoſitum ſit ex $a^2 + b^2 + a\ \text{℞}\,\overline{a^2 + b^2}$, ſubtrahere $a^2 - b^2 - b\ \text{℞}\,\overline{a^2 + b^2}$, fiet enim reſiduum $2b^2 + \overline{a + b}\ \text{℞}\,\overline{a^2 + b^2}$.

Aliud exemplum ad idẽ.

Multiplicatio quantitatum Surdarum.

AD hanc operationem perficiendam in numeris irrationalibus: oportet primùm aduertere, num ſint, vel non ſint communicantes. Si fuerint communicantes, multiplicatis quantitatibus, vel numeris extra ſignum radicale poſitis, multiplicare oportet productum per quantitates, vel numerùm ſub ſigno radicali contentum, vt productum quæſitum habeatur. Vt ſi ſit iniunctum multiplicare $\text{℞}\,\overline{245\,a^2}$, & $\text{℞}\,\overline{80\,a^2}$, hoc eſt $7a\ \text{℞}\,5$, per $4a\ \text{℞}\,5$. Primò itaque multiplicetur $7a$, per $4a$, & fiet $28a^2$, deinde multiplicetur huiuſmodi productum $28a^2$, per 5, & fiet productum $140a^2$. Ita multiplicata $\text{℞}\,\overline{245\,a^2}$, per $\text{℞}\,\overline{80\,a^2}$, fiet productum $140a^2$; idem valet cum $\text{℞}\,\overline{19600\,a^4}$, quod numeris explicari poteſt.

Multiplicationis inſtitutio requirit, vt aduertatur num quantitates ſint communicantes.

Id autem numeris explicabitur ſi prius exempla attulerimus in numeris rationalibus. Propoſitum ſit multiplicare $\text{℞}\,\overline{144\,a^2}$, per $\text{℞}\,\overline{2304\,a^2}$, hoc eſt $4a\ \text{℞}\,9$, per $16a\ \text{℞}\,9$, Supponamus fieri $\text{℞}\,576\,a^2$, multiplicatis nempe $16a$, per $4a$, &c. vt Præceptum iubet, oportet ergo numeris explicare, pragmatiam rectè inſtitutam fuiſſe. Pretium ipſius a, ſit 5, ergo eius quadratum erit 25, quo ducto in 144, fiet 3600, cuius latus quadratum eſt 60. Itaque $\text{℞}\,\overline{144\,a^2}$, idem eſt quod 60. Deinde ſi a, valet 5, eius quadratum valebit 25, vt diximus quo ducto in 2304, fit 57600, cuius latus quadratum eſt 240, itaque $\text{℞}\,\overline{2304\,a^2}$, idem eſt quod 240, ducamus autem 240, in 60, & fiet productum 14400. Nunc igitur videndum num $576\,a^2$, ſeu quod idem eſt $8a\ \text{℞}\,9$, valeat numerus 14400, & ita quidem eſt, nam 576, ductus in 25, pretium ipſius a^2, facit 14400. Non diſſimiliter diſcurrendum de $8a\ \text{℞}\,9$, nam a, valet 5, qui ductus in 8, facit 40, cuius quadratum (duci enim debet pretium ipſius $8a$ in $\text{℞}\,9$), eſt 1600, quo ducto in 9, fit 14400.

Numeris id explicatur.

Perpendamus hoc aliud exemplum. Oporteat multiplicare $\text{℞}\,\overline{75\,a^2}$, per $\text{℞}\,\overline{27\,a^2}$, hoc eſt $5a\ \text{℞}\,3$, per $3a\ \text{℞}\,3$. Primùm ducatur $5a$, in $3a$, & fiet $15a^2$, quo ducto in 3, fiet $45a^2$. Aduertendum hic autem productum eſſe $45\,a^2$: Supponamus a, valere 5, vt a^2, valeat 25, quo ducto in 75, fit productum $\text{℞}\,1875$. Deinde ducatur 27, in 25, fiet productum 675, cuius latus quadratum eſt $\text{℞}\,675$, multiplicemus verò $\text{℞}\,1875$, per $\text{℞}\,675$, fiet productum $\text{℞}\,1265625$, ſeu 1125. Videndum an $45a^2$, valeat $\text{℞}\,1171875$, ſeu 1125, & quidem ita eſt, nam a^2, valet 25, quo ducto in 45, fit 1125.

Aliud exemplum ad idẽ.

Non diſſimili arte procedendum erit in multiplicatione $\text{℞}\,\overline{a^4 + a^2b^2}$, per $\text{℞}\,\overline{a^2b^2 + b^4}$, hoc eſt $a\ \text{℞}\,\overline{a^2 + b^2}$, per $b\ \text{℞}\,\overline{a^2 + b^2}$, fiet enim productum multiplicando a, per b, atque producto ab, multiplicato per $a^2 + b^2$, proueniet $a^3b + ab^3$. Vbi obſerua idem eſſe $a\ \text{℞}\,\overline{a^2 + b^2}$, ac eſt $\text{℞}\,\overline{a^4 + a^2b^2}$. Si enim nos ducere velimus $\text{℞}\,\overline{a^2 + b^2}$, in a, id autem fieri debere ſymbolum indicat, fiet productum a quadraticè in ſe ducto; id autem faciendum, cum duci debeat in $\text{℞}\,9$, vndè vterque terminus quadraticè multiplicari profectò debet, vt proueniet a^2, ſi a^2, ducatur in $a^2 + b^2$, proueniet certè $\text{℞}\,\overline{a^4 + a^2b^2}$. Deinde itidem aduerte idem eſſe $b\ \text{℞}\,\overline{a^2 + b^2}$, ac eſt $\text{℞}\,\overline{a^2b^2 + b^4}$, ſi enim ducatur b in $\text{℞}\,\overline{a^2 + b^2}$. Id enim fieri debere ſymbolum indicat,

Non diſſimili art. procedendum in multiplicatione aliorum numerorum irrationalium.

dicat, fit illud productum; nam b, in ſe quadraticè ducendum, cum per radicem quadraticam multiplicari debeat, vterque enim terminus quadraticè multiplicandus eſt; quo facto prouenit b^2, hoc autem ductum in a^2 ✠ b^2, facit $a^2 b^2$ ✠ b^4, cuius ℞ eſt ℞ $\overline{a^2 b^2 ✠ b^4}$.

Exemplo ſuperior doctrina rurſus declaratur.

Inſuper propoſitum ſit ducere ℞ $\overline{a^4 ✠ 6 a^3 ✠ 21 a^2 ✠ 72 a ✠ 108}$, per ℞ $\overline{a^4 - 10 a^3\ 437 a^2 - 120 a ✠ 300}$, hoc eſt a ✠ 3 ℞ $\overline{a^2 ✠ 12}$ per 5 — a ℞ $\overline{a^2 ✠ 12}$.

Multiplicetur a ✠ 3, per 5 — a, fiet 15 ✠ 2 a — a^2; quod quidem multiplicatum per a^2 ✠ 12, productum facit 180 ✠ 24 a ✠ 3 a^2 ✠ 2 a^3 — a^4.

Quando quãtitates nõ ſunt communicantes.

Sæpe autem contingit, vt quantitates non ſint communicantes tunc autem oportet multiplicare quantitates ſub ſignis radicalibus comprehenſas, & producto præfigere commune ſignum radicale. Si verò ſigna radicalia diuerſa fuerint reducenda prius ſunt ad idem ſignum, vt ſuperiùs declarauimus, & poſtea operandum vt paulo antea dicebamus.

Multiplicationis ratio rurſus declaratur.

Oporteat multiplicare ℞ a b, per ℞ c d, ductis a b, in c d, producto a b c d, præfigatur ſignum ℞, & fiet productum ℞ a b c d.

Admotanda quædam.

Cæterum ſi foret multiplicandum ℞ a b c^2, per 2. Oportet aduertere numerum 2, eſſe reducendum ſed naturam radicis quadratæ, vnde tam ℞ a b c^2, quàm 2, debet in ſe quadraticè duci, vt ex illius multiplicatione a b c^2, ex fiat iſtius verò 4, nunc igitur ducere oportet a b c^2, in 4, & proueniet 4 a b c^2, cuius radix ligata ℞ (4 a b c^2), eſt productum quæſitum. Verùm hoc ſymbolo ℞ (4 a b c^2), ſignificamus a b c^2, ductum fuiſſe in 4, & ex producto extractam fuiſſe radicem quadratam; atque adeo idem erit ac 2 ℞ a b c^2, nam hoc ſymbolo ſignificamus ℞ a b c^2, ductam eſſe in 2. Plerumque autem illud idem ſignificamus ℞ (4 a b c^2), hoc alio ſymbolo 4, ℞ a b c^2, hunc enim in modum intelligendum volumus a b c^2, ductum fuiſſe in 4, ex producto extractum fuiſſe latus, vnde non idem erit 4 ℞ a b c^2, ac 4, ℞, a b c^2, commatibus enim illis, differentia innuitur. Huiuſmodi autem multiplicatio euenit, cum binomium in ſe quadraticè ducitur.

Quando binomium in ſe quadraticè ducitur.

Si enim fuerit ℞ a c † ℞ b c, binomium conſtans è duobus nominibus irrationalibus, in ſe quadraticè ductum facit a c † 2 ℞ a b c^2 † b c, ſeu quod idem eſt a c † ℞ (4 a b c^2) † b c. Vel demum a c † 4, ℞, a b c^2 † b c.

		℞ a c †	℞ b c
		℞ a c †	℞ b c
		℞ a b c^2 †	b c
	a c †	℞ a b c^2	
	a c †	2 ℞ a b c^2 †	b c
Vel	a c †	℞ (4 a b c^2) †	b c
Vel	a c †	4, ℞, a b c^2 †	b c

Quando occurrit multiplicatio quantitatis irrationalis.

Vbi vt vides occurrit multiplicatio quantitatis irrationalis ℞ a c, per 2, quæ perficienda eſt vno ex modis ſupra poſitis.

Hæc autem iuuabit exemplis illuſtrare. Supponamus a, valere 9, at b, valere 16, & c, denique 4, his ſuppoſitis ℞ a c, valebit ℞ 36, nam a c, valet 36, & ℞ b c, valebit ℞ 64, nam b c, valet 64.

Exemplis hæc illuſtrantur.

Itaque inſtituta multiplicatione prouenit 36 † ℞ 9216 † 64, & quidem ita ſe res habebit, nam ℞ 9216, idem eſt quod 96, quo addito ad 64, & 36, fit 196, quantum prouenit ex 14, pretio ipſius binomij ℞ 36 † ℞ 64, ſi ducatur in ſe. Sed perpendamus, valorem producti; numerus 36, reſpondet a c, & ℞ 9216, reſpondet 2 ℞ a b c^2, vel ℞ (4 a b c^2) vel 4, ℞, a b c^2, nam a b c^2, valet 2304, cuius radix quadrata eſt 48, quæ ducta in 2, facit 96, at verò cùm a b c^2, valeat 2304, hoc ducto in 4, fit 9216, cuius latus quadratum eſt 96. Vel quod idem eſt 4, ſi ducatur in 2304, pretium ipſius

	℞ 36 †	℞ 64
	℞ 36 †	℞ 64
	℞ 2304 †	64
36 †	℞ 2304	
36 †	℞ 9216 †	64
	96	

ipſius a b c^2, producit 9216, ſumatur latus, illud quidem erit 96.

Si verò propoſitum ſit multiplicare, vt ſupra ℞ a b, per ℞ c d, ex hac multiplicatione prouenit ℞ $\overline{a\,b\,c\,d}$, vnde intelligendum hoc ſymbolo extrahendam eſſe radicem quadratam ex multiplicatione a, in b, & producti in c, & iterum producti in d, atque adeo vel deſuper vt lineola ducenda in producto, vel parentheſi productum claudendum; quinimo hoc idem intelligendum de multiplicato, & multiplicante, nam cum dicimus ducendam eſſe ℞ a b, in ℞ c d, intelligendum volumus multiplicandam radicem producti ex a, in b, per radicem producti ex c d. *Exemplũ ad multiplicationem perficiendam.*

Quod ſi proponeretur multiplicandum ℞ $\overline{a^2 + b^2}$, per ℞ $\overline{a^2 - b^2}$, multiplicatis $a^2 + b^2$, per $a^2 - b^2$, fiet productum ℞ $\overline{a^2 -}$, etenim radix eſt vniuerſalis ſiuè ligata perinde enim eſt ac, ſi dicamus duci debere ℞ $(a^2 + b^2)$, per ℞ $(a^2 - b^2)$, fit enim productum ℞ $(a^4 - b^4)$, quæ numeris licebit illuſtrare. Supponamus a, valere 8, eius quudratum eſt 64, at verò b, valeat 6, eius quadratum valebit 36. Itaque $a^2 + b^2$, valebit 100, quare ℞ $\overline{a^2 + b^2}$, ſeu ℞ $(a^2 + b^2)$, valebit 10, eo enim ſymbolo denotamus extrahendam eſſe radicem quadratam ex a^2, plus b^2, at verò ℞ $\overline{a^2 - b^2}$, ſeu & $(a^2 - b^2)$, valebit ℞ 28, etenim $a^2 - b^2$, valet 64 — 36, hoc eſt 28, quamobrem ℞ $(a^2 - b^2)$, valebit ℞ 28, eo ſiquidem ſymbolo denotamus extrahendam eſſe radicem quadratam ex differentia inter a^2, & b^2, hæc igitur in numeros reſoluamus; perinde igitur eſt ducere ℞ $(a^2 + b^2)$, in ℞ $(a^2 - b^2)$ ac ducere 10, in ℞ 28, quorum multiplicatione prouenit ℞ 2800. At verò ſi explicetur ℞ $\overline{a^4 - b^4}$, ſeu ℞ $(a^4 - b^4)$, ex hypotheſi eorundem numerorum, comperietur idem pretium huius nempe producti ex mutua multiplicatione ℞ $(a^2 + b^2)$, per ℞ $(a^2 - b^2)$, propterea quod a^4, valebit 4096, & b^4, valebit 1296, quorum differentia eſt 2800, huius autem quadrata radix vt ſupra eſt ℞ 2800. *Exemplum alterũ ad idẽ.*

$$
\begin{array}{r}
℞\ \overline{a^2 + b^2} \\
℞\ \overline{a^2 - b^2} \\
\hline
- a^2 b^2 - b^4 \\
a^4 + a^2 b^2 \qquad \\
\hline
℞\ \overline{a^4 - b^4} \\
\text{Vel } ℞\ (a^4 - b^4)
\end{array}
$$

Sed quando non fuerint radices vniuerſales non eadem modo procedendum Sit multiplicandum ℞ $\overline{a^2 b^2}$ + c d, per ℞ $\overline{a^2 b^2}$ + c d, hoc eſt ſi foret opus multiplicare in ſe ℞ $\overline{a^2 b^2}$ + c d, & quidem quadraticè, fieret productum $a^2 b^2$ + 2 ℞ $\overline{a^2 b^2 c^2 d^2}$ + $c^2 d^2$. *Quando radices non fuerint vniuerſales.*

Quæ vt melius intelligantur oportet numeris rem illuſtrare. *Numeris præcepta illuſtrãtur.*

Supponaꝺus hæc literarum pretia, & quidem a, valeat 2, b, 4, c, 5, d, 6, vtique a^2, valebit 4, b^2, 16, c^2, 25, & d^2 36, atque adeo a^2, ductum in b^2, faciet 64, vnde ℞ $a^2 b^2$, valebit 8, at verò c d, valebit 30, vnde ipſius ℞ $a^2 b^2$ + c d, pretium erit 38, qui ductus in ſe quadraticè facit 1444. Videndum igitur num $a^2 b^2$ + 2 ℞ $a^2 b^2 c^2 d^2$ + $c^2 d^2$, productum ſcilicet abs ℞ $a^2 b^2$ + c d, in ſe quadraticè ducto ſit 1444,

$$
\begin{array}{r}
℞\ \overline{a^2 b^2} + c\,d \\
℞\ \overline{a^2 b^2} + c\,d \\
\hline
+ \ ℞\ \overline{a^2 b^2 c^2 d^2} + c^2 d^2 \\
a^2 b^2 + \ ℞\ \overline{a^2 b^2 c^2 d^2} \qquad\qquad \\
\hline
a^2 b^2 + 2\ ℞\ \overline{a^2 b^2 c^2 d^2} + c^2 d^2
\end{array}
$$

Hoc igitur eſt productum ex illa mutua multiplicatione.

quod, vt cognoſcamus; perpendamus ſingula producti membra; primum eſt 64, ſecundum eſt ℞ 230400; nam ſi 30, ducatur in ℞ 64, fit ℞ 57600, quæ ducta in 2, facit ℞ 2304000, nempe 480, eſt enim numerus 230400, rationalis, cuius latus quadratum eſt 480, vltimum membrum eſt 900, at verò 480, 900, & 64, conficiunt 1444, cæterùm 2 ℞ $a^2 b^2 c^2 d^2$, idem eſt, quod ℞ $(4 a^2 b^2 c^2 d^2)$ nàm ſi ℞ $a^2 b^2 c^2 d^2$, duci debet in 2, vtrunque debet quadraticè multiplicari, vt ex illo proueniat $a^2 b^2 c^2 d^2$, ex hoc autem 4, quo ducto in $a^2 b^2 c^2 d^2$, fit $4 a^2 b^2 c^2 d^2$, cuius *Supradictorũ explicatio.*

latus

Digitized by Google

latus quadratum eſt ℞ $(4a^2b^2c^2d^2)$, at a^2, eſt 4, quo ducto 16, pretium ipſius b^2, fit 64, hoc autem ducto in 25, pretium ipſius c^2, fit 1600, hoc autem ducto in 36, pretium ipſius d^2, fit 57600, hoc autem ducto in 4, fit 230400, cuius latus quadratum eſt 480; quantum fit ſi ducatur ℞ $a^2\,b^2\,c^2\,d^2$, nempe ℞ 57600, in 2, fitque 64 ✠ 480 ✠ 900, ex ℞ 64 ✠ 30, in ſe. Hunc igitur in modum procedendum erit in conſimilibus multiplicationibus.

$$\begin{array}{r} ℞\ 64 \ ✠\ 30 \\ ℞\ 64 \ ✠\ 30 \\ \hline ℞\ 57600 \ ✠\ 900 \\ 64\ ✠\ ℞\ 57600 \qquad \\ \hline 64\ ✠\ ℞\ 230400\ ✠\ 900 \\ 480 \end{array}$$

Exempla propoſita declaratio. Quod ſi multiplicari debeat ℞ $\overline{a^2 ✠ b^2}$, per a ✠ b, priùs oportet reuocare a ✠ b, ad idem ſignum radicale, & fit ℞ $\overline{a^2 ✠ 2ab ✠ b^2}$, hoc autem nihil aliud eſt, quàm a ✠ b, quadraticè in ſe ducere, fit enim a^2 ✠ 2 a b ✠ b^2, cuius latur eſt ℞ $\overline{a^2 ✠ 2ab ✠ b^2}$, ſeu a ✠ b, & ſi ℞ a^2 ✠ b^2, ducatur in ſe quadraticè fit a^2 ✠ b^2, cuius latus eſt ℞ $\overline{a^2 ✠ b^2}$. Ductis autem quadratis adinuicem, nempe a^2 ✠ 2 a b ✠ b^2, & a^2 ✠ b^2, fit productum a^4 ✠ 2 a^3 b ✠ 2 a^2b^2 ✠ 2 a b^3 ✠ b^4, cuius latus quadratum eſt ℞ (a^4 ✠ 2 a^3 b ✠ 2 a^2b^2 ✠ 2 a b^3 ✠ a^4), & hoc eſt productum factum ex multiplicatione ipſius ℞ (a^2 ✠ 2 a b ✠ b^2), per a † b. Idem plane cernes in numeris. Si enim a, valet 2, & b, 4, vtique a^2, valebit 4, & 2 a b, valebit 16, & b^2, valebit 16, vnde a^2 † 2 a b † b^2, valebit 36, atque adeo ipſius ℞ (a^2 † 2 a b † b^2), pretium erit 6. At ſi a, valet 2, & b, 4, vtique a^2 † b^2, valebit 20, & ℞ $\overline{a^2 † b^2}$, pretium erit ℞ 20, quare ex ducta ℞ $\overline{a^2 † 2ab † b^2}$, in ℞ $\overline{a^2 † b^2}$, fieri debet productum, cuius pretium, ex eadem hypotheſi æſtimationis ipſorum a, & b, ſit ℞ 720, numerus factus ex ℞ 20, in 6. Videndum igitur quantus ſit valor ipſius ℞ (a^4 † 2 a^3 b † 2 a^2b^2 † 2 a b^3 † b^4). Si a, valet 2, a^2, valebit 4, & a^4, valebit 16, & hoc eſt pro primo membro a^4. At verò a^3, valebit 8, qui ductus in 4, pretium ipſius b, facit 32, cuius duplum eſt 64, & hoc pro ſecundo membro 2 a^3 b. Deinde a^2, valet 4, qui ductus in 16, pretium ipſius b^2, facit 64, cuius duplum eſt 128, & hoc pro tertio membro; Poſtea a, valet 2, & b^3, valet 64, his ductis inter ſe fit 128, cuius duplum eſt 256, & hoc pro quarto membro. Denique quadrato quadratum ipſius b, cuius pretium eſt 4, erit 256, colligantur omnes hi quinque numeri in vnam ſummam, & proueniet 720; cuius latus quadratum eſt ℞ 720, vt oportebat.

Exemplum alterum. Propoſitio declaratio. Sit iniunctum multiplicare a † ℞ b c, per a † ℞ b c.

Primò enim ducatur ℞ b c, in ℞ b c, vt proueniat b c, deinde multiplicetur a, per ℞ b c, hoc autem productum bifariam deſignari poteſt, vel nempe reducendo a, ad quadraticam nauuram, nempe multiplicando illum in ſe quadraticè, vt proueniat a^2, quod ductum in b c, quadratum ipſius ℞ b c, facit a^2 b c, cui præfixo eodem charactere fit productum ℞ $\overline{a^2bc}$, quod etiam deſignari poterit, vt paulo poſt dicemus. Deinde iterum multiplicetur a, per ℞ b c, & eodem modo operando proueniet ℞ a^2 b c, mox autem ducatur a, in ſe quadraticè, & proueniet a^2, his autem omnibus in vnam ſummam collectis proueniet a^2 † 2 ℞ $\overline{a^2\,b\,c}$ † b c, ſeu 2 a ℞ b c, ſeu a^2 † ℞ [4 a^2 b c] † b c, ſeu a^2 † 4, ℞, a^2 b c.

$$\begin{array}{r} a\ †\ ℞\ b\ c \\ a\ †\ ℞\ b\ c \\ \hline ℞\ \overline{a^2\,b\,c}\ †\ \ b\ c \\ a^2\ †\ \ ℞\ \overline{a^2\,b\,c} \qquad\quad \\ \hline a^2\ †\ 2\ ℞\ \overline{a^2\,b\,c}\ †\ \ b\ c \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Vel}\ \ a\ †\ ℞\ b\ c \\ a\ †\ ℞\ b\ c \\ \hline a\ ℞\ b\ c\ †\ \ b\ c \\ a^2\ †\ \ a\ ℞\ b\ c \qquad\quad \\ \hline a^2\ †\ 2\ a\ ℞\ b\ c\ †\ \ b\ c \end{array}$$

Poteſt

Conſulitur quomodo ſit ſcribendum.

Poteſt etiam hoc modo illud productum deſignari, nempe a ℞ b c quo ſymbolo denotamus ℞ b c duci per a cum aliàs expreſſiùs idem ſigificemus ſcribendo ℞ $\overline{a^2bc}$ hoc enim modo iam operatio abſoluta eſt, & facta eſt ipſa multiplicatio, vnde ſi quis volens ſignificare ℞ 8 duci in 3 duobus modis ſcribere productum poſſet, vel 3 ℞ 8, vel ℞ 7 2 videtur mihi meliùs ſcribi ℞ 72. Ita etiam, & meliùs ℞ $\overline{a^2\,b\,c}$, quàm a ℞ b c, quicquid alij dicant.

Qua arte ſuperior multiplicatio perfici poſſe.

Non diſſimiliter ſuperior illa multiplicatio, ad hune qui ſequitur in modum perfici poſſet. Cæterùm rectè dicebatur in idem recidere ſiue ſcribatur a ℞ b c ſiue ℞ $\overline{a^2\,b\,c}$; nam ſi a valet 3, a^2 valebit 9, at verò ſi b, valeat 8, & c valeat 2 vtiq; b c valebit 16 atque a^2 b c valebit 144. cuius latus eſt 12 pretium ipſius ℞ $\overline{a^2bc}$. At ſi b c valet 16, ℞ b c valebit 4, ſi autem a valet 3, vtique a ℞ b c valebit 12, quare, &c.

Nihil refer vtro modo procedatur.

Non eſt igitur id ignorandum in idem ſcilicet redire, vtro modo procedatur Quamobrem, vt quiſpiam in operando ritè procedat, debet ſolùm præ aculis habere, quod initio aggreditur operandi genus, vt deinceps ſibi conſtans non diſſimiliter procedat. Sed hæc explicemus.

$$\text{℞}\,\overline{a^2b^2} + c\,d$$
$$\text{℞}\,\overline{a^2b^2} + c\,d$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad}$$
$$c\,d\,\text{℞}\,\overline{a^2b^2} + c^2d^2$$
$$a^2b^2 + c\,d\,\text{℞}\,\overline{a^2b^2}$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$a^2b^2 + 2\,c\,d\,\text{℞}\,\overline{a^2b^2} + c^2d^2$$
$$\text{Vel } a^2b^2 +, c\,d, 4, \text{℞}, a^2b^2 + c^2d^2$$
$$\text{Vel } a^2b^2 + c\,d\,\text{℞}\,(4\,a^2b^2) + c^2d^2$$
$$\text{Vel vt ſupra } a^2b^2 + 2\,\text{℞}\,(a^2b^2c^2d^2) + c^2d^2$$
$$\text{Vel denique } a^2b^2 + \text{℞}\,(4\,a^2b^2c^2d^2) + c^2d^2$$

Literarum pretia ad explicanda quæ hactenus tradita ſunt.

a	2
b	3
c	4
d	5

Hìc tamen aduerte cùm interceſſerit ſignum + vel — repetendũ numerũ eſſe; vnde ſi fuerit 2 ℞ ($b\,a^2 - a^4$) ſcribendum ℞ ($4\,b\,a^2 - 4\,a^4$) vbi 4 vtriq; termino præfigitur.

Supponamus literarum pretia eſſe quę à latere, & ex huiuſmodi hypotheſi tractentur ſuprapoſitę magnitudines; deprehendetur enim rectè ab Arte præſcribi, quæ nos præcepta attulimus. Si enim a valet 2, & b, valet 3, vtique a^2 valebit 4, & b^2, valebit 9, ducto autem 4 in 9, fit 36, & hoc eſt pretium ipſius a^2b^2, cuius latus quadratum eſt ℞ $\overline{a^2b^2}$, nempe 6, eſt enim 6, latus quadratum numeri 36 at verò ſi c valet 4, & d, valet 5, pretium ipſius c d erit 20. Itaque ℞ $\overline{a^2b^2}$ + c d, valebit 26, quare $a^2b^2 + 2\,c\,d\,\text{℞}\,a^2b^2 + c^2d^2$, pretium erit 676, nempe quadratum ex 26, cum $a^2b^2 + 2\,c\,d\,\text{℞}\,\overline{a^2b^2} + c^2d^2$ ſit quadratũ, ex ℞ $\overline{a^2b^2}$ + c d; Verùm id ſupereſt perpẽdendũ, a^2b^2, valet 36, at 2 c d valet 40, quo ducto in 6, pretium ipſius ℞ $\overline{a^2b^2}$, fit 240; deinde pretium vltimi membri c^2d^2, eſt 400, at ſi 36, 240, 400, in vnam ſummam redigantur, fit 676, vt conſtat, explicemus productum ſecundo modo exhibitum. Primum membrum eſt a^2b^2, cuius pretium eſt 36. Deinde c d, 4, ℞ a^2b^2 valet 240; nam a^2b^2, valet 36, quo ducto in 4, fit 144, huius latus quadratum eſt 12, quo multiplicate per 20, pretium ipſius c d, fit 240, at pretium ipſius c^2d^2 eſt 400 hiſq; collectis, vt prius fit 676.

Alia eodem modo numeris explicantur, ac illuſtrantur, et tertius, & quartus ac quintus modus colligendi producta.

Deinde ad trutinam reuocemus productum tertio modo; ſcilicet $a^2b^2 + c\,d\,\text{℞}\,(4\,a^2b^2) + c^2d^2$, & non diſſimiliter colligemus eius pretium eſſe 676.; nam a^2b^2, valet 36, it qui 36, ductus in 4, facit 144, cuius latus quadratum 12, multiplicatum per 20, pretium ipſius c d, facit 240, denique c^2d^2, valet 400, è quibus, conſurgit 676.

Ad quartum quod attinet. Primum membrum, puta a^2b^2, valet 36. At verò a^2, valet 4, quo ducto in 9 pretium ipſius b^2, fit 36 hoc autem multiplicato per 16, pretium ipſius c^2, fit 576, quo ducto in 25 pretium ipſius d^2 fit 14400 cuius latus quadratum eſt 120, itaque ℞ ($a^2b^2c^2d^2$) valet 120, quo multiplicato per 2, fit 240; Vltimum membrum eſt c^2d^2, quod valet 400, ex his autem; nempe 36, 240, & 400, conſurgit vt priùs 676.

Vltimus modus colligendi producta explicatur.

Ad vltimum quod ſpectat; primum membrum puta $a^2 b^2$, valet 36, Deinde, a $b^2 c^2 d^2$, valet 14400, quo ducto in 4 ſit 57600, huius latus quadratum eſt 240 vltimum membrum $c^2 d^2$, valet 400, atque, vt priùs ex 36, 240, 400 conſurgit 676.

Diuiſio quantitatum Surdarum.

Inſtituitur diuiſio quando quantitates ſunt communicantes.

SI fuerint datæ quantitates communicantes, opretet diuidere tantùm quantitates, ſiue numeros extra ſignum radicale poſitos, & quod prouenit erit quotiens quæſitus. Vt ſi oporteat diuidere ℞ ($75 a^2$) per ℞ ($27 a^2$) hoc eſt 5 a ℞ 3 per 3 a ℞ 3. diuidatur 5 a per 3 a, vel quod idem eſt, diuidatur 5 per 3, fiet quotiens $\frac{5}{3}$ hoc eſt 1 $\frac{2}{3}$. Noc ſecus, cùm propoſitum fuerit diuidere ℞ ($108 a^2$) per ℞ ($48 a^2$) hoc eſt 6 a ℞ 3 per 4 a ℞ 3. diuidatur 6 a per 4 a, vel quod idem eſt diuidatur 6 per 4, fiet quotiens $\frac{6}{4}$ hoc eſt 1 $\frac{1}{2}$. Quod ſi proponeretur ℞ ($a^4 + a^2 b^2$) diuidendum per ℞ ($a^2 b^2 + b^4$) nempe a ℞ ($a^2 + b^2$) per b ℞ ($a^2 + b^2$) Oportet diuidere a per b, vt fiat quotiens $\frac{a}{b}$ Vbi hìc oportet aduertere non eſſe mirandum ſi applicetur quantitas, quantitati eiuſdem omnino dimenſionis; Tametſi enim ſuo loco docuerimus applicandam eſſe quantitatem altiorem, depreſſiori, tamen non repugnat etiam applicationem fieri vnius quantitatis ad aliam eiuſdem dimenſionis, ſi per ipſas ſpecies intelligantur quantitates diſcretę; vnde ſi per a intelligatur exempli gratia 20, & per b intelligatur 4, nullum ſequitur incommodum, nempe ſi a intelligatur applicari ad. b. Imo etiam illud quoque licet hìc, nempe lineam hunc in modum deſignare $\frac{a}{b}$ vel $\frac{b}{c}$ vel $\frac{a}{d}$ ſiue $\frac{b}{d}$ alijſue modis ſimilibus, non ſecus ac in Arithmetica, fractiones deſignare valemus cùm dicimus $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$, &c. fractio enim literis exprimitur, imo cùm numerator ad denominatorem non habeat rationem commenſurabilem, ſed quæ ſimilis ſit lineæ ad lineam, quarum vna fungatur munere numeratoris, altera verò denominatoris eiuſdem fractionis. Vnde intelligimus lineam a ſe habere tanquam numeratorem, at b, velut denominatorem eiuſdem fractionis, itaut reſpondeat exempligratia fractioni Arithmeticæ $\frac{2}{3}$ vel $\frac{2}{℞ 5}$, adeo vt ſignificetur eo ſymbolo ratio, quæ eſt inter 2, & 3, vel inter 2, & ℞ 5, vel alia, prout res de qua ſit ſermo, expoſcit.

Hic non nulla notatu digna circa diuiſionem ſunt aduertenda.

Alia diuiſionis exempla aſferuntur, ac explicantur.

Si verò proponeretur ℞ $\overline{a b c^2}$ ſeu c ℞ ab diuidendum per ℞ a b, fiet quotiens c; vt enim ℞ a b ſi ducatur in c, fit c ℞ a b, ita ſi c ℞ a b diuidatur per ℞ a b, fiet quotiens c. Cæterum, vt ſuperiùs vidimus idem eſt c ℞ a b, ac eſt ℞ $\overline{a b c^2}$, hoc enim ſymbolo denotamus quadratum ex c ductum eſſe in a b, & ex producto radicem eſſe extractam, at cùm ſcribimus c ℞ a b, ſignificamus, ducendum eſſe c in ℞ a b, & ex producto extrahendam eſſe radicem. Vt enim idem eſt 2 ℞ a b, ac eſt ℞ $\overline{4 a b}$, ſeu 4, ℞, a b, &c. quod ſuperiùs luculenter explicuimus, ita hìc idem eſt c ℞ a b, ac eſt ℞ $\overline{a b c^2}$; Nec diſſimiliter procedendum erit in alijs diuiſionibus perficiendis, cùm ſcilicet datæ quantitates, nempe diuidenda, & diuidens communicantes fuerint.

Quando quantitates no fuerint communicantes, qua arte procedendum in diuiſione perficienda.

Quod ſi quantitates non fuerint communicantes, diuidendæ erunt quantitates ſub ſignis radicalibus comprehenſæ; quantitati autem ortiuæ pręfigendum erit commune radicale ſignum; Vt ad diuidendum ℞ $\overline{a^3 b - a b^3}$ per ℞ $\overline{a^2 - b^2}$ oportet diuidere $a^3 b - a b^3$ per $a^2 - b^2$, proueniet autem a b; ſi enim + $a^3 b$ diuidatur per + a^2, prouenit + a b, ſi verò − $a b^3$ per − b^2 prouenit item + a b, cui pręfixo eodem radicali ſigno, prouenit quotiens ℞ a b, tantum igitur oritur ex diuiſione ipſius ℞ $\overline{a^3 b - a b^3}$ per ℞ $\overline{a^2 - b^2}$ quę vt meliùs intelligantur, alia afferemus exempla.

Si proponatur ℞ $\overline{a^4 b - a b^4}$ diuidendum per ℞ $\overline{a^3 - b^3}$, diuidatur $a^4 b - a b^4$ per $a^3 - b^3$ prouenit autem a b; nam ſi diuidatur $a^4 b$ per a^3 prouenit a b, ſi diuidatur $a b^4$ per b^3 prouenit item a b, quare ſupereſt tantùm, vt pręfigamus ipſi a b, ſignum radicale ℞.

Ita ſi oporteat diuidere ℞ $\overline{a^3 b + a b^3 + a b d^2}$ per ℞ $\overline{a^2 + b^2 + d^2}$ Diuiſis $a^3 b$ + $a^3 b^3$

$a^2b^3 + a^2bd^2$ per $a^2 + b^2 + d^2$, proueniet a^2b, cui ſi pręfigatur idem ſignum radicale, prouenict ℞ a^2b, & ſic de ſimilibus.

Aliud exemplum.

Quod ſi contra oporteat diuidere ℞ $\overline{a^4b + a^2b^3 + a^2bd^2}$ per a^2b, fiet quotiens ℞ $\overline{a^2 + b^2 + d^2}$ eodemque modo procedendum in cæteris, quando nimirum ſigna radicalia fuerint eiuſdem naturę.

Quando radicalia ſigna diuerſa extiterit.

At ſi radicalia ſigna diuerſa extiterint, priùs reducenda erunt ad idem ſignum, deinde procedendum, vt priùs, quod exemplis planum fiet.

Exempla ad id declarandum.

Opus ſit diuidere ℞ $\overline{a^4 + 2a^3b - 2ab^3 - b^4}$ per $a + b$, ducatur $a + b$ in ſe, & fiet $a^2 + 2ab + b^2$ itaque diuiſor erit ℞ $\overline{a^2 + 2ab + b^2}$, per hunc igitur diuiſorem diuidatur ℞ $\overline{a^4 + 2a^3b - 2ab^3 - b^4}$ & fiet quotiens ℞ $\overline{a^2 - b^2}$ quod ſi diuidere oporteret ℞ $\overline{a^4 + 2a^3b - 2ab^3 - b^4}$ per ℞ $\overline{a^2 - b^2}$ fieret quotiens ℞ $\overline{a^2 + 2ab + b^2}$ hoc eſt $a + b$. At ſi oporteret diuidere ℞ $\overline{a^4 + 2a^3b + 2ab^3 + 3a^2b^2 + b^4}$ per $a + b$, non diſſimiliter procedendum: Ducendum eſt enim $a + b$ in ſe, vt fiat $a^2 + 2ab + b^2$ erit igitur diuiſor ℞ $\overline{a^2 + 2ab + b^2}$ diuiſione verò inſtituta proueniet quotiens ℞ $\overline{a^2 + b^2}$ quod ſi diuidere oporteret ℞ $\overline{a^4 + 2a^3b + 2ab^3 + 2a^2b^2 + b^4}$ per ℞ $\overline{a^2 + b^2}$ fieret quotiens ℞ $\overline{a^2 + 2ab + b^2}$, hoc eſt $a + b$, vt perſpicuum eſt.

Exemplum alterum ad idem.

Diuidere ſit iniunctum $a^3 + ab^2$ per ℞ $\overline{a^4 + a^2b^2}$. Primò multipliciter $a^3 + ab^2$ in ſe, prouenit verò $a^6 + 2a^4b^2 + a^2b^4$; Diuidere igitur oportet ℞ $\overline{a^6 + 2a^4b^2 + a^2b^4}$ per ℞ $\overline{a^4 + a^2b^2}$ facta verò diuiſione fit, quotiens ℞ $\overline{a^2 + b^2}$

$$\begin{array}{r} a^3 + ab^2 \\ a^3 + ab^2 \\ \hline a^4b^2 + a^2b^4 \\ a^6 + a^4b^2 \quad\quad \\ \hline a^6 + 2a^4b^2 + a^2b^4 \end{array}$$

Diuiſionis ratio.

Huius diuiſionis ea eſt ratio; Si diuidatur ℞ $\overline{a^4 + 2a^3b - 2ab^3 - b^4}$ per ℞ $\overline{a^2 + 2ab + b^2}$ ſumenda ſunt eorum qoadrata vnde diuidere oportet $+ a^4$ per $+ a^2$, & pro venit $+ a^2$, ſi diuidatur $+ 2a^3b$ per $2ab$, fit quotiens item $+ a^2$, ſi verò diuidatur $- 2ab^3$ per $2ab$, fit quotiens $- b^2$ ſi diuidatur $- b^4$ per $+ b^2$ fit quotiens $- b^2$ vnde quotiens integer erit ℞ $\overline{a^2 - b^2}$.

Exemplum alterum.

Non ſecus cum diuiditur ℞ $\overline{a^4 + 2a^3b + 2ab^3 + 2a^2b^2 + b^4}$ per ℞ $\overline{a^2 + 2ab + b^2}$ ſumenda ſunt eorum quadrata, vnde ſi diuidatur $+ a^4$ per $+ a^2$, fiet quotiens $+ a^2$ ſi diuidatur $+ 2a^3b$ per a^2 fit quotiens $2ab$. Si verò diuidatur $+ 2a^2b^2$ per b^2 fit quotiēs $+ b^2$ vbi aduerte a^2b^2 bis adhiberi, ſemel in prima, & ſemel in tertia diuiſione, vnde reſtituit $2a^2b^2$ quod eſt in quantitate diuidenda, quod diuiſione facta ſecundum formam ipſius, conſtabit. Itaque integer quotiens erit ℞ $\overline{a^2 + b^2}$

Item aliud exemplum ad idem.

Quod ſi proponatur diuidendum $a^2 + b^2$ per ℞ $\overline{a^2 + b^2}$ oportet diuidere $a^2 + b^2$ per ſuum latus cuiuſmodi eſt ℞ $\overline{a^2 + b^2}$, at ſi quadratum applicetur lateri oritur latus, quamobrem quotiens erit ℞ $\overline{a^2 + b^2}$

Exemplum aliud.

Quod ſi oporteat diuidere $a^3 + ab^2$ per ℞ $\overline{a^2 + b^2}$ oritur a ℞ $\overline{a^2 + b^2}$ nam oportet reductionem facere ad idem ſignum radicale, quare ducendum eſt $a^3 + ab^2$ in ſe, vt fiat $a^6 + 2a^4b^2 + a^2b^4$, vnde diuidere oportet ℞ $\overline{a^6 + 2a^4b^2 + a^2b^4}$ per ℞ $\overline{a^2 + b^2}$, ſumptis eorum quadrantis diuidendo a^6 per a^2 fit quotiens a^4, quo ducto in $a^2 + b^2$, diuiſorem fit $a^6 + a^4b^2$ hoc ſubtracto ex quantitate diuidenda, fit reliquū $a^4b^2 + a^2b^4$ hoc diuiſo per eundem diuiſorem $a^2 + b^2$ fit quoticus a^2b^2 quo multiplicato per $a^2 + b^2$ fit productum $a^4b^2 + a^2b^4$, quo ſubtracto ex reliquo iam dicto, nihil remanet, itaut quotiens ſit $a^4 + a^2b^2$, cuius latus eſt a ℞ $\overline{a^2 + b^2}$. Hæc autem multiplicatione comprobantur, ſi enim ducamus ℞ $\overline{a^2 + b^2}$ in a ℞ $\overline{a^2 + b^2}$ fit productum $a^3 + ab^2$ vel ſi ducamus $a^4 + a^2b^2$ quadratum quotientis a ℞ $\overline{a^2 + b^2}$ in $a^2 + b^2$ quadratum ipſius ℞ $\overline{a^2 + b^2}$ diuiſoris, fit $a^6 + 2a^4b^2 + a^2b^4$ quadratum diuidendę quantitatis $a^3 + ab^2$.
Quia tamen id quibuſdam non probatur, lubet hunc in modum confirmare.

Explicatio ſupradictorum.

Supponamus à valere 3, & b, valere 4, argo a^2, valet 9, & b^2, valet 16, atque $a^2 + b^2$ valebit 25, quare pretium ipſius ℞ $\overline{a^2 + b^2}$, erit 5. Diuiſor igitur erit 5. At verò quod eſt diuidendum erat $a^3 + ab^2$, ex hypotheſi iam dicta a^3, valebit 27, & ipſius ab^2, pretium erit 48, quare $a^3 + ab^2$ valebit 75. Cum igitur diui-

Digitized by Google

dere oportet $a^3 + a b^2$ per ℞ $\overline{a^2 + b^2}$, perinde eſt, ac diuidere 75 per 5, fit autem quotiens 15, at cùm diceremus quotientem fieri a ℞ $\overline{a^2 + b^2}$ rectè ſe habet; nam a^2 eſt 9, & b^2 eſt 16, è quibus fit 25, cuius latus eſt 5, quod ductum in 3 facit 15.

Quorundam error detegitur. Malè igitur alij pragmatiam inſtituunt.

Exemplum ad idem. Sit iniunctum diuidere $a^2 - bc$ per $a +$ ℞ bc, fiet quotiens $a -$ ℞ bc, quod multiplicatione comprobabitur, ſi enim diuiſor $a +$ ℞ bc, ducatur in $a -$ ℞ bc quotientem iam dictum, producitur $a^2 - bc$, quantitas diuidenda. Diuiſionis autem inſtituendæ ratio eſt, quia ſi diuidatur a^2 per a fit quotiens a, quo ducto in a fit a^2 hoc ſubtracto ex a^2 remanet $- bc$ ducto autem in ℞ bc, fit a ℞ bc atque adeo reliquum diuidendi erit $- a$ ℞ $bc - bc$ at ſi $- a$ ℞ bc diuidatur per a fit quotiens $-$ ℞ bc quo ducto in $+$ ℞ bc, fit productum $- bc$ quo ſubtracto ex reliquo diuidendi, $- bc$ nihil remanet; vnde diuiſio eſt abſoluta, & ad finem perducta.

$$
\begin{array}{rl}
a + \text{℞}\, bc & \text{diuiſor} \\
a - \text{℞}\, bc & \text{quotiens} \\
\hline
- \text{℞}\, a^2 bc - bc & \\
a^2 + \text{℞}\, a^2 bc & \\
\hline
a^2 - bc \phantom{+ \text{℞}\, a^2 bc} &
\end{array}
$$

Exemplum alterum. At ſi foret operæ pretium diuidere $a^2 + 2$ ℞ $a^2 bc + bc$ per $a +$ ℞ bc quotiens fieret $a +$ ℞ bc, propterea quod $a^2 + 2$ ℞ $a^2 bc + bc$ eſt quadratum ipſius $a +$ ℞ bc, quadratum autem applicatum lateri reſtituit latus.

Exemplo rurſu preceptum declaratur. Ita ſimiliter ſi propoſitum ſit diuidere $ab + b$ ℞ bc per $a +$ ℞ bc fit quotiens b, eadẽ enim quãtitas b oritur ſi diuidatur ab per a & b ℞ bc per ℞ bc propterea ex huiuſmodi diuiſione quotiens proueniens erit b; quod multiplicatione comprobatur, namque multiplicato $a +$ ℞ bc per b, fit productum $ab + b$ ℞ bc, quotiens igitur eſt quantitas b, quę ducta in diuiſorem $a +$ ℞ bc, facit diuidendam quantitatem $ab + b$ ℞ bc.

Exemplum alterum vt dictum. Propoſitum ſit diuidere ℞ $\overline{a^4 + 2a^3b - 2ab^3 - b^4} - a^2 + b^2$ per $a + b$. Oportet autem procedere, vt dictum eſt, & proueniet quotiens ℞ $\overline{a^2 - b^2} - a + b$. Si enim ℞ $\overline{a^4 + 2a^3b - 2ab^3 - b^4}$ diuidatur per $a + b$, hoc eſt per eius quadratum $a^2 + 2ab + b^2$ diuidatur $a^4 + 2a^3b - 2ab^3 - b^4$, oritur $a^2 - b^2$, cuius latus eſt ℞ $\overline{a^2 - b^2}$, at ſi $- a^2 + b^2$ diuidatur per $+ a + b$, fit quotiens $- a + b$. Hæc verò multiplicatione comprobantur.

$$
\begin{array}{r}
- a + b \\
a + b \\
\hline
- ab + b^2 \\
- a^2 + ab \\
\hline
- a^2 + b^2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
a + b \\
a + b \\
\hline
ab + b^2 \\
a^2 + ab \\
\hline
a^2 + 2ab + b^2 \\
a^2 - b^2 \\
\hline
- a^2b^2 - 2ab^3 - b^4 \\
a^4 + 2a^3b + a^2b^2 \\
\hline
a^4 + 2a^3b - 2ab^3 - b^4 \\
\hline
\text{℞}\, a^4 + 2a^3b - 2ab^3 - b^4
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
\text{℞}\, \overline{a^2 - b^2} - a + b \\
a + b \\
\hline
\text{℞}\, a^4 + 2a^3b - 2ab^3 - b^4 - a^2 + b^2
\end{array}
$$

Multiplicatione diuiſio ſuperior comprobatur. Diuiſor eſt $a + b$, quotiens verò ℞ $\overline{a^2 - b^2} - a + b$ ſi enim $- a + b$ ducatur in $+ a + b$ fit productum $- a^2 + b^2$, at verò ſi ℞ $\overline{a^2 - b^2}$ ducatur in $+ a + b$ fit productum ℞ $\overline{a^4 + 2a^3b - 2ab^3 - b^4}$, ad id enim oportet $a + b$ quadraticè multiplicare, vt conſtat ex præceptis ſuo loco traditis, per huiuſmodi verò multiplicationem producitur a^2

$+ 2ab$

† 2 a b † b^2 ducendum in $a^2 - b^2$, nempe quadratum ipſius ℞ $\overline{a^2 - b^2}$, & fit a^4 † 2 $a^3 b$ — 2 a b^3 — b^4, cuius latus eſt ℞ $\overline{a^4 † 2 a^3 b - 2 a b^3 - b^4}$, atque adeo productum integrum erit quantitas illa diuidenda ℞ $\overline{a^4 † 2 a^3 b - 2 a b^3 - b^4}$ — a^2 † b^2. Rectè igitur enunciatum fuit ex ſupradicta diuiſione oriri ℞ $\overline{a^2 - b^2}$ — a † b.

Propoſitum ſit diuidere a^3 † a b^2 † a b ℞ $\overline{a^2 † b^2}$ per a ℞ $\overline{a^2 † b^2}$ proueniet quotiens ℞ $\overline{a^2 † b^2}$ † b. Siquidem a ℞ $\overline{a^2 † b^2}$ diuidendo a b ℞ $\overline{a^2 † b^2}$ facit quotientem b, at verò a ℞ $\overline{a^2 † b^2}$ diuidendo a^3 † a b^2, facit quotientem ℞ $\overline{a^2 † b^2}$, propterea ex illa diuiſione orietur ℞ $\overline{a^2 ✣ b^2}$ ✠ b. Id autem multiplicatione confirmabitur, vt à latere hic cernere licet. Verum non erit abs re numeris hęc illuſtrare, ſat erit tamen hoc vnum exemplum explicaſſe. *Exemplum.*

℞ $\overline{a^2 † b^2}$ † b
† a ℞ $\overline{a^2 † b^2}$
————————
a^3 ✠ a b^2 ✣ a b ℞ $\overline{a^2 † b^2}$

Supponamus ipſius a valorem eſſe 3, at verò ipſius b pretium eſſe 4, igitur a^2 valebit 9, & b^2 valebit 16, quare a^2 † b^2, valebit 25, vnde ipſius ℞ $\overline{a^2 † b^2}$ pretium erit 5, at a^3 valebit 27, & a b^2, valebit 48, quare ipſius a^3 † a b^2 valor erit 75 ſed a b valebit 12, & quia ℞ $\overline{a^2 † b^2}$ valet 5, vtique a b ℞ $\overline{a^2 † b^2}$ valebit 60, vnde, cum a^3 † a b^2 valent 75, tota quantitas nempe a^3 † a b^2 † ℞ $\overline{a^2 † b^2}$ valebit 135, eſt igitur diuidenda quantitas, cuius valor eſt 135, & quia diuiſor eſt a ℞ $\overline{a^2 † b^2}$, & a valet 3, vt ℞ $\overline{a^2 † b^2}$, valet 5, ipſum a ℞ $\overline{a^2 † b^2}$, valebit 15, perinde igitur erit diuidere a^3 † a b^2 † a b ℞ $\overline{a^2 † b^2}$ per a ℞ $\overline{a^2 † b^2}$ ac diuidere 135 per 15, ex hac autem diuiſione oritur 9 ſed quotiens ex prędicta diuiſione dicebatur eſſe ℞ $\overline{a^2 † b^2}$ † b, manifeſtum eſt autem huius pretium eſſe 9, ſiquidem ℞ $\overline{a^2 † b^2}$ eſt 5, at verò b eſt 4 ex 5, & 4 fit 9. Optimè proinde Diuiſio ad eum, quem diximus modum, perficitur. *Numeris hactenus dicta declarantur.*

Diuidatur a b — c d per ℞ a b — ℞ c d, fiet autem quotiens ℞ a b ✠ ℞ c d, eſt enim a b quadratum ipſius ℞ a b, quadratum autem applicatum lateri reſtituit latus. Deinde ſi — per — diuidatur emergit ✠ mox autem ℞ c d, diuidens c d, ob eandem rationem; faciet ℞ c d, ſiquidem c d eſt quadratum ipſius ℞ c d, quare integer quotiens erit ℞ a b † ℞ c d, quod eſt magnopere obſeruandum. In his autem diuiſionibus ſe ſe quiſque debet exercere. *Aliud rurſus proponitur exemplum.*

Proponatur a^2 ✠ b c ℞ b c, diuidendum per a ✣ ℞ b c. Diuidatur a^2 per a fit quotiens a^1, quo ducto in diuiſorem a ✣ ℞ b c fit a^2 † a^1 ℞ b c hoc ſubtracto ex diuidendo a^2 † b c ℞ b c remanet † b c ℞ b c — a^1 ℞ b c. Deinde diuidatur b c ℞ b c — a^1 ℞ b c per eundem diuiſorem, & fit quotiens † b c, hoc multiplicato per a ✠ ℞ b c diuiſorem, fit a b c † b c ℞ b c quo ſubtracto ex b c ℞ b c — a^1 ℞ b c, remanet — a^1 ℞ b c — a b c modo diuidatur — a^1 ℞ b c — a b c per eundem diuiſorem, fit quotiens — a ℞ b c, quo ducto in diuiſorem a ✠ ℞ b c fit productum — a^1 ℞ b c — a b c, quo ſubſtracto ex — a^1 ℞ b c — a b c nihil remanet; atque adeo diuiſio ad finem perducta erit. *Exemplum.*

Pręterea ſit iniunctum diuidere $a^2 b^2$ — $c^2 d^2$ per ℞ a b — ℞ c d, fiet quotiens $\overline{a b † c d}$ ℞ a b † $\overline{a b † c d}$ ℞ c d autem hic ductus in diuiſorem ℞ a b — ℞ c d dabit quantitatem diuidēdam $a^2 b^2$ — $c^2 d^2$. quod cernere licet hic à latere ex appoſito paradigmate, vbi nimirum ſupradicta inſtituitur multiplicatio quotientts per diuiſorem. *Exemplum alterum multiplicatione comprobatum.*

$\overline{a b † c d}$ ℞ † $\overline{a b † c d}$ ℞ c d quotiens
℞ a b — ℞ c d diuiſor
————————
— $\overline{a b † c d}$ ℞ a b ℞ c d — $\overline{a b † c d}$ c d
† $\overline{a b † c d}$ a b † $\overline{a b † c d}$ ℞ a b ℞ c d
————————
† $\overline{a b † c d}$ a b — $\overline{a b † c d}$ c d productum.

— $\overline{a b † c d}$, c d
c d
————
— a b c d † $c^2 d^2$

$\overline{a b † c d}$, a b
a b
————
† $a^2 b^2$ † a b c d
— a b c d † $c^2 d^2$
————
$a^2 b^2$ — c^2

Hęc

Explicatur instituta diuiſio.

Hęc verò nos infra comprobabimus explicatione numerorum; interim adnotetur diuiſionis inſtitutio; quę fit iuxta præcepta tradita; eſt enim a b latus quadratum ipſius $a^2 b^2$, ſi enim a b ducatur in ſe fit $a^2 b^2$ præterea c d eſt eodem modo latus ipſius $c^2 d^2$ hæc latera ſimul iuncta faciunt a b † c d, in hoc autem aggregatum, ducatur latus quadrato-quadratum eiuſdem $a^2 b^2$ nempe ℞ a b, fiet enim $\overline{ab \dagger cd}$ ℞ a b.

Non diſſimiliter, a b, vt diximus eſt latus quadratum ipſius $a^2 b^2$, & c d latus quadratum ipſius $c^2 d^2$ hęc duo latera ſimul iuncta faciunt $\overline{ab \dagger cd}$ in hoc autem aggregatum ducatur latus quadrato-quadratum ipſius $c^2 d^2$, nempe ℞ c d. Itaque totum quod ex diuiſione emergit, erit $\overline{ab \dagger cd}$ ℞ a b ✠ $\overline{ab \dagger cd}$ ℞ c d, & ita diuiſio commemorata perficitur. Si verò quotiens iam dictus multiplicatus fuerit per diuiſorem ℞ a b — ℞ c d producitur † $\overline{ab \dagger cd}$ a b — $\overline{ab \dagger cd}$ c d hoc eſt † $a^2 b^2$ † a b c d, & — a b c d † $c^2 d^2$ totum autem hoc a b illo in additione ſubtrahendum ob notam, ſymbolumue defectus, quare, ſimilibus de medio ſublatis, fiet reſiduum $a^2 b^2$ — $c^2 d^2$ nempe quantitas diuidenda.

Illuſtrantur numeris hactenus tradita.

Cæterum hęc illuſtrantur numeris hunc in modum a, valeat 16, b, 25, c, 4, & d, 9. Itaque a b erit 400, at c d erit 36, vnde a b † c d erit 436 ſed ℞ a b, erit ℞ 400, nempe 20, quare ducatur 436 in 20, & proueniet 8720, & hoc erit pretium ipſius $\overline{ab ✠ cd}$ ℞ a b. Deinde idem 436, pretium ipſius a b ✠ c d, ducatur in 6, pretium ipſius ℞ c d, & proueniet 2616, quo addito ad 8720, fit 11336. At ſi a b, valet 400, ℞ a b, valebit 20, & ſi c d valet 36, ℞ c d, valebit 6, quare ℞ a b — ℞ c d, pretium erit 14, quo ducto in 11336, fit 158704. Hoc autem eſt etiam pretium diuidendæ quantitatis $a^2 d^2$ — $c^2 d^2$ ſiquidem a^2 valet 256, & b^2 valet 625, ex horum mutua multiplicatione prouenit 160000, at verò ſi d valet 9, d^2 valebit 81, & ſi c valet 4, c^2 valebit 16, at ex 16 in 81 fit 1296. Si verò $a^2 b^2$ valet 160000, & $c^2 d^2$ valet 1296, horum differentia 158704, erit pretium ipſius, $a^2 b^2$ — $c^2 d^2$, vt ſuperiùs dicebamus.

Diuiſionis aliud proponitur exemplū.

Propoſitum ſit diuidere a^3 ✠ a^2 ℞ b c — b c ℞ b c — a b c per a — ℞ b c, fiet quotiens a^2 ✠ b c — a a ℞ b c, quod multiplicatione comprobabitur, & numeris illuſtrabitur. Interim adnotetur methodus diuiſionis ſiquidem ex multiplicatione diuiſoris per quotientem fit quantitas diuidenda.

Explicatur diuiſio.

Diuiſo enim a^3 per a fit potiens a^2, cum verò diuiſo a^3 per a fiat quotiens a^2, ducatur a^2 in a — ℞ b c diuiſorem, fiet productum a^3 — a^2 ℞ b c, hoc ſubtracto ex a^3 ✠ a^2 ℞ b c — b c ℞ b c — a b c, fit reliquum 2 a^2 ℞ b c — b c ℞ b c — a b c, diuidatur hoc ipſum reſiduum per eundem diuiſorem, & fiet quotiens b c adiungendus priori quotienti a^2, multiplicetur b c per a — ℞ b c diuiſorem, fiet productum ✠ a b c — b c ℞ b c quo ſubtracto ex 2 a^2 ℞ b c — b c ℞ b c — a b c fiet reliquum 2 a^2 ℞ b c — 2 a b c, diuidendum per eundem diuiſorem, facta autem diuiſione, fit quotiens 2 a ℞ b c, quo ducto in a — ℞ b c diuiſorem, producitur 2 a^2 ℞ b c — 2 a b c, quo ſubtracto ex 2 a^2 ℞ b c — 2 a b c, nihil remanet, vnde diuiſio ad finem perducta eſt, & ex præceptis traditis diuidemus etiam hoc plurinomium a^4 ✠ a b c d ✠ b^2 ℞ b c d ✠ a d^3 — a^3 ℞ b c — b c d ℞ b c — a ℞ b c ℞ b c d — d^3 ℞ b c per a — ℞ b c, fiet autem quotiens a^3 ✠ b c d ✠ a ℞ b c d ✠ d^3 quod multiplicatione comprobabitur.

a^3 ✠ b c ✠ 2 a ℞ b c
a — ℞ b c
— a^3 ℞ b c — b c ℞ b c — 2 a b c
✠ a^3 ✠ a b c ✠ 2 a^2 ℞ b c
a^3 ✠ a b c ✠ a^2 ℞ b c — b c ℞ b c — 2 a b c
hoc eſt a^3 ✠ a^2 ℞ b c — b c ℞ b c — a b c

a^3 ✠ b c d ✠ a ℞ b c d ✠ d^3
a — ℞ b c

—a^3 ℞ b c — b c d ℞ b c — a ℞ b c ℞ b c d — d^3 ℞ b c
a^4 ✠ a b c d ✠ a^2 ℞ b c d ✠ a d^3

a^4 ✠ a b c d ✠ a^2 ℞ b c d ✠ a d^3 — a^3 ℞ b c — b c d ℞ b c — a ℞ b c ℞ b c d — d^3 ℞ b c.

Quod numeris licebit citra difficultatem explicare, diuiſionis verò methodus eadem eſt cum præcedentibus.

Illud porro ſilentio non præteribo, videlicet huiusmodi operationes, vt rectè exerceantur, præter Artis præcepta, longam, aſſiduamque exercitationem requiri, ſine qua nemini licebit expeditam, promptamque pragmatiam comparare, ſtudioſis igitur eſt inſudandum, ad hanc enim Artem capeſſendam improbus labor exigitur, ſegni verò, ac impatientes laboris ab huiuſmodi ſtudijs arcendi ſunt.

Exercitatio aſſidua plurimũ ad huius Artis pragmatiam conducit.

Numeris autem hęc illuſtrare facilè quidem erit. Supponamus ipſius a pretium eſſe 16, b, verò 25, at c eſſe 4, ergo a^3 valebit 4096, quoniam verò a, valet 16, eius quadratum erit 256, quo ducto in 10, pretium ipſius ℞ b c fiet 2560.

Numeris hæc illuſtrantur.

Itaque 2560, erit pretium ipſius a^2 ℞ b c eoque addito ad 4096, valorem ipſius a^3, fit 6656 pretium ipſius a^3 ✠ a^2 ℞ b c at verò b c, valet 100, hoc autem ducto in 10, prætium ipſius ℞ b c, fit 1000 pretium ipſius b c ℞ b c quo ſubtracto ex 6656, pretio ipſius a^3 ✠ a^2 ℞ b c remanet 5656, ſubtrahatur 1600, valor ipſius a b c ſit reliquum 4096.

Nunc perpendamus pretium producti ex diuiſore in quotientem, diuiſor eſt a — ℞ b c hoc eſt 16 minus 10, nempe 6, quotiens dicebatur a^2 ✠ b c ✠ 2 a ℞ b c nempe 256 ✠ 100 ✠ 320, hoc eſt 676, quo multiplicato per 6 fit productum 4056, quantum eſt pretium quantitatis diuidendæ. Cæterum in hac, quam attulimus diuiſione, quidam neotericus haud ignobilis Analyſta deceptus eſt.

Continuatio ſuperioris illuſtrationis.

a^4 =	65536	a^3 ℞ b c =	40960	a^3 =	4096
a b c d =	14400	b c d ℞ b c =	9000	b c d =	900
a^2 ℞ b c d =	7680	a ℞ b c ℞ b c d =	4800	a ℞ b c d =	480
a^3 ℞ b c =	11664	d^3 ℞ b c =	7290	d^3 =	729
	99280		62050		6205
	62050				6
	37230	a — ℞ b c =	6		37230.

Quando verò nequit inſtitui diuiſio, fieri debet fractio ac proinde ſi proponatur ℞ $\overline{a^2 + b^2}$ diuidendum per c ✠ d, fiet quotiens $\frac{℞\, a^2+b^2}{c+d}$, nequit enim ℞ $\overline{a^2 + b^2}$ diuidi per c ✠ d quare fieri debet fractio. Ita ſi foret opus diuidere ℞ $\overline{a^3 + b^3}$ per eundem diuiſorem, c + d, fieret fractio $\frac{℞\, a^3+b^3}{c+d}$ non ſecus ſi foret ℞ $\overline{a^4 + b^4}$ per eundem diuiuiſorem diuidendum fieret enim quotiens $\frac{℞\, a^4+b^4}{c+d}$. Inſuper idem eueniet in diuiſione huius ℞ $a^2 + b^2$ per d fiet enim quotiens $\frac{℞\, a^2+b^2}{d}$ præterea ſi opus fuerit diuidere ℞ $\overline{a^2 + b^2 - c^2}$ per d — c fiet quotiens $\frac{℞\, a^2+b^2-c^2}{d-c}$. Aduerte autem fractionem illam ſuperiorem, & ſimiles aliter etiam ſcribi poſſe, vnde ℞ $\overline{a^2 + b^2}$, ſi diuidatur per c ✠ d, ſcribi poterit quotiens ne dum, vt ſupra, ſed etiam hoc modo ℞ $\frac{a^2+b^2}{c^2+2cd+d^2}$ Ita quoque de alijs intelligendum ſuo modo.

Quando diuiſio inſtitui nequit quid agendum.

Quandoque contingit, vt quantitas irrationalis intelligenda ſit ducta in aliquam quantitatem rationalem, diuiſio verò inſtituenda ſit per aliquam quantitatem, vt cùm proponitur a ℞ $\overline{a^2 + b^2}$, diuidendum per b fiet quotiens $\frac{a}{b}$ ℞ $\overline{a^2 + b^2}$, quod ſi alter quicumque diuiſor fuerit, non diſſimiliter procedendum, vt ſi per a ✠ b foret inſtituenda diuiſio, fieret enim quotiens $\frac{a}{a+b}$ ℞ $\overline{a^2 ✠ b^2}$ inſuper propoſitum ſit diuidere a^2

Aliquando contingit, vt quantitas irrationalis intelligenda data in aliquam quantitatem rationalem.

re a^2 ℞ $\overline{b^2 d^2}$ per c † e fieret quotiens $\frac{aa}{c \dagger e}$ ℞ $\overline{b^2 d^2}$. Quę vt meliùs innoteſcant, illuſtrare numeris iuuabit.

Explicatio ſupradictorum.

Supponamus a valere 2, eius quadratum valebit 4 at verò b valeat 3, eius quadratum valebit 9, quare $a^2 b^2$ valebit 36, vnde ℞ $\overline{a^2 b^2}$, valet 6, neceſse eſt; hæc ſi intelligatur ducta in 2 pretium ipſius a, fiet productum 12, hoc autem proponitur diuidendum per a ✠ b, hoc eſt per 5, & dictum eſt oriri $\frac{a}{a \dagger b}$ ℞ $\overline{a^2 \maltese b^2}$, & ita eſt propterea quod, ſi 12 diuidatur per 5 fit quotiens 2 $\frac{2}{5}$ at ſi 2 diuidatur per 5 nempe a per a ✠ b, fit quotiens $\frac{2}{5}$ quo ducto in 6, pretium ipſius ℞ $\overline{a^2 b^2}$ fit productum 2 $\frac{2}{5}$. Hinc igitur perſpicuè conſtat rectè diuiſionem illam ad eum modum inſtitui.

Fractiones vnde ortum ducant.

Fractiones autem ex diuiſionibus paſſim contingunt, vnde ſi a^2 ℞ a b c d diuidi debeat per a † b — c fiet quotiens $\frac{aa \maltese ℞\, abcd}{a \maltese b - c}$ ſi ita ſi fuerit a^2 ✠ ℞ a b c d diuidendum per a † ℞ b c, fiet quotiens ad modum fractionis $\frac{aa \maltese ℞\, abcd}{a \maltese ℞\, bc}$.

S C H O L I O N.

Operatio qua fractiones ad integras magnitudines reuocantur vtilis eſt.

VTiliſſima eſt illa operatio, qua factas magnitudines ad integras reuocamus; Haud rarò ſiquidem contingit in æquationibus reperiri magnitudines fractas, quaſi non reducantur ad magnitudines integras nequeunt feliciter explicari.

Data ſit fractio $\frac{bka}{d}$ oporteat eam in integras magnitudines tranſmutare. Fiat, vt d ad b ita k^2 ad aliud quidpiam, quod ſit z^2, & ita z^2 erit idem, quod $\frac{bka}{d}$.

Sit $\frac{abg}{d}$ fiat vt d ad b ita g ad f erit a f idem, quod planum illud $\frac{abg}{d}$.

Data ſit fractio $\frac{baf \dagger daf}{g}$. Hanc autem oporteat ad integras magnitudines reuocare. Fiat vt g ad f ita b^2 † d^2 ad aliud quidpiam, quod ſit z^2, & ita idem erit z^2 quod fractio illa $\frac{baf \dagger daf}{g}$.

Exempla varia.

Data ſit fractio $\frac{bg}{d}$ quam oporteat ad integras magnitudines reuocare. Fiat vt d ad g, ità b ad aliam quampiam magnitudinem, quæ ſit f, & erit f idem, quod $\frac{bg}{d}$.

Data ſit fractio $\frac{bg \dagger dg}{f}$, quam oporteat ad integras magnitudines reuocare. Fiat vt f ad g, ità b † d ad aliam quampiam magnitudinem, quæ ſit z, & erit z idem, quod $\frac{bg \dagger dg}{f}$.

Proponatur $\frac{br \dagger bs}{f}$, fiat vt f ad r † s, ita b ad aliud, quod ſit z, & erit z idem, quod ſuperior illa fractio $\frac{br \dagger bs}{f}$.

Operatio ſuperior numeris illuſtratur.

Hæc operatio numeris illuſtrari poteſt: ſupponamus fractionem eſſe $\frac{bd}{g}$, & b eſto numerus 10, d verò 3, itaque b d valebit 30, at g ſit 5, quamobrem fractio illa valebit 6, ſi namque 30 diuidantur per 5 ſit quotiens 6, quantum oriri debet ſi diſponantur termini illi ſic, vt ijs reperiatur quartus proportionalis, nimirum ſi fiat, vt 5 ad 10, ita 3 ad aliud, nempe 6.

Demonſtratur facilè hæc operatio. Si enim duo ſint latera, ſub quibus rectangulum aliquod comprehenditur, hoc verò ad latus diuidens applicetur, diuidens erit primus terminus, in ſerie quatuor proportionalium terminorum, & latera erunt ſubſequentes termini ſic, vt quotiens locum quartum in illa ſerie ſortiatur, vt alibi dictum, explicatumque fuit.

Multa omittuntur, vt parte minus neceſſaria.

Multa hìc poſſent in medium afferri, ea tamen cùm ex hactenus traditis facile intelli poſſint, libenter ſilentio prætereunda duximus ſat enim eſt aduertiſſe qua arte ſit facienda reductio fractarum magnitudnem ad integras, quod omnino erat animaduerſione dignum cum non rarò eueniat, vt in æquationibus huiuſmodi fractæ magnitudines reperiantur, quæ niſi ad magnitudines integras reuocentur, æquationes haud explicari poſſunt.

De

De Æquatione Algebrica.

CAPVT IX.

Æquatio quid ſit explicatur.

IAm ſuperiùs in Algebra Diophantea nos æquationem definiuimus, eſt autem ęquatio, quæ Græcis dicitur Ο'μαλισμὸς, nomen enim hoc æquationem importat, vt Ο'μαλὸτης æqualitatem ſignificat, definiuimus verò dicentes ęquationem eſſe comparationem inter certam, & incertam magnitudinem.

Quid nomen æquatio importet.

Itaque nil aliud æquatio eſt, quam proportio æqualitatis inter duas magnitudines, duaſue quantitates, vel res variè de nominatos quarum vna ſit certa, & nota, altera autem incerta, & ignota; ſiquidem inter ea, que ſunt eiuſdem denominationis, ęquatio vel eſt inutilis, vt inter 4 a, & 4 a inter 5 a^2, & 5 a^2 inter a^2 ✠ b a, & a^2 † b a, vel non erit ęqualitas, vt inter 4 a & 5 a, vel 3 a^2 ✠ b a & a^2 † b a, &c.

Æquationis varia ſunt genera.

Huius autem æquationis varia ſunt genera, quemadmodum memorato loco expliuimus; quamuis enim æquatio communi quadam vſurpatione ſuo quantitatum duarum, vel plurimum quacumquę æqualitate capiatur, hic tamen propriè accipitur, prout eſt quantitatis quæſitæ cum quantitate aliqua data, alterius ad alteram facta comparatione, diſtinctè ordinata æqualitas. In qua quidem pars quæſititia poteſtas eſt, vel pura, vel affecta, vt mox docemus pars autem data comparationis homo geneum dicitur etenim illa magnitudo incerta Radit eſt, vel Poteſtas, At verò Poteſtas pura eſt, vel affecta, & affectio aut eſt per affirmationem, aut per negationem. Sit æquatio $a^2 = z^2$. Seu $a^2 = b\,d$. Poteſtas, nempe a^2 eſt pura; Si verò fuerit æquatio a^2 ✠ $b\,a = z^2$. Poteſtas eſt afferta, & huiuſmodi affectio eſt per affirmationem, diciturque affici ediunctione plani ſub latere dataque creſſiciente longitudine; Hæc verò æquatio Greeis dicitur καταφατικη; hoc eſt affirmatiua. Si verò fuerit æquatio $a^2 - b\,a = z^2$ dicitur poteſtas affecta per negationem, eaque dicitur affici multa plani ſub latere, dataque coefficiente longitudiue, diciturque Α'ποφατικ'η ſeu apophatica, hoc eſt negatiua. Quando autem afficiens homogeneum cuiuſmodi hic eſt b a, de Poteſtate negatur negatio eſt directa. Illud porro afficiens homogeneum diuiſur quoniam eiuſdem eſt dimenſionis ſeu eandem dimenſionis naturam participat cum Poteſtate, & cum Comparationis homageneo, vel vnico verbo, quoniam eandem dimenſionis naturam participat cum cęteris magnitudinis in æquatione exiſtentibus, At; ſi forci æquatio $b\,a - a^2 = z^2$. Dicitur Αμφιβολος ſeuamphibola, hòc eſt ambigua, & Planum autem ſub latere dataque coefficiente longitudine in hac equatione afficitur multa quadrati, & quia Poteſtas regatur, de afficiente homogenea ſub gradus, proinde negatio indirecta dicitur. Magnitudo autem certa, cui reliqua comparantur, dicitur comparationis homogeneum. Quando verò deſignatur z^2 pro comparationis homogeneo, poteſt etiam ſubrogari z planum; hoc enim intereſt inter hęc, quod; z planum ſe habet, tamquam genus, non tranſcendit tamen æquationes, at verò z^2 ſe habet tamquam ſpecies eſt enim quadratum, ſpecies planę magnitudinis.

Exemplis æquationes declarantur.

Exemplum.

Æquatio ſimplex quid.

Quandocumque verò Radix dę qua quæritur in ſua baſe conſiſtens datæ magnitudini homegeneæ comparatur æquatio ſimplex abſolutè dicitur vt ſi a æquetur b. Cùm autem Poteſtas quæſitæ radicis puræ ab affectione datæ homogeneę comparatur, ęquatio ſolet ſimplex climactica nuncupari. Vt ſi ſit $a^2 =$ z plane. At cùm Poteſtas quæſitę radicis affectę ſub deſignato gradu dataque coefficiente, datæ magnitudini comparatur homogeneę ęquatio πολυνομια, hoc eſt polinomia eſt pro multitudine, ac varietate affectionum, & tot poteſt affectionibus implicari ipſa Poteſtas,

Æquationes in infinitum pertrahi poſſunt. | *Proponuntur ea de quibus proximè diſſerendum.*

ſtas, quot ad Poteſtatem gradus ſunt parodici, vt etiam in Algebra Numeroſa dictum eſt. Gradus autem parodici ad Poteſtatem dicuntur dignitates infra Poteſtatem exiſtentes in æquatione; Cùm autem in infinitum procedi poſſit in Scala graduum parodicorum: proinde, & affectiones in infinitum procedent, atque adeo, & æquationes. Sufficiat autem innuiſſe varietatis originem. Quoniam autem quatuor ad ſummum numero ſunt, quæ requiruntur ad æquationis explicationem. Primum æquationum inuentio. Secundum inuentæ æquationis Antitheſis Tranſpoſitio, ſeu Reductio. Tertium Paraboliſmus, hoc eſt Applicatio, ſeu Diuiſio. Quartum Analyſis, hoc eſt Reſolutio, ſeu Radicis extractio. De his igitur agendum ſupereſt.

Admonitio ad lectorem circa vſum ſpecierum in operationibus perficiendis.

Hic lectorem monitum volumus nos in ſuperioribus, ſpeciebus ſic vſos fuiſſe, vt ordinatim illas collocauerimus, iuxta ordinem alphabeti, quę in ordine prædicto præcedunt, vnde maluimus ſcribere a b, quam b a, quamuis in idem recidat, idque factum à nobis fuit, quoniam hæc literarum, ſeu ſpecierum ordinatio magis eſt obuia ſaltem ex vſu ipſarum, at in poſterum, cum vocales, ad incertas, ignotaſque quantitates deſignandas, adhibeamus, potius libuit illas tractare quatenus in ijs ſe ſe exercuerunt celebriores Analyſtę, & nos quoque eos imitati facere conſueuimus, vnde in æquationibus illud obſeruabimus, ac in extractione radicis ex illis, quare potius ſcribimus $a^2 + b\,a = z^2$, vel $a^2 + b\,a = z$ plano, quàm $a^2 + a\,b = z^2$, ſeu $a^2 + a\,b = z$ plano, & ita de reliquis. Hic enim a, ſignificat quantitatem ignotam, & propterea ob eandem rationem in ſequentibus ſcribemus $e^2 + b\,e = z^2$ ſeu $e^2 + b\,e = z$ plano, & ita de reliquis.

Alia quædam notatione digna.

Illud quoque ſupereſt aduertendum, quod paulo ſuperiùs innuimus, & in prima huius Operis parte notauimus, quamuis comparationis homogeneum non neceſſariò eſſe debeat, determinatę ſpeciei cùm ſolùm requiratur homogenea natura inter æquationis membra, vnde ſi poteſtas planitiem non tranſcendit, comparationis homogeneum, planum dicatur, atque adeo rectè inſtituatur æquatio hoc modo $a^2 + b\,a = z$ plano, nihilominus, plerunque expedit ad ſpeciem certam deſcendere, nempe in planis ad quadratum, in ſolidis ad cubum, &c. quamobrem paſſim has æquationis formulas vſurpauimus, nempe $a^2 + b\,a = z^2$ inſuper $a^2 +$ b pl. $a = z^3$. Imo ob eandem rationem, præſtat etiam coefficiens planum ad ſpeciem reſtringere, atque adeo $a^3 + b^2 a = z^3$, id enim expeditiùs perficitur nec irrationabiliter id fit; propterea quod ſi quadratum eſt, planum eſt, & ſi cubus eſt etiam neceſsè eſt ſolidum eſſe; ſolùm enim aliquid videtur ingerere difficultatis, quoniam ſtatim quis ſuſpicatur huiuſmodi planum eſſe quadratum, cùm tamen ad æquationem nihil faciat; verùm ſi quis aſſueuerit omnem difficultatem abijciet, atque reperiet elegantiùs rem ipſam hunc, quem diximus in modum, tractari. Verùm, vt ingenuè fatear, res parui momenti eſt, atque adeo, vtro modo res explicętur nihil refert, ſolùm hæc innuiſſe ſit ſatis.

Quo pacto ſcribere præſtet æquationes, vt elegantius explicentur.

Notanda quædam circa id de quo agitur.

Poſtremo loco videtur obſeruatione dignum; nempè non ſemper omnes commemoratas quatuor operationes ad æquationem explicandam, atque adeo ad Problema reſoluendum requiri, ſed aliquando ſufficere primam, cum ſecunda, quandoque, imo frequenter requiri tertiam, plerumque exigi quartam. Sed hic non ommittam animaduertendum, ſcilicet, ſæpeſepiùs contingere, vt eidem Problemati per plures æquationes fieri ſatis poſſit, prout varia poſitio fit analyſeos initio, & varia ipſius Dati tractatio. Tunc autem par eſt ſemper ſimpliciora, implicatioribus præferre, niſi quis omnia velit ad oſtentationem fæcunditatis, illius, quam callet Artis, comiſcere, vnica non contentus reſolutione, de quibus multa nos in ſequentibus afferemus. In reſolutionibus etenim perficiendis, plurima præceptis vniuerſalibus explicatu dificilia, obuia fiunt, nullaque adhibita induſtria ſua ſponte occurrunt.

De

Digitized by Google

De æquationis inuentione.

CAPVT X.

Iſdem pręceptis indagatur ęquatio ſpecioſa, quibus, & numeroſa, cùm igitur proponitur Problema reſoluendum, ea debet Aalyſta curare, memoria que amplecti pręcepta, quę ibi nos expoſuimus. Si itaque ſit quæſtio de longitudine, & ęqualitas, aut proportio ſub inuolucris eorum, quę proponuntur, lateat. Dicemus longitudinem quęſitam eſſe Latus. Si verò quęſtio ſit de planitie lateat autem æqualitas, planities quęſita; Quadratum eſto. Si de ſoliditate, quęritur, & ęquatio lateat, ſoliditas, de qua quæritur Cubus eſto, & ita aſcendet, vel deſcendet ſua vi per gradus quoſcunque, comparatarum magnitudinum, ea de qua eſt quęſtio. His autem conſideratis ſi ſit reſoluendum Problema magnitudines ipſę quęſitę, & datæ, ſic tractari debent, compbrari, atque adeo addi, ſubtrahi, multiplicari, ac diuidi, prout quęſtionis ſenſus requirit. Hoc enim pacto ad aliquam ęqualitatem peruenitur. Exemplis hęc omnia declarabimus. Admonendus priùs tamen Analyſta ne ſinat, vt animo excidat ſuo, ęqualitas, quę eſt inter factum ſub extremis terminis in ſerie trium proportionalium, & quadratum medij, vt neque ea quæ eſt inter factum ſub medijs, & ſub extremis in ſerie quatuor proportionalium hęc enim conſideratio plurimum confert, ad ęqualitatem indagandam.

Æquationis inuentio expli catur.

Hic tamen diligenter adnotandum occurrit, quod pleroſque Tyronum decipit, nempe non quamcumqne ęquationem idoneam eſſe; de quo etiam ſuperiùs non nulla tradidimus.

Notanda quædam.

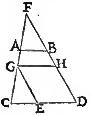
Hoc igitur in loco oportebit aduertere ſic ęquationem inſtituendam eſſe, vt in ea, certa cum incerta magnitudine comparetur; vnde cùm magnitudo incerta, cum certa fuerit collata, innoteſcet incerta ipſa de qua quæritur, magnitudo.

Haud benè itaque inſtitueretur operatio; ſi duę ſint magnitudines certę, ac notę, puta b, & d, velit autem, vt d, ſit ſecunda è quatuor proportionalibus, b, verò ſit differentia, inter primam, & quartam. Dicatur verò a eſſe quarta, itaut prima, ſit $b + a$ at verò ſecunda ex hypotheſi, cùm ſit d ſupereſt indaganda tertia, vt igitur d ad $b + a$ ita a ad aliam nempe $\frac{ba + aa}{d}$ his verò habitis, quandoquidem ſunt proportionales d; $b + a$; a $\frac{ba + aa}{d}$; atque adeo vt $b + a$ ad d, ita $\frac{ba + aa}{d}$ ad a propterea factum ſub extremis, nempe $ba + a^2$, * ęquabitur facto ſub medijs, nimirum $ba + a^2$. Hęc autem ęquatio inutilis eſt, cùm idem ſit ex vtraque ęquationis parte, & quidem analogiſmum ex æqualitate deducentes, ex analogiſmo, & rurſus ad ęqualitatem redeuntes inutilem laborem perferimus.

Perpenditur æquationis inſtituenda ratio.

Quando inutilis æquatio fuerit.

Cùm autem hunc in modum inſtituta fuerit ęquatio ne inutilis fiat alia incedendum via; Si itaque fuerit triangulum CFD, in quo AE ſit parallela ipſi CD. Sopponamus autem AB eſſe a, AF eſſe b, CG eſſe d, CF eſſe f, & ee eſſe c erit* vt b ad d, ita a ad $\frac{da}{b}$ non eſt autem hinc inferenda æquatio, inter factum ſub medijs, & ſub extremis, cum & huiuſmodi ęquatione ad analogiſmum deuentum fuerit, vt enim quartum terminum reperiremus, duximus



** Eſt enĩ triãgulum A F B ſimile triangulo C F D, cui ſimile eſt triangulum E H D, quare triangulum A F B, ſimile erit triangulo E H D, ob id vt A F ad A B, ita E H ad E D, & permutando, vt A F ad E H, hoc eſt ad C G ita A B ad E D quare, vt b ad d, ita d, ad $\frac{da}{b}$ proinde E D, erit $\frac{de}{b}$.*

ſecundum d in tertium a, vt fieret da cui æquale eſſe debet factum ſub primo b & quarto, & quia quod ſuperefficit multiplicatio illud reſoluit diuiſio, ob id da, factum ſub medijs applicatum ad b reſtituet quartum, at applicato da ad b, fit $\frac{da}{b}$ ob id $\frac{da}{b}$ erit quartus terminus nempe ED, exiſtentibus primo AF, ſecũdo AB, tertio EH ſeu CG.

Quomodo ratiocinandum ad conſequendum praditum analogiſmum.

Vt autem hoc vtentes analogiſmo ad ęqualitatem perueniamus ita ratiocinandum, quandoquidem triangula illa AFB, CFD, ſimilia ſunt, erit pariter, vt AF ad AB, ita CF ad CD, at verò AF ſupponitur b, AB, ſupponitur a, inſuper CF ſupponitur f, & CD eſt c $+ \frac{da}{b}$, vnde rectangulum bc $+$ da, ęquabitur fa, quę quidem ęquatio ſecum habet proportionem adiunctam, per antitheſin enim ad hanc reuocatur $bc = fa - da$, & inſtituto paraboliſmo, omnibus videlicet applicatis ad $f - d$ fiet $a = \frac{bc}{f-d}$ quare reſoluta ęqualitate in proportionem, erit, vt $f - d$ ad c ita b ad a. Vnde ex tribus cognitis quantitatibus quarta innoteſcit.

Alij autem ſunt caſus innumeri, in quibus hactenus dicta obſeruare licet. Vt verò meliùs explicetur qua induſtria ad ęquationem perueniendum ſit, præſtabit plura in medium afferre exempla, quorum primum eſto.

Zeteticum I.

Data differentia duorum laterum, & aggregato eorundem, reperire latera.

Data ſit b differentia laterum d verò eorundem aggregatum oporteat; reperire latera. Minus latus eſto a, ergo maius erit $a + b$; ſed aggregatum laterum eſt notum, ſiquidem ponitur datum d; ergo erit ęquatio inter $2a + b$, ignotum, & d, notum, nempe $2a + b = d$. Quamobrem ad ęqualitatem peruenimus.

Secundò proponatur.

Zeteticum II.

Datum latus ita diuidere, vt rectangulum ſub partibus ad quadratum vnius partium, datam habeat rationem.

Datum ſit latus b diuidendum, ita vt rectangulum ſub partibus ad quadratum vnius partium datam habeat rationem, proportio verò data ſit vt r, ad s. Pars, ad cuius quadratum deberet rectangulum habere ſtatutam proportionem eſto a, ergo pars altera neceſſariò erit $b - a$, quoniam autem rectangulum ſub his partibus ad quadratum vnius partium rationem habere debet, vt r ad s, propterea fieri debet rectangulum illud, quod erit $ba - a^2$, & quadratum vnius partium eſt a^2; alterutra enim partium ſumi poteſt; proinde erit vt r ad s, ita $ba - a^2$ ad a^2.

Cùm autem ſint quatuor termini proportionales, factum verò ſub medijs ęquale ſit facto ſub extremis; erit quęſita æquatio inter ra^2, & $sba - sa^2$; & ita quæſtionem examinando; atque iuxta eius tenorem datas, & quæſitas magnitudines tractando ad ęqualitatem denique peruenitur.

Tertiò proponatur.

Zeteticũ III.

Dato extremo ex tribus lateribus continuè proportionalibus, & aggregato ex ſecundo, & tertio diſtinguere ſingula.

Datum ſit extremum latus d; ſumma verò reliquorum ſit b; ſecundum latus eſto a; erit ob id tertium $b - a$, vt patet. Conſtat autem rectangulum ſub extremis æquari quadrato medij; proinde a^2 æquabitur $bd - da$, & hęc eſt æquatio de qua quęrebatur. Cęterum vt etiam in prima huius Operis parte monuimus, potius expedita methodus exercitatione, & vſu comparatur ad æquationem inquirendam, quàm pręceptis, atque verborum ambagibus. Vt autem hæc Ars ad plana problemata reſoluenda plurimum habeat momenti; obſeruandum, eſt atque magnopere curandum, vt perueniatur ad ęquationem ſine aſcenſu planorum ad ſolida, vel ad plano-plana. Dum enim hoc modo inſtituitur analyſis, huius repetitis veſtigijs in ſyntheſi ad ipſam contexendam demonſtrationem Analyſta ad ſolida offendit; cum tamen longè feliciùs, & elegantiùs ſit per plana demonſtrationem elaborare. Non inficiandum tamen eſt, quamuis Analyſis ad ſolida peruenerit demonſtrationem contexi poſſe non repetitis Analyſeos veſtigijs, ſolidis nullis adhibitis; itaut Analyſeos beneficio, quod pręſertim in hac Arte intenditur Geometrica tantùm effectio comparetur; quamobrem dum proponebatur.

Datum latus diuidere, ita vt rectangulum ſub partibus ad quadratum vnius partium datam habeat rationem.

Præſtabit analyſin hunc in modum ad quæſitam radicem comparandam, inſtituere,

tuere. Datum ſit latus b quod ea lege diuidendum eſt, vt rectangulum ſub partibus ad quadratum alterius, rationem habeat, vt r ad s. Datum latus ſupponatur diuiſum, & pars ad cuius quadratum datam rationem habet rectangulnm ſub partibus eſto a; ergo pars altera erit $b - a$. Quoniam verò eſt, vt r ad s, ita rectangulum ſub partibus ad alterius partis quadratum, ob id erit, vt r ad s ita $b a, - a^2$ ad a^2, & componendo erit vt $r + s$ ad s ita $b a$ ad a^2; ſed $b a$ ad a^2 eſt, vt b ad a, cum eiuſdem ſint altitudinis a; ergo, vt $r + s$ ad s ita b ad a.

Quartò proponatur.

Dato aggregato laterum, & differentia eorundem inuenire latera. *Zetetic.ũ IV.*

Datum ſit laterum aggregatum b, data verò differentia laterum ſit h, oporteat reperire latera. Supponamus larus vnum eſſe a, aliud erit $a + h$, quamobrem $2 a + h$, ęquabitur b; & per antitheſin erit $2 a = b - h$, atque adeo a æquabitur $\frac{b - h}{2}$ de hoc tamen infra.

Quintò proponatur.

Data differentia duorum laterum, & ratione eorundem inuenire latera. *Zeteticum V.*

Data differentia ſit b, ratio verò data ſit vt r ad s minoris ad maius; Latus vnum eſto a aliud erit $a + b$; vt verò eſt r ad s, ita debet eſſe a ad $a + b$, quamobrem erit factum ſub extremis, nimirum $r a + r b$ æquale facto ſub medijs puta $s a$.

Sexrò proponatur.

Dato quadrato rectangulum æquale reperire, cuius latera ſint in ratione data. *Zeteticũ VI.*

Datum ſit quadratum b^2; huic autem ſit iniunctum æquale rectangulum reperire habens latera in ratione vt r ad s. Latus vnum ipſius rectanguli eſto a: ergo latus alterum erit $\frac{s a}{r}$ hoc enim pacto rectanguli latera propoſitam rationem ſeruabunt, eſt enim, vt r ad s, ita a ad $\frac{s a}{r}$. Cùm itaque rectangulum ęquale ſupponatur b^2; proinde $\frac{s a^2}{r}$ æquabitur b^2, & ita ad æquationem peruentum erit.

Poteſt etiam huic Problemati analogiſmo tantummodo ſatisfieri; quandoquidem ſi ſupponamus latus vnum rectanguli eſſe a, in omni autem rectangulo, quemadmodum eſt latus vnum ad latus alterum, ita quadratum illius, ad rectangulum ſub lateribus, vt ſi ſit rectangulum, cuius latera 24, & 6, vt eſt 24 ad 6, ita 576, quadratum ex 24 ad 144, rectanguli ſuperficiem; ob id, vt r ad s, ita a^2, ad quęſitum rectangulum, quod eſt b^2, hoc enim, rectangulo debet eſſe ęquale, quare erit, vt r ad s ita a^2 ad b^2, & conuertendo, vt s ad r ita b^2 ad a^2. Itaque ex tribus cognitis quantitatibus, quarta non ignorabitur. *Eidem Problemati ſit ſatis analogiſmum.*

Septimò proponatur.

Latus datum ita ſecare, vt partium quadrata ſimul accepta ad quadratum differentiæ partium conſtitutam habeant rationem. Oportet autem rationem propoſitam maioris eſt ad minus. *Zeteticũ VII.*

Datum latus diuidendum eſto 2 b, & quidem in duas partes, quarum quadrata ſimul accepta ad quadratum differentię partium rationem habeat, vt r ad s, maioris ſcilicet ad minus. Supponarur latus iam diuiſum, atque dimidium differentię partium eſto a; ergo $b + a$ pars maior erit; quemadmodum $b - a$ pars erit minor. Quoniam autem iſtarum partium quadrata ad quadratum differentiæ partium rationem habet, vt r ad s, atque horum quadratorum ſumma eſt $2 b^2 + 2 a^2$; quadratum autem differentiæ partium eſt $4 a^2$; erit igitur analogiſmus, vt r ad s ita $2 b^2 + 2 a^2$ ad $4 a^2$; vnde conſtat huic Problemati ſatisfieri per ſolam analogiam.

De

De Antitheſi, ſeu tranſpoſitione æquationis.

CAPVT XI.

Antitheſis quid ſignificet quid apud Rhetores; quid apud Mathematicos.

GRecis ἀντίθεσις, antitheſis, oppoſitionem ſignificat, vnde autem ſit hoc modo dicta, iam in prima parte explicatum fuit, vbi etiam quo ſenſu hoc in loco vſurpetur inſinuatum eſt; non enim hìc accipitur, vt apud Rhetores quibus idem eſt, ac aſſumptiua cauſa, vnde κατ' ἀντίθεσιν defendi id dicitur, quod per ſe improbabile aſſumptis extrinſecus auxilijs, defenditur; Analyſtę verò oppoſitionem & contrapoſitionem ſonat; contingit autem, vt commemorato loco explicuimus, cùm afficientes, affectæue magnitudines ex vna æquationis parte in alterā partem tranſeunt ſub contraria affectionis nota; quamobrem rectè antitheſis dicetur quantatis ex vna æquationis parte in alteram partem ſub contraria affectionis nota, tranſpoſitio. Itaque ſi aliqua magnitudo afficitur nota ✠ per antitheſin affecta euadat nota —, & contrà. Per antitheſin debemus omnino certam magnitudinem ex vna ęquationis parte conſtituere, cui reliqua comparentur; vel etiam ita fit, vt magnitudines omnes affectę, aut nota abundantiæ, aut nota defectus vnam æquationis partem conſtituant; ita vt partem reliquam occupet cyphra o, ſeu numeralis circulus, vt in ſequentibus planum fiet. Quo autem pacto perficiatur ex ijs, quæ in prima parte tradita ſunt citra laborem addiſces.

Exemplum I. Sit ęquatio ra ✠ r b ⊐ s a — s b, vtrinque addi debet s b, hoc enim afficitur nota —, ac huius reſtauratione (hoc nomen prout attinet ad ſignum — conſueuit appellari) debet huius operationis initium ſumi, & fiet r a ✠ r b ✠ s b ⊐ s a; modò auferri debet r a, vt fiat æquatio r b ✠ s b ⊐ s a ✠ r a; ſeu r ✠ s (b ⊐ s — r) a.

Exemplū II. Si ſit æquatio b^2 — b a ⊐ 2 a^2 — b a reuocabitur per antitheſin ad hanc b^2 ⊐ 2 a^2; vtrinque ſubtrahendo — b a.

Exemplū III. Si verò ſit b^2 — a^2 ⊐ 4 a^2, vtrinque addito a^2, per antitheſin fiet b^2 ⊐ 5 a^2.

Exemplū IV. Si autem ſit æquatio a^2 — d pl. ⊐ g^2 — b a; primò reducetur ad hanc a^2 ✠ b a — d pl. ⊐ g^2, & rurſus a^2 ✠ b a ⊐ g^2 ✠ d pl. vbi vides certas omnino magnitudines ex vna æquationis parte conſtitui:

Exemplū V. Si ſit 2 b a ⊐ d a ✠ b^2 — 2 b g per antitheſin ad hanc reducetur 2 b a — d a ⊐ b^2 — 2 b g; vbi obſeruandum hanc operationem fieri, ad hoc, vt cognita ab incognitis ſeparentur; ob id, & ſi 2 b g afficiatur nota — reſtaurari non debet.

Illud autem non eſt ignorandum, non debere ſubtractionem fieri niſi minoris à maiori, vt conſtat.

Exemplū VI. Sit ęquatio r b ✠ r a ⊐ s b — s a addatur vtrinque s a fiet ęquatio r b ✠ r a ✠ s a ⊐ s b, quod ſi vtrinque auferatur r b fiet r a ✠ s a ⊐ s b — r b ſeu quod idem eſt r ✠ s (a ⊐ s — r) b.

Exēplū VIII. Propoſita ſit ęquatio r a ✠ r b ⊐ s a — s b; addatur vtrinque s b, fiet ęquatio r a ✠ r b ✠ s b ⊐ s a, vtrinque ablato r a fiet r b ✠ s b ⊐ s a — r a, ſeu r ✠ s (b ⊐ s — r) a, vbi ſupponimus r minorem eſſe quàm s.

Exemplū IX. Ita pariter ſi proponatur a — 5 ⊐ 15, vtrinque addatur — 5, fiet a ⊐ 20; Si verò ſit a — 10 ⊐ o, vtrinque verò addatur — 10, fiet a ⊐ 10; & ſi fuerit a ✝ 100 ⊐ 3 a — 60 vtrinque additis 60 fiet a ✠ 160 ⊐ 3 a, vtrinque ſublato a, fiet 2 a ⊐ 160.

Et

Et ſi fuerit $a^3 + b\,a = 360 + 10\,a^2$ per antitheſin fiet $a^3 - 10\,a^2 + 6\,a = 360$. *Exemplum.*

Ex hactenus dictis conſtat apertè quantitates affectas ſigno — vtrique parti addi ſi ab vtraque parte eximantur, & ſub ſigno + transferantur. Liquet etiam quantitates ſigno + affectas ſubtrahi vtrinque ipſas eximendo ex vna parte in alteram transferendo ſub ſigno —; quo fit, vt quidquid vel ſubtractione, vel additione transfertur contrario ſigno afficiatur.

Quamuis hæc operatio rectè quidem fiat per additionis, & ſubtractionis regulas nihilo tamen minus artificium iſtud duobus hiſce præceptis continetur, quod & in prima parte traditum eſt.

Primum. *Quicquid tranſponitur mutat ſignum*. Seu quod idem eſt; *omnis tranſmutatio fit mutato ſigno*. *Præceptum ad antitheſin perficiendam.*

Huius autem præcepti ſenſus eſt, quod particula æquationis negata tranſpoſita in alteram partem fit affirmata, vt contra particula affirmata fit negata.

Secundum. *Homogenea ſigna negant. Heterogenea affirmant.* *Secundum præceptum.*

Huius autem ſenſus eſt; Si particula tranſponenda in altera parte ſimilem denominationem habuerit, fit ſubtractio minoris à maiori. Si particula aliqua ipſius æquationis tranſponenda habens ſignum quodcumque ex illis duobus + vel — habuerit in altera parte æquationis magnitudinem maiorem eiuſdem denominationis, cum eodem ſigno ſubtrahenda eſt magnitudo illius particulę à magnitudine, & idem relinquendum ſignum, quod habet illa magnitudo, à qua fieri debet ſubtractio, atque adeo tranſpoſitio, ineogiendo eſt à magnitudine minori.

Si verò particula tranſponenda habuerit in altera parte magnitudinem denominationis eiuſdem cum oppoſito ſigno, addendaque eſt magnitudo illius particulæ huic magnitudini, & relinquendum idem ſignum, quod habet magnitudo, cui fit additio.

De Hipopibaſmo.

CAPVT XII.

De nomine hypobibaſmi abundè in prima parte ſcripſimus; deducitur à Græco verbo *ὑποβιβάζω*, quod opponitur τῷ ἀναβιβάζω; itaque cùm hoc inter cetera ſignificet aſcendere facio, illud proinde ſignificabit deſcendere facio; ſignificat quoque idem, quod ſubduco, imò eſt etiam minuo. Fit igitur nomen iſtud hypobibaſmus ad ſignificandam quandam minutionem poteſtatis, & parodicorum graduum, quam quidem, etiam minutionem, depreſſionem appellant. Quoniam igitur ſępe ſæpius contingit, datas omnes magnitudines in gradum duci, atque adeo non dari purum comparationis homogeneum, ita vt homogeneum ſub data omnino menſura non ſtatim offeratur, tunc fieri debet hypobibaſmus, qui vt dicebamus nil aliud eſt, quàm depreſſio, ſiue mauis minutio poteſtatis, & parodicorum graduum; licet huiuſmodi depreſſio, minutio, ſiue etiam ſubductio æqua eſſę debeat, vt mox dicemus obſeruato ordine ſcalæ donec homogeneum ſub depreſſiori gradu in datum omnino homogeneum cadat, cui reliqua comparantur. *Hypobibaſmi nomen quid ſignificet.*

Fit autem hoc artificio, nimirum ſubducendo gradum depreſſiorem parodicum, tum à poteſtate, cùm ab alijs parodicis gradibus, quo opere haud immutatur æqualitas.

Eſto æquatio $a^3 + b\,a^2 = z$ pl. a, ſi fiat hypobibaſmus æquatio ad hanc reuocabitur $a^2 + b\,a = z$ pl. illud enim eſt omnia ſolida diuiſiſſe per diuiſorem communem, ſeu quod idem eſt omnia ſolida ad communem applicaſſe magnitudinem. *Quo artificio fiat.*

Sit pręterea ęquatio $r\,a^2 = s\,b\,a - s\,a^2$ fiat hypobibaſmus, & ita prędicta ęquatio ad hanc reuocabitur $r\,a = s\,b - s\,a$; omibus nimirum applicatis ad a, vt ſit aliqua magnitudo omnino data, cui comparentur incertæ, ſiue incognitę, nam per antitheſin fiet r a + s a *Exempla ad hypobibaſmi declarationē.*

Cui etiam principio hæc innitatur operatio.

$+$ s a, quod ęquabitur s b; eſt autem hoc quidem notum, vtpote rectangulum factum à duabus magnitudinibus r, & s, quas notas ſupponimus, vt a incognitam intelligimus. Hęc verò operatio illi innititur principio, nimirum à communi diuiſore non immutatur, æqualitas.

De Paraboliſmo, hoc eſt Applicatione; ſiue Diuiſione.

CAPVT XIII.

Paraboliſmus vnde dicatur.

PArabolismus dicitur à παραβαλλω verbo, quod inter cętera ſignificat applicare, cum autem quidpiam per aliud diuiditur, fit quędam applicatio, nimirum diuidendæ quantitatis, ad diuidentem, vnde fit ortiua quantitas, ob id ipſa diuiſio, non incongruè applicatio dicta, paraboliſmus conſueuit appellari.

Hic de Paraboliſmo inſtituitur tractatio.

Hoc itaque loco de Paraboliſmo, hoc eſt applicatione, ſeu diuiſione differendum eſt; quæ prout hic accipitur, homogeneorum, quibus conſtat æquatio ad datam magnitudinem, quę in altiorem gradum ducitur communis eſt applicatio, vt ille Poteſtatis gradus nomen ſibi vendicet, & ex ea tandem æquatio ritè ordinetur, quo opere fit, vt ex ſe Poteſtas ipſa ſubſiſtat.

Quando paraboliſmus fieri debeat.

Tunc enim fieri debet ipſe Paraboliſmus, quando accidit altiorem gradum, ad quem aſcendit quęſita magnitudo, non ex ſe ſubſiſtere, ſed in aliquam magnitudinem duci, quo opere non immutatur ęqualitas.

Exemplum ad paraboliſmo explicationem.

Sit ęquatio $b a^3 + d$ pl. $a = z$ ſol. vel $b a^3 + d^2 a = z^3$ fiat paraboliſmus, & æquatio ad hanc reuocabitur $a^3 + \frac{d \text{ pl.}}{b} a = \frac{z \text{ sol.}}{b}$ ſeu $a^3 + \frac{d^2}{b} a = \frac{z^3}{b}$. Omnia enim ſolida applicantur ad b, quo opere non immutari ęqualitatem perſpicuum eſt; Illud enim eſt omnia ad communem quantitatem applicaſſe, atque adeo, ęqualitatem retinuiſſe.

Exemplum alterum ad idem.

Inſuper eſto ęquatio $d a^2 - d g a - b g a = b z^2$; omnibus applicatis ad d (ad magnitudinem enim d, omnia ſunt applicanda) & fit ęquatio $a^2 - g a \frac{-bg}{d} a, = \frac{b z^2}{d}$ & ita conſimili modo procedendum eſt in alijs æquationibus quibuſcunque.

Exemplum.

Sit æquatio $d a^2 + b d a = d z^2$ omnibus applicatis ad d, fiet æquatio $a^2 + b a = z^2$; Quo opere a^2 liberatur à comite d atque adeo ipſa æquatio ritè ordinatur, cùm id ad eiuſdem explicationem requiratur.

Principium cui innititur paraboliſmus

Innititur autem hęc operatio communi principio; Æqualia ſi per eundem diuiſorem diuidantur, æqualitas non immutatur.

Notanda quædam.

Vbi vides operationem hanc inſtituendam eſſe applicatione omnium ad eam quantitatem in quam poteſtas ducta erat, ideo enim ad hanc applicatio fieri debet proptereaquod eò hæc operatio tendit, vt poteſtatem reddat per ſe ſubſiſtentem cum poteſtas, à comite ſoluta ſit per paraboliſmum; cætera quoque ad eandem ſunt quantitatem applicanda, tunc enim diſertè erit æqualitas expreſſa, ac ordinata, reuocanda ſi placet ad analogiſmum, ea lege, vt quæ ſub extremis fiunt, tum poteſtati, tum affectionum homogeneis reſpondeant; ſub medijs autem homogeneo ſub data menſura, Analogiſmus autem ordinatus ſeries eſt, trium, quatuorue magnitudinum, ſic affecta in terminis, ſiue puris, ſiuè affectis, vt omnes ſint datæ ſi vnum excipias, de quo, quęritur eiuſue poteſtatem, & parodicos ad eam gradus, ita homogeneum comparationis tanquam productum ſub medijs, habeatur, ſub extremis verò factum, tum poteſtati, tum affectionum homogeneis, reſpondeat. Sic enim ignota quantitas comparabitur, & eam, de qua ſolliciti ſumus, aſſequemur.

Analogiſmus ordinatus quid.

De

De tranſmutanda æquatione in proportionem, & contrà.

CAPVT XIV.

Præcipuum Algebræ munus eſt æquationem ad analogiſmum, & analogiſmum in proportionẽ tranſmutare. I. Exemplis explicatur tradita doctrina

HOc præcipuum eſt Algebræ munus, nimirum æquationem ad analogiſmum reuocare, ſeu æqualitatem in proportionem tranſmutare. Obſeruandum itaque factum ſub extremis æquale eſſe quadrato medij, & contrà, quando nimirum tria fuerint latera proportionalia. Vel factum ſub extremis ęquari facto ſub medijs, quando fuerint quatuor proportionalia latera. Hęc autem facilè nos aſſequemur.

Quamobrem ſi proponatur r a ✠ s a = s b ad hanc analogiam reuocabitur, vt r ✠ s ad s, ita b ad a, ſi verò fuerit æqualitas r a ✠ s a = s b ✠ r b, ſeu quod idem eſt r ✠ s] a = s — r] b ſupponendo quidem r terminum eſſe minorem, quàm s, ad hanc reuocabitur proportionem, vt r ✠ s ad s — r, ita b ad a,

Exemplum II.

Si fuerit æquatio b a = a^{2} ad hanc reuocabitur proportionem, ſcilicet, vt b ad z ita z ad a; eſt enim factum ſub b, & a, æquale quadrato ex z.

Exẽplum III.

Si ſit æquatio huiuſmodi a b a — d a = a b d ✠ 2 g d ad hunc reuocabitur analogiſmum, vt a b — d ad 2 b ✠ a g ita d ad a.

Exẽplum IV.

Si verò ſit 2 b a — d a = 2 b g ✠ b^{2} fiat, vt 2 b — d ad 2 g ✠ b ita b ad a.

Aduertenda quædam.

Aduertendum autem pręcipuè eum plana fuerint proportionalia etiam latera eſſe huiuſmodi, vt ſi ſint g^{2} — d^{2}; 4 b^{2} ✠ g^{2} — d^{2}
d^{2}; a^{2}, & etiam latera proportionalia eſſe, vt ℞ g^{2} — d^{2}; 4 b^{2} † g^{2} — d^{2}; d^{2} a^{2}
Q (g^{2} — d^{2}) ℞ Q (4 b^{2} † g^{2} — d^{2}); d; a, & ℞ (g^{2} — d^{2}) ℞ (4 b^{2} ✠ g^{2} — d^{2}); d; a
hoc perpetuò obſeruari debet, & contrà pote-
rit etiam æqualitas in proportionem traſmutari, vt cuicunque perſpicuum eſſe poteſt,

Exẽplum V.

Si fuerit æquatio 2 b^{2} — a b d = d^{2} ad hanc reuocabitur analogiam 2 b — d d; a b extrema enim hęc inuicem multiplicata producunt quadratum ex d.

Exẽplum VI.

Si fuerit r b ✠ s b = s a — r a ad hunc reducetur analogiſmum, vt s — r, ad r ✠ s ita b ad a.

Exẽplũ VII.

Inſuper ſi ſit 2 b a — d a = b d ✠ 2 d g ad hunc redigetur analogiſmum, vt 2 b — d ad b ✠ 2 g ita d ad a.

Exẽplũ VIII.

At ſi fuerit a b g — b^{2} = d a — a b a, fiet analogiſmus, vt d — 2 b ad 2 g — b, ita b ad a.

Exẽplam IX.

Et ſi fuerit a b a — d a = b^{2} — a b g fiet analogiſmus, vt a b — d ad b — 2 g ita b ad a,

At hunc in modum cætera perficienda ſunt.

Notãda quædam.

Illud porrò ſilentio non præteribo, nempe, ſępe[ſæpius vſu venire, vt in illis terminis proportionalibus ratiocinandum couuertendo componendo, diuidendo, &c. idque vel continuit poſtquam æquatio ad proportionem fuerit reuocata, vel nulla æqualitate præeunte, quod frequentiùs euenit, vt non pręeunte aliqua ęqualitate, erit, vt r ad s, ita a — b ad a ✠ b, conuertendo igitur erit, vt s ad r ita a ✠ b ad a — b, & diuidendo, vt s — r ad r ita a b ad a — b

Exẽplum X.

Ita ſi fuerit, vt b ad a ita a ad d — a fiet conuertendo, vt a ad b ita b — a ad a, & componendo, vt a ✠ b ad b ita b ad a; inſuper ſi fuerit, vt r ad s ita b ✠ a ad a, diuidendo fiet, vt r — s ad s ita b ad a.

Exemplũ I. At ſi foret, vt r ad s ita b — a ad b ✠ a componendo fieret, vt r ✠ s ad s, ita 2 b ad b ✠ a.

Exemplũ II. Sic etiam ſi foret, vt r ad s, ita b a — a' ad a' componendo fieret, vt r ✠ s ad s ita b a ad a'.

Exemplũ III. Si fuerit, vt 2 b ad d ita 2 a ad 2 a ✠ 2 g — b per conuerſionem rationis fiet, vt 2 b ad 2 b — d ita 2 a ad b — 2 g, & ſi fuerit, vt 2 b — d ad b ita b — 2 g ad a, fiet permutando, vt 2 b — d ad b — 2 g ita b ad a.

Exemplũ IV. Et ſi fuerit, vt b — c ad c ita 2 d ad a — d deinde, vt c ad c ✠ b ita a — d ad 2 a erit ex ęqualitate, vt b — c ad c ✠ b ita 2 d ad 2 a ſeu d ad a.

Quandoque contingit duplanda eſſe antecedentia. Plerumque contingit, vt opus ſit duplare antecedentia, vel conſequentia rationum; vt ſi fuerit analogiſmus huiuſmodi, nempe, vt b ad d ita a ad 2 a ✠ 2 g — b, etiam duplatis antecedentibus proportionales erunt magnitudines, nempe, vt 2 b ad d, ita 2 a ad 2 a ✠ 2 g — b.

Quandoque ſubduplanda. Vt autem licet hoc modo arguere, licebit etiam ſubduplatis antecedentibus.

Quandoque conſequentia. Quod autem de antecedentibus diximus de conſequentibus quoque intelligendum volumus, vt ſi fuerit quemadmodum d ad b, it 2 a ✠ 2 g — b ad a duplatis conſequentibus etiam proportionalia erunt hunc in modum, nempe, vt d ad 2 b ita 2 a ✠ 2 g — b ad 2 a.

Quandoque duplanda ſunt omnia. Quandoque verò duplanda ſunt omnia, quod contingit quando in æquatione fuerit fractio $\frac{1}{2}$, & ſic ſuo modo de alijs fractionibus;

Plerumque reſolutio incipit ab analogiſmo. Quandoque reſolutio incipit per analogiſmum, nec vlla eſt opus ęquatione nempe ſi fuerit, vt b ad d ita a ad 2 a — 2 g — b duplatis antecedentibus fit, vt 2 b ad d ita 2 a ad 2 a — 2 g — b, & per conuerſionem rationis, vt 2 b ad 2 b — d ita 2 a ad 2 g ✠ b, & ſubduplatis antecedentibus, vt b ad 2 b — d ita a ad 2 g ✠ b, & conuertendo, vt 2 b — d ad b ita 2 g ✠ b ad a, & permutando, vt 2 b — d ad 2 g ✠ b ita b ad a, vbi ex tribus cognitis quantitatibus ea, de qua quærebatur, innoteſcit.

Quandoque ex analogiſmo fit gradus ad æqualitatem. Aliquando verò ex analogiſmo gradum facimus ad ęquationem qua comperta ad alium analogiſmum progredimur, vt ex duabus, vel tribus magnitudinibus cognitis ea, quę latebat manifeſta reddatur; itaque erit, vt r ad s ita a — b ad a ✠ b; hoc autem analogiſmo ad æqualitatem traducto fit æquatio r a ✠ r b = s a — s b, & bis antitheſi repetita fit ęquatio r b ✠ s b = s a — r a, quæ rurſus ad analogiam reuocatur, fitque, vt s — r ad r ✠ s ita b ad a.

Plerumque ſiſtendum in ipſa æquatione. Plerunque ſiſtimus in ipſa æquatione, qua explicata ſecundùm Artis præcepta, reperta ſcilicet eius radice, hoc eſt poteſtatis affectę, & quidem huiuſmodi; prout poteſtatis natura requirit.

Sæpe contingit, vt fractio integræ magnitudini æquetur. Quoniam verò fractionem æquari integræ magnitudini non raro contingit; ob id reliquum eſt, vt hac de re ſermonem inſtituamus; non omnis tamen fractio in ſua membra reſolubilis eſt, niſi nimirum illa, cuius numerator reſolubilis eſt in duas magnitudines, quæ ſuo ductu numeratorem ipſum efficiant. Huiuſmodi autem reſolutione mutatur æqualitas in proportionem.

Reſolutio qua arte ſit inſtituenda. Reſolutio ipſa hac Arte perficitur.

Qua ratione ſit inſtituenda reſolutio. Denominator fractionis reſoluendæ, & integra magnitudo, cui fractio ipſa æquatur, ſunto extremi termini quatuor magnitudinum proportionalium, magnitudines verò, quæ ſuo ductu numeratorem efficiunt ſunto medij termini in eadem ſerie, & contrà; hoc enim pacto abſolutum erit, quod oportet.

Obſeruanda conditio in huiuſmodi fragmatis. Hac tamen in re hęc obſeruanda conditio, vt videlicet primus terminus, & ſecundus ſint quantitates homogeneæ, ſiue eiuſdem generis, quemadmodum etiam tertia, & quarta eiuſdem debent eſſe naturæ, quandoquidem heterogeneę comparari inuicem non poſſunt. Ratio enim duarum eſt magnitudinum eiuſdem generis mutua quędam ſecundum quantitatem habitudo; tres verò termini quandoque ſufficere quidem poſſent; nihilominus ſi vnus bis accipiatur duorum munere fungitur; propterea quatuor conſtituendos eſſe terminos haud iniuria dicebatur.

Primò ſit ęquatio $\frac{ba}{d}$ = a. Oporteat fractionem hanc in ſua membra reſoluere, vt

re, vt æqualitas in proportionem tranſmutetur. Reſolubilis eſt enim numerator in duas magnitudines, quæ efficiunt illum.

Sunto termini extremi d, & a; medius autem b; ſeu duo medij b bis repetitus, & fiet analogiſmus, vt d ad b ita b ad a.

Quoniam enim eſt, vt d ad b ita b ad $\frac{b^2}{d}$, vt patet; factum enim ſub extremis æquale eſt facto ſub medijs; ergo erunt termini proportionales; ſed $\frac{b^2}{d}$ æquatur ipſi a; ergo erunt proportionales, vt ſupra.

Secundò eſto æquatio $\frac{b^3}{a} = d^2$. Numerator reſolubilis eſt in duas quatitates, vt ſupra requirebatur; fiant extremi termini a, & d^2; medij vero b, & b^2, vt ſit analogiſmus. *Exemplū II.*

Vt a ad b, ita b^2 ad d^2; & ob eandem rationem termini ſunt proportionales, & conuertendo, vt d^2 ad b^2 ita b ad a.

Tertio ſit $\frac{bd}{a} = g$. Sunto extremi termini a, & g medij verò b, & d, vt fiat analogiſmus, vt a ad b, ita d ad g, & conuertendo, vt g ad d ita b ad a. *Exemplū III.*

Quoniam eſt, vt a ad b, ita d ad $\frac{bd}{a}$, & hæc fractio æquatur ipſi g ergo, vt a ad b, ita d ad g. Poſſunt etiam fieri extremi termini b, d, &c.

Quartò ſit æquatio $\frac{bd}{a+g} = f$ ſunt extremi termini a + g, & f, medij verò b, & d vel contra fiet analogiſmus. *Exemplū IV.*

Vt a + g ad b, ita d ad f, & conuertendo, &c.

Quinto proponatur æquatio $\frac{bdg}{a} = f^2$ fiant extremi termini a, & f^2 medij autem b, & d g vel g, & b d, vel d, & b g; oſtendemus autem eodem pacto quo ſupra terminos illos eſſe proportionales. *Exemplū V.*

Sextò proponatur $\frac{bd+gd}{a} = f$ extremi termini fiant a, & f medij b + g, & d vel contra, &c. vt fiat analogiſmus. *Exemplū VI.*

Vt a ad b + g, ita d ad f, vel contra, &c.

Septimò ſi proponatur æquatio $\frac{b^2-d^2}{g} = a$ ſunto extremi termini g, & a medij verò b + d, & b − d vel contra, vt fiat analogiſmus ob rationem ſimilem præcedentibus. *Exemplū VII*

Vt g ad b + d, ita b − d ad a.

Octauò proponatur $\frac{b^2+2bd+d^2}{a} = f$ fiant extremi termini a, & f medius verò b + d nam ex ductu b + d in ſe fit ille numerator; fiet analogiſmus. *Exēplū VIII.*

Vt a ad b + d ita b + d ad f, vel contra, &c.

Nonò ſit æquatio $\frac{b^2+bd+bg+dg}{a} = f$ fiant extremi termini a, & f, medij verò b + d, & b + g, &c. *Exemplū IX.*

Sit $\frac{b^2d^2}{g^2} = a^2$ fiant extremi termini g^2, & a^2 medius verò b d, & erit, vt g^2 ad b d ita b d ad a^2. Vel ſint extremi termini g^2, & a^2 medij verò b^2, & d^2. *Exemplū X.*

Hoc eodem modo procedendum in reliquis fractionibus, cum æquantur integris magnitudinibus, numeratoreſque ſunt reſolubiles, vt ſuprà iam ſæpe dictum fuit.

Quando autem numerator fractionis non eſt reſolubilis ad eum modum, vt diximus, fractio nequit in ſua membra reſolui, inde tamen non fit, quin æqualitas ipſa ad proportionem reduci poſſit, vt ſuperiùs innuimus. Fitque hac Arte; fractionis denominator, & integra magnitudo, cui comparatur fractio, extremi ſint termini ex tribus proportionalibus; r ad ſ at verò ligata, quam parentheſi ſignificamus, eſto terminus medius, vt ſit æquatio $\frac{bd+fg}{h} = a$; ſunto extremi termini h, & a, medius verò ſit numerator, vnde fiat analogiſmus h; ℞ (b d + f g); a; Quoniam enim eſt, vt h ad ℞ (b d + f g) ita ℞ (b d + f g) ad $\frac{bd+fg}{h}$; hæc autem eſt fractio æqualis ipſi a; erunt proportionales ob id termini, vt ſuprà; & ita de alijs æquationibus intellige, &c. Vt ſi foret $\frac{sb \backsim rd}{s \backsim r} = a$; fiet analogiſmus s ∽ r; ℞ (s b ∽ r d); a. *Quando numerator fractionis nō eſt reſolubilis quid agendum. Exemplum.*

Obſeruetur autem perpetuò homogeneorum natura; ſi enim fuerit $\frac{cd^2}{b}$ ſic inſtituenda eſt analogia, vt b, & c ſint antecedentes, vnde fiat, vt b ad c ita d^2 ad aliud planum; illudque ſit f^2, & ſic de cæteris. *Obſeruanda.*

Quandoque euenit, vt per analogiſmum vltimo loco habeatur ignota quantitas non ſeorſim, ſed vel affecta per negationem notæ quantitatis, vel per affirmatio- *Quādo per analogiſmum vltimo loco habetur ignota quantitas.*

nem per negationem, ſi fuerit, vt b — c ad c ita 2 d ad a — d vbi quarto loco extat a — d. Hoc autem nihil eſt, nam certum eſt ex tribus cognitis quantitatibus b — c; c, & 2 d; quartam quãdam innoteſcere, hęc autem non eſt æqualis a ſed a minus d. Si igitur adinuentę quantitati addatur nota illa quantitas d conſurget quantitas quæſita æqualis a.

Per affirmationem. Ita per affirmationem, ſi fuerit, vt r ✠ s ad s, ita 2 b ad b ✠ a in quarto loco eſtat quantitas ignota, ſed non ſeorſim, verùm, vt ea innoteſcat, ſatis ſuperque eſt ex tribus illis terminis notis r ✠ s; s; 2 b, colligere quartam quantitatem, nam hæc erit ęqualis non quidem a, ſed b ✠ a, quare ſi ex inuenta per analogiſmum quantitate auferatur nota quantitas b, quę relinquitur nota, fiet ęqualis a.

Animaduertenda quadã. Illud porrò animaduertiſſe oportet, per alium analogiſmum fieri poſſe notam ſeorſum quantitatem, quęſitam, qua de re paulo infra ſermo redibit.

Æquationem per modum. Æquationes igitur prædictis modis ad proportiones ſibi reſpondentes, reuocantur. Vnde

Æridogiſmi ad proportionem reuocantur, & contra. Si fuerit b a = c d, erit per congruam αναλυσιν atq; reſolutiuo ordine procedendo vt b ad c ita d ad a. Vel etiam permutando erit, vt b ad d ita c ad a: Vel contra ex proportione colligitur æquatio per ἀνθυποχωρησιν.

Exemplum II. Et ſi fuerit b a ∽ c a = d f facto paraboliſmo, prouenient $\frac{df}{b \sim c} = a$ fiet autem analogiſmus, vt b ∽ c ad d ita f ad a; vel etiam permutatim, vt b ∽ c ad f ita d ad a, vel contra ex proportione, &c.

Exemplũ III. Nec diſſimiliter ſi fuerit b a = c d ∽ d f facto paraboliſmo, per b, erit $\frac{cd \sim df}{b} = a$. Atque adeo fiet, vt b ad c ∽ f ita d ad a vel permutatim, vt b ad d ita c ∽ f ad a. Vel contra ex proportione, &c.

Exemplũ IV. Si fuerit b a ∽ c a = d f ∽ e f facto paraboliſmo nempe omnibus applicatis ad b ∽ c fiet $\frac{df \sim ef}{b \sim c} = a$ fit autem analogiſmus, vt b ∽ c ad d ∽ e ita f ad a, vel permutatim, vt b ∽ c ad f ita d ∽ e ad a. Vel contra ex proportione colligitur æquatio.

Exemplum V. Si fuerit b a = c² — d² per paraboliſmum fit $\frac{c^2 - d^2}{b} = a$. vnde analogiſmus, vt b ad c ✠ d ita c — d ad a vel permutatim, vt b ad c — d ita c ✠ d ad a. Vel contra ex proportione colligitur ęqualitas.

Exemplũ VI. Si fuerit b a = c² ✠ c a per antitheſin fiet b a — c a = c² facto paraboliſmo, omnibus videlicet applicatis ad b — c fiet $\frac{c^2}{b-c} = a$. Vnde fit analogiſmus, vt b ad c ita c ✠ a ad a, & diuidendo, vt b — c ad c ita c ad a. Vel contra ex proportione fit gradus ad æqualitatem.

Exemplũ VII. Si fuerit b a = c² — c a per antitheſin fiet b a ✠ c a = c² inſtituto paraboliſmo, nempe omnibus applicatis ad b ✠ c fiet $\frac{c^2}{b+c} = a$.

Vnde analogiſmus, vt b ad c ita c — a ad a, & componendo, vt b ✠ c ad c ita c ad a.

Exemplũ VIII. Si fuerit b a — b d = c a per antitheſin et b a = c a ✠ b d, & rurſus b a — c a = b d inſtituto paraboliſmo, omnibus ſcilicet applicatis ad b — c fit $\frac{bd}{b-c} = a$.

Vnde analogiſmus, vt b ad c ita a ad a — d, & diuidendo, vt b — c ad c ita d ad a — d, & per compoſitionem rationis contrariè factam, vt b — c ad b, ita d ad a. Vel contra ex analogia fit proceſſus ad ęqualitatem, &c.

Exẽplũ VIIII. Si fuerit b a — b d = c a ✠ c d per antitheſin fiet b a = c a ✠ c d ✠ b d & rurſus b a — c a = c d ✠ b d, & per paraboliſmum fit $\frac{cd + bd}{b-c} = a$.

Quando quãtitas quæſita non prouenit ſeorſum ſed affecta per affirmationem vel negationem nota quantitatis. Vnde analogiſmus, vt b ad c ita a ✠ d ad a — d, & diuidendo, vt b — c ad c ita 2 d ad a — d ex hoc analogiſmo colligitur, & de qua quæritur quantitas, & ſi non ſeoſim exhibita, hoc enim nihil refert, nam vt ſuperiùs quoque tetigimus, quarta per analogiſmum, quantitas, allata ſi augeatur nota quantitate; qua per negationem, ignota quantitas afficitur, ipſa quantitas ignota comparabitur.

Alia, & ſi longiori diſcurſu, via ſupereſt, per quam procedens analyſta, ſeorſim quantitatem ignotam conſequetur, quod etiam ſuperiùs adnotauimus; Si enim fuerit, vt b ad c ita a ✠ d ad a — d, inuertendo quidem erit, vt c ad b ita a — d

ad

ad a † d, & componendo contrariè tamen, fiet vt c ad e † b ita a — d ad 2 a, erat autem, vt b — e ad e ita 2 d ad a — d, modo eſt vt c ad e † b ita a — d ad 2 a erit, vt b — c ad c † b ita 2 d ad 2 a, vel ita d ad a, quod ex æqualitate colligitur; vnde quantitas ignota, quæ ſupponebatur a, hoc analogiſmo deprehenditur ſeorſim ab omni alia ſeiuncta quantitate, vti perſpicuè conſtat.

Exemplū X. Si fuerit b d † b a = c d — c a per antitheſin fiet b d ✣ b a † c a = c d, & rurſus b a ✣ c a = e d — b d, facto paraboliſmo fiet cd — bd / b ✣ c = a æqualitate ad proportionem reuocata, fiet, vt b ad e ita d — a ad d ✣ a, & componendo, vt b ✣ c ad c, ita 2 d ad d ✣ a. Deinde cum ſit, vt b ad c ita d — a ad d ✣ a, inuertendo erit, vt c ad b ita d ✣ a ad d — a, & per conuerſionem rationis, vt e ad e — b ita d ✣ a ad 2 a quare cum b ✣ c, † c, c — b ſint proportionales, quemadmodum 2 d, d ✣ a, 2 a, ſuntque bonæ acceptæ in eadem ratione proinde, ex æqualitate erit, vt b ✣ c ad e — b ita 2 d ad 2 a ſeu d ad a; Contra verò ex analogiſmo infertur æquatio.

Exemplū XI. Si fuerit b a ✣ b d = c a — c d per antitheſin fiet b a ✣ b d ✣ c d = c a, & rurſus b d ✣ c d = e a — b a Inſtituto paraboliſmo, fiet æquatio bd ✣ cd / c — b = a erit proinde, vt c ad b ita a ✣ d ad a — d, & diuidendo, vt e — b ad b ita 2 d ad a — d. Rurſus cùm ſit, vt c ad b ita a ✣ d ad a — d, erit inuertendo, vt b ad c, ita a — d ad a ✣ d, & per contrariam compoſitionem rationis, vt b ad b ✣ c ita a — d ad 2 a. Cum itaque ſit, vt e — b ad b ita b ✣ c ad b, & inſuper, vt 2 d ad a — d, vt a — d ad 2 a; ſuntque fine acceptæ in eadem ratione, proinde ex æqualitate erit e — b ad b ✣ c ita 2 d ad 2 a ſiue d ad e. Contra verò ex analogiſmo infertnr æquatio.

Exēplū XII. Si fuerit b d — b a = c a ✣ c d per antitheſin fiet b d = e a ✣ b a † e d, & rurſus b d — c d = e a ✣ b a. Inſtituto paraboliſmo, fiet bd — cd / c ✣ b = a. Proinde, vt c ad b, ita d — a ad a ✣ d, & componendo, vt e — d c ✣ b ad b; ita 2 d ad a ✣ d. Rurſus cùm ſit, vt e ad b, ita d — a ad a ✣ d erit inuertendo, vt b ad c ita a ✣ d ad d — a, & per conuerſionem rationis, vt b ad b — c ita a ✣ d ad 2 a. Quarto cum ſitit proportionales e ✣ b b b —, & 2 d a ✣ d 2 a ſuntque finæ acceptæ in eadem ratione proinde ex æqualitate erit, vt e ✣ b ad b — e ita 2 d ad 2 a ſeu d ad a. Contra verò ex analogiſmo, infertur æqualitas, &c.

Exēplū XIII. Si fuerit b a — b d = c d — c a per antitheſin fiet b a = c d ✣ b d — e a, & rurſus b a † e a = c d † b d.
Inſtituto paraboliſmo omnibus nimirum applicatus ad b ✣ c prouenit a = d. Proinde erit, vt b ad e ita d — a ad a — d, quare fiet d æqualis a, neque enim maior, neque minor eſſe poteſt.

Exēplū XIIII. Si fuerit b d — b a = c a — e d per antithebn fiet b d = b a ✣ c a — c d & rurſus fiet b d ✣ e d = b a ✣ e a. Inſtituto paraboliſmo, omnibus ſcilicet applicatis ad b ✣ c fit d = a proinde erit, vt b ad c ita a — d ad d — a, atque hinc concluditur d æqualis a.

Quanti fieri debeat in re analytica doctrina haſtenus tradita. Hìc porrò non eſt cur amplius immoremur, ex hactenus enim dictis exiſtimo cuique perſpectum futurum qua arte vti oporteat ad huiusmodi μεταμορφωσιν perficiendam, eſt autem operę pretium ſe ſe ad hanc pragmatiam adijcere cùm inde maximè pendeat æquationum explicatio, & cuiuſcunque Theorematis, vel Problematis, analyſis, atque ſyntheſis; quamobrem non grauabitur Analyticæ Diſciplinæ ſtudioſus tradita, quæ ſunt hucuſque præcepta memorię committere, vt cùm opus fuerit, obuia ſit de quo quæritur reſolutio, & via pateat ad quamcunque reſolutionem, compoſitionemque inſtituendam.

De

De æquationum natura atque conſtitutione dignoſcenda.

CAPVT XVII.

Multum conducit ad explicationem æquationum, earum habere perſpectam naturam.

NOn parum conducit ad æquationis explicationem ipſius naturam habere perſpectam; niſi enim quiſpiam introſpexerit eius principia, atque adeo naturam fuerit aſſecutus haud poterit artificiosè illam explicare; propterea hoc in loco nobis incumbit onus tradendi methodum, qua æquationes ipſæ recognoſci poſſint, & qua induſtria earundem primordia, atque conſtitutiones deprehendi queant.

Æquationes plerumque præparatione indigent antequam explicari queant.

Quoniam autem non rarò hę præparatione indigent, antequam feliciter explicari poſſint, pręſertim cum de magnitudinibus homogenis poteſtates negãtur, vel ita mixtim homogeneæ magnitudines de poteſtatibus ipſis negantur, & affirmantur, vt affectiones negatæ prępolleant affirmatis, poſtremò cùm affectiones fractis, vel aſymmetris numeris exhibentur; propterea ſupereſt hìc diſſerendum de æquationum origine, primaque conſtitutione, vt nimirum his cognitis ſternatur via, methoduſque paretur ad earum explicationem, ad quod vt dicebamus multum refert cognoſcere, vnde nam æquationes ſuum ortum ducant. Id porrò pluribus modis aſſequi licet, & primum ex *Ζήτησὶ Zeteſi*. Hãc autem indagandi conſtitutionem ęquationum Viam primus Vieta deſignauit, quæ cùm regia ſit, ommittenda non eſt, illam primò calcare, aliam, ſi quæ ſupererit non negligentes operę pretium duximus *Ζήτησις Zeteſis* inquiſitionem ſignificat, nomen enim græcum eſt, ſignificans apud illos idem, quod apud Latinos, inquiſitio quamobrem *πρόβλημα Ζητητικον*, *Problema Zeteticon*, idem ſignificat, ac Problema quæſitorum, ſiue inquiſitorium, vt enim *Ζήτημα*, nempe quęſtio, à verbo *Ζητεω*, quod Græcis ſignificat quęro, ita *Ζητησις* vnde *Ζητητικοί* Philoſophi dicuntur *οι ἐφεκτικοὶ καὶ σκεπτικοὶ* teſte Laertio, qui nihil aſſeueranter enunciabant, ſed ſemper quærebant, rei veritatem inueſtigantes, vt *συζητητής* curioſus, & naturę ſerutator dicitur. Ita fit, vt duplex problema ſit *Ζητητικον*, Zeteticum vnum, & *αναλυτικον* Analyticum alterum; illud quęſitiuum, hoc autem reſolutiuum diceres, *αναλυτικῷ* opponitur *συνθετικον*, nempe compoſitiuum.

Præcipuus modus inquirendi æquationũ primordia eſt ex Zeteticis.

Hic vnus, & quidem præcipuus ex modis, quibus inquirere licet ęquationum primordia, alij quoque extant de quibus infra, ſed hinc par erat exordiri cognita autem ęquationum natura fit obuia, ad earum explicationem, in quo totum huius Artis momentum eſt Vieta celebris Analyſta vſus Zeteticis ad indagandam æquationum naturam, atque conſtitutionem; nec immeritò, nam vt ex ſequentibus apertè conſtabit cognita ęquationis natura ex Zetetico, ſtatim ad eius explicationem via aperitur, quò fateamur neceſſe eſt magni faciendam eſſe methodum ex Zeteticis deſumptam. Noſtra verò inuenta hac in re poſtmodum afferemus.

Authoris inuenta inferius habentur.

Quãuis hac de re multa dicẽda ſupereſſẽt, ea tamẽ iuuat præterire ſilentio, nam id ſolùm eſt nobis in animo, neceſſaria tractare quæ nimirum ad oblatum quodcunque reſoluendum Problema conducunt, idque præſtiturum Deo adiuuante crediderim, ſi diligenter adnotauerim, quæ in Problematum reſolutione hactenus expertus ſum, multum enim conducit ad Artem aliquam, vel primò inueniendam, vel inuentam illuſtrandam, ac promouendam experium eſſe quę ad illam pertinent; propterea quod facilè quiſque notat vlterioribus opus eſſe pręceptis, nec vniuerſam Artem iam traditis eſſe comprehenſam; cùm non pauca eueniant, quę maiorem induſtriam requirant, Et ſi igitur ab alijs diſciplinam adinuentam tractandam ſuſcepetim,

peri de quo veteres, ſapientię proceres meritò gloriari poſſunt, tamen illud laudis nobis obtigiſſe ſatis, ſuperque ſit, illam eò deduxiſſe, vt quæ olim dificillima, ac inextricabilia, vel Theoremata demonſtratu, vel Problemata ſolutu credebantur modo ſua ſponte quaſi dixerim, occurrant.

Vtiliſſimè Zeteſis inſtituitur ad æquationū naturam indagandam

Haud ἀτέχνως, Zeteſis innſtituitur, nec ἐικῇ quidem, vt præclariſſimus Analyſta dicebat, cum pura à puris, affecta verò, ex affectis, ratio dictet proficiſci; quapropter ad deprehendendam conditionem æquationum pertinentium ad puras poteſtates, Artifex ex datis duobus latetibus poteſtates inquiret; Ad ęquationes poteſtatum ſimpliciter affectarum, ex data differentia, ſummaue laterum inueſtigabit, vel ſnorum graduum vna cum dato ſub ijs, vel eorum gradibus paribus, vel diſparibus facto ex lateribus alterutrum; Atque demum ad æquationes multipliciter affectarum affectionē adiunget affectioni ſub diuerſis gradibus parodicis laterum, Vel ſe non adiget Analyſta vni quæſtionum formulę, ſed ſub Zeteticis, ſub quocumque efficto, vel dato themate debebit ſe exetcete, admonendus eſt verò ille, vt recordetur, quæ Geometrico operi eſt apraturus latera ad extremas lineas rectas referri in ſerie continuè prodottionalium, facta verò ſub lateribus, & laterum paribus, vel diſparibus gradibus ad poteſtates aliquarum ex medijs; cumque in æquationem incidet ſuo benè obuiam μηχανικῶς de illo πρόβλημα condet, ſimile cuiuſcumque ęqualitatis ϲυϲτατικὸν, hoc eſt compoſitiuum, & ἐκθετικον ſeu ἐξηγητικον, hoc eſt expoſitiuum.

Problema ſyſtaticum quid, et quid exegeticum

Similes æquationes, quæ dicantur.

Quid autem ad æquationum ſimiltudinem tequiratur, ſupereſt, vt videamus. Æquatio dicitur ęquationi ſimilis, cùm par eſt vtrobique poteſtas, ſeu æque alta, & ipſa affecta, vel afficiens ſub pari gradu, vel eadem affectionis nota. Vnde duas æquationes non immeritò ſimiles eſſe dicemus, cùm in vtraque idem eſt poteſtatis gradus, eędem ſunt affectiones, ac ob id ſi omnes termini, ex vna parte reperiantur ęquales nihilo, tunc æquationes ſimiles erunt, cùm in vtraque idem eſt primus terminus, & reliqui termini in vtraque ſimiliter ſunt affecti, & ſi in vna, aliquis terminus, defuerit, is quoque deſit in alia; ſupponendum autem ſimilium ſcilicet æquationum, eandem eſſe conſtitutionem.

Simplex æquationum genus.

Cæterum, vt alibi etiam adnotatum fuit, triplex æquatio eſt, καταφατικὴ cataphatica, ἀποφατικὴ, apophatica, ἀμφίβολος, amphibola; hoc eſt affirmatiua, negatiua, & ambigua. Quę autem dicta ſunt facilè ex infra dicendis cognoſcentur, interim perſpicuum illud eſto, vt potc ratione deprehenſum, affecta quidem ab affectis originem ducere, quemadmodum pura à puris, atque adeo ad dignoſcendam conditionem æquationum pertinentium ad puras poteſtates operæ pretium eſſe ex duobus datis lateribus poteſtates inquitere, & ad ęquationes affectarum ſimpliciter poteſtatum ea opus eſſe perficere, qnæ paulò ſuperiùs innuimus.

Quadraticarū æquationum conſtitutio.

Supereſt autem, vt ad quadraticarum æquationum conſtitutiones ex Zeteticis gradum faciamus; Huius inuenti auctor Vieta eſt ſed hic multa alia, ad idem ſpectantia non ſine magno Artis incremento ſubijciemus, prædictarum igitur æquationum conſtitutiones, ſunt, ad eum, qui ſequitur in modum.

Quadraticarum æquationum natura, ac conſtitutio ex Zeteticis aperitur.

De conſtitutiuis igitur quadraticarum æquationum ex Zeteticis hìc differendum, ea verò ſunt, quæ ſequuntur.

Prima ex æquationibus quadraticis

Si ſit æquatio $a^2 + b\,a = z^2$, ſunt tres proportionales radices, quarum media eſt z, extremarum differentia eſt b; ſit autem a, minor extrema hoc Vieta deduxit ex Zetetico.

Zeteticum.

Data media trium rectarum linearum proportionalium, & extremarum differentia, repreire minorem oxtremam.

Media è tribus proportionalibus magditudinibus ſit z, at verò b ſit extremarum data differentia. Minor extrema eſto a; maior igitur erit $a + b$; rectangulum autem ſub his eſt $a^2 + b\,a$, & quoniam factum ſub extremis in ſerie tiium proportionalium æquale eſt quadrato medię; pıoinde $a^2 + b\,a$ æquabitur z^2; hoc autem eſt, quod ſuperiùs ordinabatur; conſtat igitur huius æquationis quadraticæ conſtitutio, hinc enim ęquatio ipſa originem trahit, conſtitutionemque ſortitur.

Hacte-

Hactenus verò dicta numeris etiam explicari poſſunt; propterea.

Numeris hactenus dicta declarantur.

Sit æquatio 1 Q + 48 R = 324; erit ℞ 324, hoc eſt 100 media inter extremas, quarum differentia erit 400, & ſit 1 R minor extrema è ſerie trium proportionalium 6, 100, 54, & ita quidem eſt, nam quadratum ex 6 eſt 36, cui ſi addideris 288, ſcilicet radicum pretium, fiet 324, conſtat igitur propoſitum.

Alijs modis praedictarum aequationum natura declarabitur infra, praſertim modoque Auctor adinuenit.

Huius autem æquationis, vt & ſequentium natura alijs quoque infrà dicendis modis deprehendetur, interim ex Zeteſi primo loco, viſum eſt illam inquirere,

Sit æquatio $a^2 - b\,a = z^2$. Sunt tres radices proportionales, quarum eſt media z, & extremarum differentia eſt b, ſit autem a, maior extrema, hoc autem Vieta deduxit ex Zetetico.

Zeteticum.

Data media trium proportionalium, atque differentia inter extremas reperire maiorem extremam.

Maior extrema eſto a, ergo minor erit $a - b$; rectangulum ſub his eſt $a^2 - b\,a$, & ob rationem ſuperiùs allatam erit æquatio $a^2 - b\,a = z^2$. Hoc eſt autem, quod priùs ordinabatur. Numeris autum eandem hanc æquationem ſic explicabimus.

Sit æquatio 1 Q + 48 R = 324, eſt ℞ 324 hoc eſt 18, media inter extremas, quarum differentia eſt 48, & ſit 1 Q maior extrema è ſerie trium proportionalium 6, 18, 54, & ita eſt, namque, ſi radicis pretium eſt 54, eius quadratum erit 2916; à quo ſi auferatur 2592, pretium radicum, remanebit 324 comparationis homogeneum.

Hinc igitur huius æquationis natura, ac primaria origo deprehenditur.

Sit æquatio $b\,a - a^2 = z^2$. Sunt tres radices proportionales, quarum eſt media z, & extremarum aggregatum b; & ſit a minor, vel maior extrema; hoc autem Vieta deduxit ex Zetetico.

Zeteticum.

Data media trium proportionalium, & aggregato extremarum reperire alterutram de extremis.

Data ſit media z, & aggregatum extremarum ſit b; Oporteat reperire alterutram de extremis. Minor extrema eſto a; erit ob id maior $b - a$, quapropter erit æquatio $b\,a - a^2 = z^2$ ob eam; quam ſuperiùs rationem attulimus.

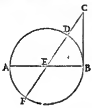
Sit maior extrema a; ergo $b - a$ erit minor extrema; ac proinde $b\,a - a^2$ æquabitur z^2; quamobrem a vel de minori, vel de maiori ipſarum extremarum poterit enunciari; quandoquidem amphibola cum hæc ſit æquatio duplicem habet radicem; ex Zetetico itaque huius æquationis primordia innoteſcunt. Numeris verò ſuperius dict[a] ſic poterunt declarari.

Sit æquatio 60 R — 1 Q = 324; media quidem inter extremas, quarum aggregatum eſt 60, erit ℞ 324, & ſit 1 R minor, vel maior extrema ex ſerie trium proportionalium 6, 18, 54, erit enim 6, & 54, ſuperioris æquationis radix.

S C H O L I O N.

Superius dicta Geometria conſentiente demonſtrantur.

QVa hactenus de quadraticarum iſtarum conſtitutione dicta ſunt, facilè poſſunt Geometricè demonſtrari. Si enim ſit aquatio $a^2 + b\,a = z^2$ *citra laborem conſtabit eſſe tres proportionales quantitates, quarum media ſit z, & extremarum differentia ſit a, ſiat verò a, minor extrema. In appoſito diagrammate coefficiens eſto* A B, *& ad extremum* B *punctum erigatur perpendicularis* B C, *qua poſſit comparationis homogeneum; mox autem* A B, *biſariam diuiſa in* E, *centro* E, *interuallo* E A; *vel* E B, *deſcribatur circulus* A D B F; *deinde à puncto* C *per* E, *centrum agatur* C D E F; *qua à peripheria primò ſecetur in* D. *deinde terminetur in* F, *erit quadratum ex* C D, *plus*

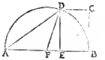


rectna-

rectangulo CDF, *hoc eſt plus rectangulo comprehenſo ſub* CD, *&* DF, *hoc eſt* AE *coefficiente, æquale rectangulo* FCD, *hoc eſt quadrato* CB; *præterea* CB, *poterat comparationis homogeneum; ſuntque* CD, CB, CF, *proportionales, adeo vt media ſit* CB, *extremarum differentia* DF, *patet igitur propoſitum.*

Ita etiam ſi ſit æquatio $a^2 - ba = z^2$ *media trium proportionalium eſt* z, *extremarum differentia eſt b; & ſit a, maior extrema, idque conſtat, namque in ſuperiori ſchemate, ſi* AB, *ſeu* FD, *ſit coefficiens, at verò* BC *poſſit comparationis homogeneum. Quadratum ex* CF *minus rectangulo* CFD *æquale eſt rectangulo* FCD; *hoc eſt quadrato ex* BC, *eſt igitur radix* CF, *erat enim* DF *coeffecienti æqualis; at verò* CB *poterat comparationis homogeneum, & quadratum ex* CF, *minus rectangulo* CFD, *æquale eſt quadrato rectæ* BC; *ſuntque* CD, DB *proportionales, quarum minor extrema* CD, *maior autem* CF *media verò* BC; *quæ poterat comparationis homogeneum; extremarum differentia coefficiens* EF. *Patet igitur propoſitum.* (Explicatur æquatio apothætica.)

Itademum ſit æquatio $ba - a^2 = z^2$. *Oſtendemus ex tribus qroportionalibus mediam eſſe* z; *extremarum autem aggregatum b, fierique a, minorem, vel maiorem extremam. In adiuncto enim Schemate recta* AB, *ſit coefficiens, ſupra quam deſcriptus ſit ſemicirculus* ADB; *ex puncto verò* B, *erecta ſit perpendicularis* BC, *potens comparationis homogeneum, à puncto autem* C, *acta* CD *paralella ipſi* AB *occurrat peripheriæ in* D; *à puncto* D *agatur* DE *perpendicularis ad* AB; *cum igitur rectangulum* AEB *minus quadrato ex* EB *hoc eſt rectangulum* AEB, *æquale ſit quadrato ex* DE, *ſeu* BC, *&* AB *erat coefficiens;* BC *verò poterat comparationis homogeneum, erit* DB *radix, ſuntque proportionales* EB, ED, EA *quarum media eſt* ED, *ſiue* BC, *extremarum autem aggregatum* AB: *ad radicem igitur minorem quod attinet patet propoſitum. Conſtabit etiam de maiori, eſt enim rectangulum* BAB *minus quadrato ex* AD, *æquale rectangulo* EBA, *hoc eſt quadrato ex* DE, *ſiue* BC; *proinde radix erit* AE.



Supradictarum autem æquationum natura, atque conſtitutio aliter quoque deprehenditur nimirum, vt ſuperiùs quoque monuimus per Εἰκασίαν τῶν ὁμοίων. *Si tamen id præ oculis habeatur, quod in ſequentibus fusè tractabitur, nempe vniuſcuiuſque æquationis dari duas, vel plures radices, ſi etiam ſermo ſit de æquationibus affectis, & quidem duas cùm æquatio fuerit quadratica, tres ſi fuerit cubica, tot, nimirum, quot dimenſiones ſunt poteſtatis affectæ; quadratum enim duarum eſt dimenſionum, propterea quadratica æquatio duplicem habet radicem, cubus trium eſt dimenſionum; ob id æquatio cubica tres radices habet, & ita deinceps; illud porrò eſt animaduertendum, quòd in æquatione quadratica è duabus radicibus ſæpe accidit, vt vna ſit falſa, hoc eſt minor quàm nihil, altera autem vera; hac de re tamen fusè in ſeqeentibus differendum erit; interim tamen hoc in loco tuuat animaduertiſſe, quod etiam in prima parte tetigimus, & hac de re multa quidem ſcripſimus.* (Supradictarũ æquationum.)

Ad hanc autem alteram viam, qua natura, atque conſtitutio æquationum compoſitarum indagatur, earum nempe, quæ ad hoc primumgenus pertinent præſtat facilitatis gratia per antitheſin, ſic æquationem ipſam parare, vt ex vna æquationis parte nihil exiſtat, atque adeo cum nihilo inſtituatur ἀντίθεσις, *priùs tamen aliquid de ſimplicibus dicendum.*

Aliæ quædam, & primò ſimplicium, deinde compoſitarum Æquationum conſtitutiones.

SI propoſita ſit æquatio $a^2 - g^2 = 0$. Ortum ducit à duabus, æquationibus ſequentibus $a - g = 0$, & $a + g = 0$ ex harum enim multiplicatione mutua fit $a^2 - g^2 = 0$. Ipſius igitur duæ ſunt radices, vna quidem vera, nempe g, altera (*Conſtitutio ſimplicis æquationis ex duabus quarum vna eſt vera, altera falſa.*)

itidem eadem g, ſed falſa, quarum ſcilicet vtraque æqualis eſt ipſi g. Hunc olim conſtitutionis modum attigerat Beaune, auxit Eraſmius, & nos adijecimus, quę peropportuna ad abſolutam argumenti tractationem videbantur.

Proponitur origo, aut æquatio vnde conſtitutio deprehenditur.

Si fuerit $a^2 + ba = bc$. Huius ęquationis ea eſt originalis ęquatio, quæ per multiplicationem quadraticam è radicibus binomijs ortum ducit; in hac enim factum ex radicibus multiplicatis, radicibus ipſis mnltiplicandis ſub ipſa forma tantummodo multiplicationis ordinatis, æquatur. Hinc autem originem trahit ſuperior ęquatio; ſi enim a æquatur b; vtique $a - b$ ęquabitur o; poſito igitur, quod a æquetur b; etiam radices multiplicandę $a - b$, & $a + c$ ſub forma multiplicationis tantummodo ordinatæ, æquabuntur o; at verò hiſce radicibus binomijs multiplicandis factum ex multiplicatis, nempe $a^2 - ba + ca - bc = 0$ (hoc autem fit, ſi ęquatiò $a - b = 0$ ducatur in æquationem $a + c = 0$) ęquabitur, & per antitheſin $a^2 - ba + ca$ æquabitur $+ bc$. Retentis autem omnibus terminis ex vna æquationis parte facilitatis gratia, ita vt ex altera exiſtat o, cui ſupradicti termini comparentur; atque adeo ſint nihilo æquales; propoſita æquatio erit ad hanc formam redacta $a^2 \begin{smallmatrix} -b \\ +c \end{smallmatrix} a - bc = 0$, quæ à, binomijs prędictis, tanquam à radicibus originem trahit, è quibus vna nimirum $a - b$ radix eſt vera, altera verò ſcilicet $a + c$ eſt falſa, vnde b, eſt vera, at verò c, eſt falſa. His ſuppoſitis.

Proponitur æquatio cuius conſtitutio inquiritur, & eſt cataphatica.

Propoſita ſit æquatio $a^2 + da - g^2 = 0$. Ex hypotheſi quod c, maior ſit quàm b æquatio iam dicta ſimilis erit ſuperiori, vt patet, eiuſdem propterea ſunt naturæ, atque conſtitutionis, facta igitur mutua earum comparatione, ac vtriuſque ſecundis terminis inuicem collatis, innoteſcit $c - b$ æquari d; cumque c foret radix falſa, b autem vera, coefficiens ſublateralis, nempe d deprehenditur æqualis differentiæ inter c, & b, atque adeo inter radicem falſam, & veram; hanc eandem coefficientem oriri ex applicatione differentię poteſtatum, ad aggregatum laterum in ſequentibus oſtendemus. Intelligimus quoque cognita c, falſa, veram b, ęqualem eſſe $c - d$, vt cognita vera b, falſam c, æqualem eſſe $b + d$, addiſcimus itidem collatis vltimis terminis g^2, ęquari bc, nempe rectangulo ſub ipſis radicibus vera, & falſa, vnde falſa c, cognita, veram b ęquari $\frac{g^2}{c}$, & cognita vera b, falsam c æquari $\frac{g^2}{b}$.

Sic igitur ſe habet, huius æquationis conſtitutio, vnde quàmmaximè patet aditus, vt ex ſequentibus peſpicuum fiet ad eiuſdem explicationem.

Coherentia cum ſuperioribus, & hanc conſtitutionẽ cum præcedentibus cohærere oſtenditur.

Cohærent hęc autem cum præcedentibus; ſunt enim tres proportionales magnitudines, è quibus extremæ duę ſunt radices, vna quidem vera, altera verò falſa in ęquatione, in qua quadratum afficitur adiunctione plani ſub latere, dataque coefficiente longitudine, vnde in ſuprapoſito ſchemate infra repetito, BC poteſt comparationis homogeneum iuxta priorem ęquationis formam, quod iuxta poſteriorem vltimus eſt eius terminus; DC radix eſt vera, cuius quadratum afficitur adiunctione plani ſub latere, &c. Radix falſa eſt FC, differentia FD, coefficiens eſt ſublateralis longitudo; ex vera radice DC, in falſam FC, fit rectangulum FCD, quod eſt æquale quadrato ex BC; in huiuſmodi igitur ęquatione perſpicimus coefficientem FD differentiam eſſe inter veram radicem DC, & falſam FC, atque cognita falſa FC, veram DC, ęqualem eſſe ipſi FC, minus FD, & cognita vera DC, falſam FC, eſſe ęqualem ipſi DC, plus FD, & quadratum BC, ęquale eſſe rectangulo FCD, ſub falſa, & vera radice, & cognita falſa FC, veram DC, ęqualem eſſe magnitudini ortiuæ ex applicatione quadrati BC, ad FC, cognita autem DC, falſam FC, ęqualem eſſe magnitudini ortiuę ex applicatione quadrati BC, ad veram radicem DC.

Proponitur originaria æquatio vnde conſtitutio deprehenditur.

Si fuerit $a^2 - ba = bc$. Huius æquationis ea eſt originalis æquatio, quæ per multiplicationem è radicibus binomijs ortum ducit, in hac enim factum ex radicibus multiplicatis, radicibus ipſis multiplicandis ſub ipſa forma tantummodo multiplicationis, ordinatis ęquatur. Hinc autem òriginem trahit ſuperior æquatio. Si enim a, æquetur b, vtique $a - b$ æquabitur o, quod ſi $a - b$ æquetur o ergo factum ex $a - b$ in $a + c$ æquabitur o, poſito igitur quòd a, æquetur b; etiam radices multiplicandæ $a - b$, & $a + c$, ſub forma mnltiplicationis tantummodo ordinatæ æquabuntur o, at verò hiſce radicibus binomijs multiplicandis, factum

ex

ex multiplicatis, nempe $a^2 - ba + ca - bc$ (hoc autem fit, ſi æquatio $a - b = 0$ ducatur in æquationem $a + c = 0$) æquabitur ; & per antitheſin $a^2 - ba + ca$ æquabitur $+ bc$. Retentis autem omnibus terminis ex vna æquationis parte, facilitatis gratia, itaut ex altera exiſtat o, cui ſupradicti termini comparentur, atque adeo ſint nihilo æquales, propoſita æquatio erit ad hanc formam redacta $a^2 \begin{smallmatrix}-b\\+c\end{smallmatrix} a - bc = 0$, quæ à binomijs prædictis, tanquam à radicibus originem trahit, è quibus nimirum $a - b$. radix eſt vera, altera verò ſcilicet $a + c$ eſt falsa, vnde b, eſt vera; at verò c, eſt falſa. His ſuppoſitis.

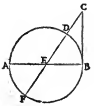
Proponitur æquatio apophanica.

Propoſita ſit æquatio $a^2 - da - g^2 = 0$, ex hypotheſi, quòd b, maior ſit quàm c, æquatio iam dicta ſimilis erit ſuperiori, vt patet, eiuſdem propterea ſunt naturę atque conſtitutionis, facta igitur mutua earum comparatione, ac vtriuſque ſecundis terminis inuicem collatis, innoteſcit $c - b$ ęqualem eſſe $- d$, vel d, æqualem eſſe $b - c$; eiuſdem coefficientis ortum alium, in ſequentibus oſtendemus; cumque c, foret radix falſa; b autem vera, coefficiens ſublateralis, nempe d, deprehenditur ęqualis differentiæ inter c, & b atque adeo inter radicem falſam, & veram; Intelligimus quoque cognita falſa c, veram b, æqualem eſſe $d + c$; cognita vera b, falſam c, æqualem eſſe $b - d$. Vltimiſque terminis collatis.

Addiſcimus itidem g^2 æquari b c, nempe rectangulo ſub ipſis radicibus, falſa, & vera, ac ob id cognita falſa c, in æquatione propoſita, veram b, ęquari $\frac{g^2}{c}$, & cognita vera b falſam c, æquari $\frac{g^2}{b}$.

Sic igitur ſe habet, huius æquationis conſtitutio, vnde quammaximè patet aditus vt ex ſequentibus perſpicuum fiet, ad eiuſdem explicationem.

Cohęrent hæc autem cum præcedentibus, ſunt enim tres proportionales magnitudines, è quibus extremæ duę ſunt radices, vna quidem vera, altera autem falſa in æquatione, in qua quadratum afficitur negatione plani ſub latere, dataque coefficiente longitudine ; vnde in ſuprapoſito ſchemate hìc repetito B C, poteſt comparationis homogeneum iuxta priorem ęquationis formam, quod iuxta poſteriorem vltimus eſt eius terminus, at F C eſt radix vera, cuius quadratum afficitur abiunctione plani ſub latere, radix falſa eſt D C, differentia F D, eſt coefficiens longitudo ſublateralis ; ex vera radice F C in falſam D C, fit rectangulum F C D, quod eſt ęquale quadrato B C. In huiuſmodi igitur



æquatione perſpicimus coefficientem F D, eſſe differentiam inter veram radicem F C, & falſam D C, atque deprehendimus cognita falſa radice D C, veram F C, æqualem eſſe F D, plus D C, & cognita vera F C, falſam D C, equalem eſſe F C, minus F, D quadratum verò ex B C, eſſe æquale rectangulo F C D, ſub vera, & falſa radice, cognita autem falſa D C, veram F C ęqualem eſſe magnitudini ortiuę ex applicatione quadrati B C, ad D C, cognita vera F C, falſam D C ęqualem eſſe magnitudini ortiuę ex applicatione quadrati B C, ad veram radicem F C.

Originaria æquatio vnde amphibola.

Si fuerit $ba - a^2 = bc$. Huius ęquationis ea eſt originalis æquatio, quæ per multiplicationem decentem è radicibus binomijs ortum ducit, in hac enim factum ex radicibus congruè multiplicatis, radicibus ipſis multiplicandis ſub ipſa forma tantummodo multiplicationis ordinatis, æquatur. Hinc autem originem trahit ſuperior æquatio ſi enim a, æquetur b, vtique $a - b$ æquabitur o; vel ſi ponatur a æquari c vtique $a - c$ æquabitur o. Si itaque a ęquetur d vel c, etiam radices multiplicandæ $a - b$, & $a - c$ ſub forma multiplicationis tantummodo ordinatę ęquabuntur o, at vero hiſce radicibus binomijs multiplicandis, factum ex multiplicatis nempè $a^2 - ba - ca + bc$ (hoc enim, fit ſi ęquatio $a - b = 0$ congruè ducatur in æquationem $a - c = 0$) æquabitur; & per antitheſin $a^2 - ba - ca = + bc$.

Retentis autem omnibus terminis ex vna æquationis parte facilitatis gratia, itaut ex altera exiſtat o, cui ſupradicti termini comparentur, atque adeo ſint nihilo ęquales, propoſita æquatio erit ad hanc formam redacta nimirum $a^2 - {}^{b}_{c}\, a - b\, c = o$ quæ a binomijs prædictis tanquam a radicibus originem trahit, è quibus vna nimirum $a - b$ radix eſt vera, altera vero $a - c$ itidem vera. His verò ſuppoſitis.

Proponatur æquatio cuius inquiritur conſtitutio.

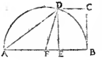
Propoſita ſit æquatio $a^2 - d\,a + g^2 = o$. Hæc æquatio perſimilis erit ſuperiori vt patet, eiuſdem propterea ſunt naturæ, atque conſtitutionis facta igitur mutua earū cōparatione, ac vnius terminis cū alterius ſecundis terminis collatis innoteſcit $b + c$ æquari d, cumque tam b, quàm c, radix ſit vera, coefficiens ſublateralis, nempe d deprehenditur ęqualis aggregato, ex b, & c atque adeo ex vtraque radice vera. Intelligimus quoque ſi vna ipſarum fuerit cognita, nempe c reliquam b ęqualem eſſe $d - c$, & cognita b, reliquam c æquari $d - b$. Vltimiſq; terminis collatis;

Addiſcimus quoque g^2 æquale eſſe $b\,c$, nempe rectangulo ſub duabus veris radicibus, ac ob id alterutra cognita, vtputa b, alteram c æqualem eſſe $\frac{g^2}{b}$, & cognita c alteram b æqualem eſſe $\frac{g^2}{c}$.

Sic igitur ſe habet huius æquationis conſtitutio, vnde quam maximè patet aditus, vt ex ſequentibus perſpicuum fiet ad eiuſdem explicationem.

Quæ hucuſq; dicta ſunt cū præcedentibus cohærent.

Cohęrent autem hæc cum præcedentibus ſunt enim tres proportionales magnitudines, è quibus, vtraque extremarum eſt radix in æquatione, in qua planum ſub latere, dataque coefficiente longitudine afficitur multa quadrati, vnde in ſuprapoſito ſchemate hic repetito, B C poteſt comparationis homogeneum iuxta priorem æquationis formam, & iuxta poſteriorem, vltimus eſt eius terminus; at E B, radix vna, altera etiam, A E vtraq; vera; & rectangulum A E B, afficitur multa quadrati E B, rectangulum verò B A E, afficitur multa quadrati A E aggregatum ex A E, E B radicibus eſt æquale coefficienti longitudini; ex radice E B, & radice A E, rectangulum æquale eſt quadrato E D, ſeu B C. In huiuſmodi igitur æquatione perſpicimus coefficientem A B, eſſe æqualem aggrato vtriuſque radicis, atque deprehendimus cognita radice A E, fieri cognitam E B, & contra, &c.



Quæ tamen ſecundo loco attulimus ad prædictarum æquationum conſtitutionem indagandam, per *σύγχρισιν* indagantur; vnde non eſt cur aliquis è Neotericis id ſibi arroget, cum iam prædicto modo ea fuerint comparata. Quod ita planum fiet.

Conſtitutio eadem per ſynchriſin deprehenditur.

Proponatur $a^2 + b\,a = z$ pl., & rurſus $e^2 - b\,e = z$ pl. cum igitur quæ vni æquantur ſint inter ſe æqualia $a^2 + b\,a$ æquabitur $e^2 - b\,e$, & per antitheſin $e^2 - a^2$ quabitur $b\,e + b\,a$, omnibuſque per $e + a$ diuiſis, fiet æquatio $\frac{e^2 - a^2}{e + a}$) id eſt $e - a = b$. Igitur b coefficiens ſublateralis eſt differentia duorum laterum, quorum vnum eſt falſum, alterum autem verum, oriunda ex applicatione differentiæ quadratorum ad aggregatum laterum prædictorum, & quia $a^2 + b\,a$ æquatur z plano in locum ipſius b ſubrogetur agnitus eius valor, nempe $\frac{e^2 - a^2}{e + a}$ ergo $a^2 + \frac{e^2 - a^2}{e + a}\, a$ æquabitur z plano, hoc eſt omnibus ritè ordinatis $\frac{a^2 e + e^2 a}{e + a}$) id eſt $e\,a$; æquabitur z plano; eſt enim $e\,a$, æquale huic fractioni $\frac{a^2 e + e^2 a}{e + a}$, ſi namque diuidatur $a^2 e + e^2 a$ per $e + a$ orietur $e\,a$ pro quotiente; Vnde addiſcimus z planum fieri ex mutua multiplicatione duorum prædictorum laterum, hæc ſuperiùs intendebātur. Quæ vt meliùs intelligi queant, numeris explicare non pigebit.

Hactenus dicta numeris explicantur.

Proponatur 1 Q + 12 R = 85, & rurſus 1 A Q − 12 A = 85, erit æquatio 1 Q + 12 R = 1 A Q − 12 A, & per antitheſin 1 A Q − 1 Q = 12 R + 12 A omnibuſque diuiſis per 1 A + 1 R erit æquatio $\frac{1AQ - 1Q}{1A + 1R} = 12$, & quia 1 Q + 12 R æquatur 85, in locum ipſius 12 ſubrogetur cognitus eius valor $\frac{1AQ - 1Q}{1A + 1R}$, & erit ęquatio 1 Q $\frac{+ 1AQ - 1Q}{1A + 1R}$) 1 R = 85, & omnibus ritè ordinatis, fiet $\frac{1 Q\, 1 A + 1 AQ\, 1 R}{1A + 1R}$. Id eſt 1 A in 1 R æquabitur 85.

Vnde

Explicantur hactenus tradita.

Vnde hactenus tradita colligimus cum veritate conſentire namque radix 1 R eſt 5, & A eſt 17, illa vera; hæc autem falſa, quod ex multiplicatione deprehenditur, ſi enim ducatur $a + 17 = 0$ in $a - 5 = 0$ fit productnm $a^2 + 12\,a - 85 = 0$. Agnitum etiam eſt comparationis homogeneum, nempe 85, fieri ex multiplicatione falſæ radicis 17 in veram 5. De his tamen fusè in ſequentibus diſſerendum. Interim illudadnotetur, puta laterum prædictorum, nempe 17, & 5, quadtata eſſe 289, 25 quorum differentia eſt 264, quę ſi applicetur ad 22, aggregatum eorundem laterum, oritur coefficiens ſublateralis 12.

$$
\begin{array}{r}
a + 17 = 0 \\
a - 5 = 0 \\
\hline
-5\,a - 85 \\
a^2 + 17\,a \\
\hline
a^2 + 12\,a - 85 = 0
\end{array}
$$

Quæ de ſuperiori æquatione dictaſunt de cæteris quoque &c.

Quæ verò de ſuperiori æquationis, diximus genere, ſuo debito modo de alijs duobus generibus, nempe apophatica, & amphibola intelligenda ſunr, vt cumulatè in ſequentibus explicabimus.

Implicatioribus præferenda ſimpliciora.

Si implicatioribus, præferenda ſimpliciora ſunt, non nihil ſpei mihi blanditur futurum, vt hæc, quæ nos excogitauimus quadraticarum æquationum primordia aliquo digna plauſu æxiſtimentur. Harum autem principia ſunt, à quibus ipſę fiunt, ſunt, & cognoſcuntur, cùm hæc ſit ipſius principij ratio, ſed quoniam hæ non transſcendunt planorum limites, planorum autem principia immediata ſunt latera, quorum ductu producuntur, harum igitur æquationum immediata principia erunt; at ex lateris diſſectione, non niſi latera oriuntur; hinc iſtarum æquationum primordia, latera ipſa dicenda exiſtimauimus. Ad primam igitur æquationem, quod attinet, in qua quadratum afficitur adiunctione plani ſub latere, dataque coefficiente longitudine, conſtitutio ſic ſe habet per

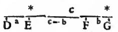
Quadraticarum æquationum principia ſunt latera.

διαίρεσιν τῆς γραμμῆς ὀρθῆς.

Cõſtitutio ſuperioris æquationis ab Auctore adinuenta traditur ac explicatur vbi ſine Zeteticis, & ſine collatione æquationis cũ alia omnia haberi poſſe oſtēditur.

Sit recta D G ſecta vtcunque in E ſecta. verò ſit F G æqualis ipſi D E, manifeſtum eſt, quadratum ex D E, vnà cum rectangulo D E F; æquari rectangulo D F G, eſt enim quadratum ex D E, vnà cum rectangulo D E F æquale rectangulo F D E, hoc eſt D E G, ſi itaque D E, fuerit radix; E F, verò coefficiens quidem ſublateralis; cùm quadratum ex D E, vna cum rectangulo D E F, nempe quadratum radicis plus, homogeneo ſub latere, & coefficiente longitudine, æquale ſit rectangulo, D E G, erit rectangulum D E G, ſeu E G B, homogeneum datę menſuræ; itaque D E erit radix vna, cui æquatur F G, quamobrem D E, minus F G, æquabitur o; nempe nihilo, vnde D E erit radix vera, & E G, radix falſa, illa enim plus E G æquabitur o; harum differentia E F, eſt ipſa coefficiens longitudo. Hinc addiſcimus differentiam duarum radicum, quarum vna eſt vera; altera falſa in æquatione de qua loquimur eſſe coefficientem longitudinem, atque cognita radice vera D E, ſeu F G, per additionem coefficientis longitudinis E F fieri cognitam radicem falſam E G; vt contra cognita falſa E G, per ſubtractionem eiuſdem coefficientis longitudinis E F fieri cognitam radicem veram F G, ſeu D E, & comparationis homogeneum puta rectangulum D E G, ſeu E G F, fieri ex radice quidem vera D E, ſeu F G, in falſã E G quamobrem ſi D E, fuerit a, & E G fuerit c, & F G, denique b, comparationis homogeneum nempe rectangulum D E G, ſeu E G F erit b c, eſt autem a — b ęqualis o cùm a æquetur b, & E F, eſt c — b. proinde fiet ęquatio [illegible] a = b c quod ſi placet fieri comparationem inter poſitiuum, & negatiuum erit [illegible] a — b c = o. Hic aduerte cum c ſit maior quã b; per additionem ipſius + c ad — b fieri æquationem affirmatiuam, Vides igitur quã ſimplex ſit huius æquationis cõſtitutio, & quomodo abſque, Zeteticis, vel collatione cum alia æquatione, propoſitæ æquationis primordia comparentur.

D E eſt a; F G eſt b E G eſt c; & E F eſt c — E.



Si

Alia inſtituitur hypotheſis.

Si placet poteſt etiam eadem recta appellari a, & b; cum enim a ſupponatur æqualis b, vnde a — b eſt æqualis o, propterea eadem dici poteſt a, & b, vnde adhuc a — b, æquabitur o. Tunc verò ſchema ſe haberet, vt hìc. Manifeſtum eſt quadratum ex DE, vnà cum rectangulo DEF æquari rectangulo FDE. Si itaque DE fuerit radix, EF, verò coefficiens ſublateralis erit. Cùm igitur quadratum ex DE vnà cum rectangulo DEF, nempe quadratum radicis, plus homogeneo ſub latere, & coefficiente longitudine, æquale ſit rectangulo FDE; rectangulum FDE, erit homogeneum datæ menſuræ. Erit igirur DE radix vera, & DF radix falſa; hæc enim plus DE æquabitur o; harum autem differentia EF, erit coefficiens longitudo. Hinc addiſcimus differentiam duarum radicum, quarum vna eſt vera, altera falſa in ęquatione, de qua loquimur eſſe coefficientem longitudinem, atque cognita vera radice DE per additionem coefficienris EF, fieri cognitam radicem falſam DF, vt cognita falſa DF, per ſubtractionem eiuſdem coefficientis longitudinis EF fieri cognitam radicem verain DE, & comparationis homogeneum, puta rectangulum, FDE, fieri ex radice quidem vera DE, & falſa DF, quamobrem, ſi DE fuerit a, & eadem ſit b, & DF ſit c; comparationis homogeneum, nempe rectangulum FDE, eſt bc; eſt autem a — b æqualis o; cùm a æquetur b, imò ſit eadem, & EF eſt c — b; proinde fiet æquatio $aa - ba ⩵ bc$ ſeu $aa - ba - bc ⩵ o$.

DE, eſt a itemq; b; DF, eſt c, & EF, eſt c — b.

```
  * a *
 ─────────────────
 D b E     c — b F
  *         c    *
```

Proponitur ſecundum æquationis quadraticæ genus.

Sequitur æquatio, in qua quadratum afficitur multa plani ſub latere, dataque coefficiente longitudine, cuius conſtitutio hæc eſt.

Bifariam inſtitui poteſt hypotheſis, vel protracta DF in G, itaut FG ſit æqualis ipſi DF, & hæc dicatur a; at FG dicatur b; vel ſuppoſito, quod DF, ſit a eademque dicatur b; quia tamen in ſecunda hypotheſi adhuc a — b, æquatur o, non minùs, quàm in prima, & eadem currit demonſtratio, vt in antecedenti licet aduertere, propterea ſecundam hypotheſin amplectemur; ergo.

DF, eſt a, itemque b, & foret etiã b, ipſa FG. DE eſt c, & EF, eſt b — c.

```
 *      a      *
 ──────────────...............
 D c E  b — c  F             G
 *      b      *
```

Sit recta DF, ſecta in E, vtcumque, manifeſtum eſt quadratum cx DF multatum rectangulo DFE, æquari rectangulo FDE, eſt enim quadratum ex DF, æquale rectangulo DFE, vnà cum rectangulo FDE, vnde quadratum ipſum ex DE, multatum rectangulo DFE, æquabitur rectangulo FDE, ſi itaque DE ſit radix, erit EF coefficiens ſublateralis, cùm itaque quadratum ex DF, minus rectangulo DFE, nempe quadratum lateris minus homogeneo ſub latere, & coefficiente longitudine, æquale ſit rectangulo FDE, rectangulum FDE erit homogeneum datæ menſurę, itaque DF erit latus vnum, cuì cùm æquetur eadem DF, erit DF, minus DF, æqualis o, nempè nihilo, vnde DF erit radix vera, & DE radix falſa, illa enim plus DE æquabitur o, harum differentia EF eſt ipſa coefficiens longitudo. Hinc addiſcimus differentiam duarum radicũ, quarum vna eſt vera, altera falſa in ęquatione, de qua loquimur, eſſe coefficientem longitudinem, atque cognita radice vera, DF per ſubtractionem coefficientis longitudinis EF fieri cognitam radicem falſam DE, & cognita falſa radice DE per additionem eiuſdem coefficientis, fieri cognitam radieem veram DF, & comparationis homogeneum, puta rectangulum FDE, fieri quidem ex radice vera DF in falſam DE, quamobrem ſi DF, fuerit a itemque b, & DE fuerit c, comparationis homo-

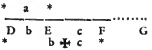
homogeneum, nempe rectangulum F D E eſt b c, eſt autem a — b æqualis o, cum a, æquetur b, & E F eſt b — c, proinde fiet ęquatio $\genfrac{}{}{0pt}{}{-b}{+c}\, a = b\,c$, quod ſi placet fieri comparationem inter poſitiuum, & negatiuum erit $\genfrac{}{}{0pt}{}{-b}{+c}\, a - b\,c = o$.

Hic aduerte cum b, ſit maior, quàm c, per additionem $+ c$ ad $- b$ fieri æquationem negatiuam.

Supereſt ad extremum æquatio, in qua homogeneum ſub latere dataque coefficiente longitudine afficitur multa quadrati, cuius conſtitutio hæc eſt. *Æquationis amphibolæ cõſtitutio apud Auctorem.*

Bifariam inſtitui poteſt hypotheſis, vel protracta D F, in o, itaut F G, ſit æqualis D E, & hæc dicatur a at F o, dicatur b, vel ſuppoſito, quòd D E dicatur a, & eadem dicatur b, quia tamen in ſecunda hypotheſi adhuc a — b æquatur o, non minus quàm in prima, & eadem currit demonſtratio, vt in prima huius licuit aduertere; propterea ſecundam hypotheſin amplectemur, ergo.

D E, eſt a, itemq; b, & foret etiam b, ipſa F G; E F, eſt c. D F eſt b + c,



Sit recta D F, vtcunque ſecta in E; Manifeſtum eſt rectangulum F D E minus quadrato D E æquari rectangulo D E F; quare ablato quadrato ipſius D E, ex rectangulo F D E, remanebit rectangulum D E F eſt igitur rectangulum F D E, minus quadrato ipſius D E, æquale rectangulo D E F. Si itaque D E, ſit radix, erit D F, coefficiens ſublateralis longitudo; cùm itaque rectangulum F D E, nenpe homogeneum ſub latere, & coefficiente longitudine, minus quadrato ipſius D E, ſcilicet radicis æquale ſit rectangulo D E F, erit rectangulum D E F, homogeneum datæ menſurę. Itaque D E, erit radix vna; cui cum æqualis ſit b, imo eſt eadem, erit D E, minus D E, ęqualis o nempe nihilo, vnde D E, erit radix vera, & quia idem contingit de E F; proinde, E F, erit altera radix vera, quarum aggregatum eſt D F; Hinc addiſcimus aggregatum duarum radicum, quarum vtraque eſt vera in æquatione de qua loquimur, eſſe coefficientem longitudinem, atque cognita radice vna, fieri cognitam alteram per ſubtractionem ipſius à coefficiente longitudine, & contra altera, &c. & comparationis homogeneum puta rectangulum D E F, fieri quidem ex radice D E, in E F; quamobrem ſi D E fuerit b atque D E fuerit c, comparationis homogeneum, nempe rectangulum D E F, erit b c; eſt autem a — b æqualis o; cùm a, æquetur b, imo ſit eadem, & D F, erit b + c proinde fiet æquatio $\genfrac{}{}{0pt}{}{+b}{+c}\, a - a^2 = b\,c$ ſeu facta comparatione inter poſitiuum, & negatiuum; erit $\genfrac{}{}{0pt}{}{-b}{-c}\, a + b\,c = o$.

Cubicarum æquationum, in quibus affectiones exiſtunt ſub latere natura, atque conſtitutio ex Zeteticis aperitur.

Hactenus explicuimus conſtitutionem æquationum quadraticarum, nunc proximum eſt, vt æquationum cubicarum naturam explicemus, earum nimirum in quibus affectiones exiſtunt ſub latere, harum autem natura tum ex Zeteticis, cùm etiam alijs modis innoteſcit; primò de conſtitutiuis ex Zeteticis verba faciemus. *Æquationum cubicarum conſtitutio ex Zeteticis.*

Si ſit æquatio $a^3 + b^2 a = b^2 d$. Sunt quatuor quantitates proportionales, quarum prima, maior, vel minor inter extremas eſt b, & aggregatum ex ſecunda, & quarta eſt d, ſit autem a, ſecunda, quod cum Vieta ex Zetetico deprehendemus. Inferiùs tamen in ſcholio demonſtrationem intueberis. *Proponitur æquatio cataphatica.*

Data prima, & aggregato ex ſecunda, & quarta in ſerie quatuor continuè proportionalium, ſecundam reperire. *Zeteticum.*

Secunda eſto a; ob id quarta erit d — a, at verò cubus è ſecunda æquatur ſolido ſub quadrato primæ, & quartæ. Sunt enim proportionales termini hi hoc modo, vt quadratum primæ ad quadratum ſecundæ ita ſecunda ad quartam; proinde ducatur b^2, nempe quadratum primæ in d — a, quartam, & fiet ſolidum, $b^2 d - b^2 a$, atque adeo, vt dicebamus cubus è ſecunda, nempe a^3, æquabitur $b^2 d - b^2 a$,

& per

& per antitheſin fiet æquatio huiuſmodi $a^3 + b^2 a = b^2 d$. Hoc autem priùs ordinabatur. Numeris hæc eadem hunc in modum poterunt explicari.

Sit æquatio $1 C + 25 R = 1250$. Sunt quatuor continuè proportionales, quarum prima maior inter extremas eſt ℞ 25, hoc eſt 5; & aggregatum ex ſecunda, & quarta eſt $\frac{1250}{25}$ hoc eſt 50, & ſit 1 R ſecunda ex ſerie quatuor continuè proportionalium 5, 10, 20, 40. Et ita quidem eſt; nam ſi radix eſt 10, cubus eſt 1000; cui ſi addideris 250, pretium nimirum radicum, fiet 1250, compatationis homogeneum.

Si ſit æquatio $a^3 - b^2 a = b^2 d$. Sunr quatuor continuè proportionales, quarum prima minor inter extremas, eſt b, & differentia inter ſecundam, & quartam eſt d, & ſit a, ſecunda ex Zetetico.

Zeteticum.

Data prima inter extremas, & differentia inter ſecundam, & quartam in ſerie quatuor continuè proportionalium, reperire ſecundam.

Data ſit b, prima inter extremas, & differentia inter ſecundam, & quartã ſit d; oporteat reperire ſecundam. Secunda eſto a: ergo quarta erit $a + d$; & quia ſolido facto ſub primæ quadrato, & quarta, æqualis eſt cubus ex ſecunda; proinde ſi ducamus b^2, nempe quadratum primæ in $a + d$ nimirum quartam, fiet ſolidum $b^2 a + b^2 d$, cui æquabitur cubux ex ſecunda, nempe a^3; & per antitheſin fiet æquatio $a^3 - b^2 a = b^2 d$; quod prius ordinabatur. Numeris autem hunc in modum.

Numeris explicatur ſuperior æquatio.

Sit ęquatio $1 C - 25 R = 750$; ſunt quatuor continuè proportionales, quarum prima eſt ℞ 25, ideſt 5; differentia verò inter ſecundam, & quartam eſt $\frac{750}{25}$ hoc eſt 30; & fiet 1 R ſecunda ex ſerie quatuor continuè proportionalium, 5, 10, 20, 40.

Sit æquatio $b^2 a - a^3 = b^2 d$; Sunt quatuor quantitates continuè proportionales, quarum prima maior inter extremas eſt b, differentia verò inter ſecundam, & quartam eſt d, & ſit a, ſecuuda ex Zetetico.

Zeteticum.

Data prima maiori inter extremas, & differentia inter ſecundam, & quartam in ſerie quatnor continuè proportionalium, reperire ſecundam.

Prima maior inter extremas eſto b; differeatia verò inter ſecundam, & quartam data ſit d; oporteat reperire ſecundam; ipſa autem ſecunda ſit a; ergo quarta erit $a - d$, & quia cubus è ſecunda æqualis eſt ſolido facto ſub quadrato primę, & quarta, nimitum quadratum primæ in $a - d$, nempe quartam fit ſolidum $b^2 a - b^2 d$, cui ęquabitur cubus è ſecuda, nempe a^3, & per antitheſin fiet æquatio $b^2 a - a^3 = b^2 d$ numeris autem hoc modo.

Numeris explicatur ſuperior æquatio.

Sit æquatio $256 R - 1 C = 1535$, ſunt quatuor continuè proportionales, quarum prima eſt ℞ 256 id eſt 16 differentia verò inter ſecundam, & quartam eſt $\frac{1536}{256}$ id eſt 6, & ſit 1 R ſecunda ex ſerie quatuor continuè proportionalium 16, 8, 4, 2, ipſa autem ſecunda duplex eſſe poteſt, ſiquidem hæc ęquatio duplicem habet radicem ob ſuam, qua laborat, ἀμφιβολίαν.

Notanda quædam.

Cæterum animaduertendum, quoniam data eſt maior inter extremas quæſita verò eſt minor; ob id ſecunda, minus differentia. æqualis eſt quæſitæ. Secùs verò ſi data fuiſſet minor, & maior in quęſtione foret. Tunc enim minor plus differentia æquaretur quartæ.

S C H O L I O N.

Hactenus tractata magis explicatur.

Hactenus dicta circa æqualitatum quadraticarum conſtitutionem ex Zeteticis, eo conſtant, quia in ſerie trium proportionalium laterum, factum ſub extremis, æquale eſt quadrato medy, vt ex Elementis conſtat.

At cubicarum æquationum conſtitutio itidem ex Zeteticis, ex eo planè colligitur, quòd in ſerie quatuor proportionalium laterum, cubus è ſecundo æqualis eſt ſolido à quadrato primi in quartum, quod primò Analyticè, deinde Geometricè demonſtrabimus Ideo ejlo.

THEO-

THEO*rema paulo poſt oſtendendum.*

Cæterum cùm habetur ſermo de quatuor continuè proportionalibus particulam *continuè* aliquando neglectam, ſubintelligendam volumus; vt cùm opus eſt exprimere num minor, vel maior ſit prima inter extremas, ſubaudienda particula eſt *minor*, vel *maior* prout res ipſa poſtulat, & ſi aliquando vel emanuenſis, vel Typographi incuria fuerit omiſſa.

Hic aduertenda quædam.

Hic non prætereo, quendam alioquin in rebus Mathematicis haud mediocriter verſatum, allucinatum fuiſſe, exiſtimans eſſe ſolidas æquationes, in quibus ſolida æquantur ſolidis, vnde ſi foret b $a^2 =$ *z ſolido, non ob id ſolida dicenda eſt æquatio, quamuis ſolido, ſolidum ſit æquale; eſt enim inſtituendus paraboliſmus, omnia ſcilicet applicando ad b, magnitudinem, vt proueniat ordinata æquatio* $a^2 = \frac{z\ \text{ſolido}}{b}$. *Ita ſi b* $a^2 +$ *d plano a, æquetur z ſolido, ſolida æquatio non eſt, cùm omnia debeant applicari ad b, vt fiat æquatio* $a^2 + \frac{d\ \text{pl.}}{b}\ a = \frac{z\ \text{ſolido}}{b}$, *& ita de conſimilibus, quæ planæ ſui natura dicendæ ſunt, quamuis ſolidæ per aſcenſum dici poſſint; ſiquidem plana in æquationibus ritè ordinatis ad ſolida aſcendunt planorum eorundem ductu in longitudinem b, vel aliam conſimilem, prout æquatio fuerit ſpeciebus inſtituta. Solida verò dici non poſſunt cùm æquationes à poteſtate nomenclaturam ſortiantur, at in huiuſmodi æquationibus, altior poteſtas, non aſcendit ad tres dimenſiones, quod ad ſolidum requiritur, & quamuis inter ſolida fiat comparatio, nihil refert, id enim prouenit, quia non dum ipſa ritè ſunt ordinatæ ſecundum Artis præcepta inſtituendus enim ſupereſt paraboliſmus, vt altior gradus poteſtatis nomen ſibi vendicet, & ex ea æquatio ſubſiſtat, quod accidit, cùm per eum, qui paraboliſmus inſtituitur, altior poteſtas emergit, vt itaque ſolidæ dici mereantur æquationes, oportet, vt in ijs altior poteſtas, trium ſit dimenſionum, vnde cubum eſſe neceſſe eſt, reliqua verò homogenea naturam eiuſdem conſequuntur. Hæc innuiſſe non alienum duximus ab inſtituto, cùm de æquationum natura diſſeratur. Illud inſuper ſe ſe offert conſiderandum, nempe cubicarum æquationum, naturam, atque conſtitutionem ex alijs quoque Zeteticis indagari. Vnde*

Alexander Anderſonus allucinatus eſt exiſtimans æquationes eſſe ſolidas, eo quod in ijs ſolida comparentur ad inuicem. Explicatur ſolidarum æquationum natura.

Si ſit $a^3 + b^2 a = b^2 d$. *Sunt duo latera, quorum vnum eſt indiuiſum; nempe b; alterum autem d, in duo ſegmenta diuiſum, vt quadratum ipſius b, ad quadratum vnius ſegmenti rationem habeat, quam prædictum ſegmentum ad aliud ſegmentum eiuſdem, ſit autem a, primum ſegmentum ex Zetetico.*

Alia quoque Zetetica ſunt è quibus detrahitur cubicarum æquationum natura. Proponitur æquatio cubica affirmatiua. Zeteticum.

Datis duobus lateribus, vnum eorum ita diuidere, vt quadratum indiuiſi, ad quadratum è ſegmento diuiſi eam habeat rationem, quam ſegmentum idem, ad ſegmentum reliquum.

Data ſint latera b, & d oporteat &c. Segmentum vnum eſto a, alterum erit d — a, vt autem eſt b^2 *ad* a^2, *ita debet eſſe a, ad d — a, & multiplicatis extremis, ac medijs proueniet æquatio* $a^3 = b^2 d - b^2 a$, *& per antitheſin fiet* $a^3 + b^2 a = b^2 d$.

Sit æquatio $a^3 - b^2 a = b^2 d$. *Duo ſunt latera, quorum vnum b, alterum d, augendum cremento, vt quadratum illius ad quadratum crementi rationem habeat, quam crementum, ad latus cremento adauctum, ſit autem a, crementum ex Zetetico.*

Proponitur æquatio cubica negatiua.

Datis duobus lateribus, vnum eorum ita augere, vt quadratum alterius ad quadratum crementi, rationem habeat, quam crementum ipſum, ad latus cremento adauctum.

Zeteticum.

Latera ſint b, & d, oporteat &c. Lateri d, fieri debeat additio, cremento, quod dicatur a, ergo adauctum erit d + a, vt autem eſt b^2 *ad* a^2 *ita debet eſſe a ad d + a multiplicatis extremis, & medijs fiet æquatio* $a^3 = b^2 d + b^2 a$, *& per antitheſin fiet* $a^3 - b^2 a = b^2 d$.

Sit æquatio $b^2 a - a^3 = b^2 d$. *Duo ſunt latera, quorum vnum b, alterum d, minuendum de alio; ad cuius quadratum, quod ſit ex priori quadratum, rationem habet, vt idem latus ad reſiduum, ſit autem a, illud quod minutionem patitur ex Zetetico.*

Proponitur æquatio cubica amphibola.

Datis duobus lateribus vnum eorum ex alio quodam auferre, vt quadratum prioris ad huiuſmodi lateris quadratum rationem habeat, quam idem latus ad reſiduum.

Zeteticum.

Latus vnum, ſit, b, alterum auferendum d, oporteat &c. Quæſitum latus eſto a, ergo reſiduum erit a — d, vt autem b^2 *ad* a^2, *ita debet eſſe a, ad a — d multiplicatis extremis, & medijs, fiet* $a^3 = b^2 a - b^2 d$, *& per antitheſin fiet* $a^3 + b^2 d = b^2 a$, *& rurſus fiet* $a^3 - b^2 a = b^2 d$.

THEOREMA.

SI ſint quatuor latera continuè proportionalia: cubus à ſecundo æqualis eſt ſolido facto à quadrato primi in quartum.

Analyticè. SIt a, primum in ſerie quatuor continuè proportionalium, ſecundum eſto b; erit ob id $\frac{b^2}{a}$ tertium, vt patet, ex huius Artis Elementis; ſi enim b ducatur in ſe quadraticè fit b^2 quo applicato ad a; primum, fit $\frac{b^2}{a}$; deinde ſi $\frac{b^2}{a}$ ducatur in ſe quadraticè, fit $\frac{b^4}{a^2}$ quo applicato ad b, ſecundum, fit $\frac{b^4}{a^2 b}$; ergo quartum erit $\frac{b^4}{a^2 b}$ ſunt igitur quatuor latera continuè proportionalia a, b, $\frac{b^2}{a}$, $\frac{b^4}{a^2 b}$. Ducatur a, primum in ſe, & fit a^2 quo ducto in quartum $\frac{b^4}{a^2 b}$, fit productum $\frac{a^2 b^4}{a^2 b}$. Hoc autem æquatur b^3, vt patet ex diuiſionis præceptis. Nam ſi diuidatur $a^2 b^4$ per $a^2 b$, prouenit b^3, quod multiplicatione comprobatur, ſi enim $a^2 b$ ducatur in b^3 fit $a^2 b^4$, vt conſtat.

Geometricè. SInt quatuor latera continuè droportionalia A, B, C, D. Dico cubum ex ſecundo B, æqualem eſſe ſolido facto à quadraro, ex A primo in quartum D. Quoniam enim iam dicta latera ſunt continuè proportionalia, ergo, & eorum quadrata continuè proportionalia erunt. Itaque, vt eſt quadratum ex A, ad quadratum ex B, ita erit quadratum ex B, ad quadratum ex C, & vt eſt quadratum ex B, ad quadratum ex C, ita quadratum ex C, ad quadratum ex D, ſed, vt quadratum ex C, ad quadratum ex D, vt patet ex Elemētis ita eſt B ad D, ergo erit quadratum ex A ad quadratum ex B, vt B ad D; atque adeo factum ſub extremis nempe factum ſub quadrato ex A, & latere D æquale erit facto ſub medijs, nempe ſub quadrato ex B, & eodem latere B, ſed factum ſub quadrato ex B, & eodem latere B, eſt cubus eiuſdem B, & factum ſub quadrato ex A, & latere D, eſt ſolidum, ſub quadrato primi lateris comprehenſo, & latere quarto; ergo ſi fuerint quatuor latera continuè proportionalia; cubus è ſecundo æqualis eſt ſolido à quadrato primi, in quartum. Quod erat oſtendendum.



Numeris ſupradicta declarantur. Hæc facilè numeris declarantur, nam ſi ſint quatuor numeri continuè proportionales, vt 8, 12, 18, 27, ſi multiplicemus 64 quadratum ex 8, per 27 numerum quartum, reperiemus, fieri numerum 1728, quantum ſanè facit ſecundus numerus 12, ſi cubicè multiplicetur.

Cùm itaque ſit prima b, in æquatione illa $a^3 + b^2 a = b^2 d$, ſecunda verò a aggregatum autem ex ſecunda, & quarta ſit d, certè ipſa quarta erit $d - a$, & ex antea dictis cubus è ſecunda, vt a^3 æquabitur ſolido, à quadrato primę b, in quartam $d - a$; quadratum ex b eſt b^2 ſolidum verò iam dictum erit $b^2 d - b^2 a$, huic autem æquabitur a^3; ob id per antitheſin fiet $a^3 + b^2 a = b^2 d$.

Proponitur alia cubicarum æquationum conſtitutio ex Zeteticis; ſingularis tamen eſt, &c. Alia quoque eſt cubicarum æquationum conſtitutio, ex Zeteticis, earum ſcilicet, in quibus affectio eſt ſub latere, ſiquidem æquatio fuerit καταφατικὴ, & ἀποφατικὴ; ſingularis tamen eſt, cùm videlicet quadruplus cubus à triente coefficientis plani, cedit quadrato ſolidi datæ menſuræ, hoc eſt comparationis homogenei Vnde.

Si

Si fuerit æquatio $a^3 + 3$ b pl. a $=$ d ſol. Tunc b planum, eſt quod fit ſub lateribus, à quibus, qui fiunt cubi differunt per d ſolidum, fit autem a, differentia laterum, quod ex Zetetico deprehenditur.

Æquatio in qua cubus aſficitur adiunctione ſolidi ſub latere datoque coefficiente plano.

Data differentia cuborum, & rectangulo ſub lateribus, differentiam laterum reperire.

Zeteticum.

Vides igitur quæ ſint huius æquationis conſtitutiua, & quo pacto ſe habeat eius conſtitutio, quod ſi numeris placeat explicare Si 1 c $+$ 6 R æquatur 7 erit $\frac{6}{3}$ hoc eſt 2 rectangulum ſub lateribus, quorum cubi differunt per 7, & fit 1 R laterum differentia 1, ſuppoſitis lateribus 1, & 2. Vel ſi 1 c $+$ 36 R æquatur 208, erit $\frac{36}{3}$ hoc eſt 12 rectangulum ſub lateribus, quorum cubi differunt per 208, & fit 1 R laterum differentia 4, ſuppoſitis lateribus 2, & 6, & quidem cubus ex 2, eſt 8, at ex 6 eſt 216, quorum differentia eſt 208, at ſi 4, differentia laterum 2, & 6, cubicè multiplicetur, producitur 64, cui addito 144 producto ex 36, plano coefficiente in 4, radicis pretium, fit ſumma 208, æqualis comparationis homogeneo.

Numeris omnia explicantur.

Si $a^3 - 3$ b plano a, æquetur d ſolido. At verò d, ſolidi quadratum præſtet quadruplo b plani cubo; eſt b planum, rectangulum ſub lateribus, quorum cubi componunt d ſolidum, & fit a, aggregatum laterum, quod Vieta ex Zetetico deprehendit.

Æquatio in qua cubus afficitur multa ſolidi ſub latere, datoque coefficiente plano.

Dato rectangulo ſub lateribus, & aggregato cuborum, inuenire latera.

Zeteticum.

Hæc inferius oſtendentur. Numeris autem hoc modo.

Si 1 C $-$ 6 R æquetur 9 eſt $\frac{6}{3}$ hoc eſt 2, rectangulum ſub lateribus, quorum cubi aggregati faciunt 9, & fit 1 R aggregatum laterum ex hypotheſi quod latera ſint 1, 2. Vel

Numeris tradita explicantur.

Si 1 C $-$ 36 R æquetur 224; eſt quidem $\frac{36}{3}$ hoc eſt 12, rectangulum ſub lateribus, quorum cubi ſimul additi, faciunt 224; fitque 1 R, 8, laterum aggregatum, ſuppoſitis lateribus 2, & 6.

Si $a^3 + 3$ b plano a, æquetur b plano d, ſunt quatuor lineę proportionales, ſub quarum medijs, vel extremis fit b planum, differentia verò extremarum eſt d, & fit a differentia mediarum, quod Vieta deſumpſit ex Zetetico.

Æquatio in qua cubus afficitur itidem adiunctione ſolidi ſub latere, &c.

Data differentia extremarum, & rectangulo ſub medijs, vel extremis in ſerie quatuor continuè proportionalium, mediarum differentiam reperire.

Zeteticum.

Hæc inferiùs conſtabunt. Numeris autem hoc modo.

Si 1 C $+$ 24 R, æquetur 56, ſunt quatuor continuè proportionales, ſub quarum medijs, vel extremis, quod fit planum, æquale eſt $\frac{24}{3}$ hoc eſt 8, differētia verò extremarum eſt $\frac{56}{8}$ id eſt 7, & fit 1 R differentia mediarum ex ſerie continuè proportionalium 1, 2, 4, 8. Vel

Explicatio per numeros.

Si 1 C $+$ 81 R æquetur 702, ſunt quatuor continuè proportionales ſub quarum medijs, vel extremis, quod fit planum eſt, æquale $\frac{81}{3}$ hoc eſt 27, differentia verò extremarum eſt $\frac{702}{27}$ hoc eſt 26, & fit 1 R differentia mediarum ex ſerie concontinuè proportionalium 1, 3, 9, 27.

Si $a^3 - 3$ b pl. a æquetur b plano d. Sit verò d ſemiſſis quadratum maius b, plano. Sunt quatuor proportionales lineæ rectæ ſub quarum medijs, vel extremis fit b planum, aggregatum autem extremarum eſt d, fit verò a, aggregatum mediarum; hoc autem Vieta deduxit ex Zetetico.

Æquatio in qua itidem cubus afficitur multa ſolidi ſub latere, &c.

Dato aggregato extremarum, & rectangulo ſub medijs, vel extremis in ſerie quatuor continuè proportionalium, mediarum aggregatum adinuenire.

Zeteticum.

Hæc inferiùs perſpicua fient Numeris autem hæc modo.

Si 1 C $-$ 24 R æquætur 72. Sunt quatuor continuè proportionales ſub quarum medijs, vel extremis, planum quod fit æquatur $\frac{24}{3}$ hac eſt 8. Aggregatum extremarum eſt $\frac{72}{8}$ hoc eſt 9, & fit 1 R aggregatum mediarum ex ſerie quatuor continuè proportionalium, 1, 2, 4, 8. Vel

Explicatio per numeros.

Si 1 C $-$ 81 R æquetur 756, ſunt quatuor continuè proportionales ſub quarum medijs, vel extremis, planum quod fit æquatur $\frac{81}{3}$ hoc eſt 27, aggregatum extremarum eſt $\frac{756}{27}$ hoc eſt 28, & fit 1 R aggregatum mediarum ex ſerie quatuor continuè proportionalium 1, 3, 9, 27.

S C H O L I O N.

Proponitur, quod oſtendendum ſupereſt.

ILlud eſt oſtendendum, Si $a^3 + 3$ b plano a æquetur d ſolido; eſſe b planum, quod ſit ſub lateribus, à quibus, qui fiunt cubi differunt per d ſolidum; ſitque a differentia laterum, in cuius gratiam eſto.

T H E O R E M A.

CVbus differentia laterum, plus ſolido à triplo rectangulo ſub ijſdem lateribus, atque differentia eorundem, æqualis eſt differentia cuborum ab ipſis.

Analyticè.

LAtus vnum eſto a, & quidem maius, alterum verò b, nempè minus, horum differentia eſt $a - b$, huius cubus eſt $a^3 - 3ba^2 + 3b^2a - b^3$, huic ſi addatur $3ba^2 - 3b^2a$, ſolidum, nempe factum per multiplicationem differentię laterum, ſcilicet $a - b$ in triplum rectangulum ſub lateribus, nimirum $3ba$, fiet $a^3 - b^3$. Huius autem generis ſunt æquationes iſtę 1 c + 48 R = 504, cuius radicis pretium eſt *6*; altera erit 1 c + 72 R = 1720, cuius radicis valor eſt 10; Prioris quidem radix erat *6*, differentia laterum, quæ nimirum ſupponebantur 2, & 8; poſterioris eſt 10, ex hypotheſi, quòd latera ſint, 2, & 12.

$$
\begin{array}{r}
a - b \\
a - b \\
\hline
- ba + b^2 \\
a^2 - ba \qquad \\
\hline
a^2 - 2ba + b^2 \\
a - b \\
\hline
- ba^2 + 2b^2a - b^3 \\
a^3 - 2ba^2 + b^2a \qquad \\
\hline
a^3 - 3ba^2 + 3b^2a - b^3 \\
3ba^2 - 3b^2a \qquad \\
\hline
a^3 - b^3 \qquad
\end{array}
$$

Geometricè.

HOc autem Geometricè facilè eſt ex Elementis oſtendere.

$$
\begin{array}{r}
a - b \\
3ba \\
\hline
3ba^2 - 3b^2a \\
3ba^2 - 3b^2a
\end{array}
$$

Cùm verò diceremus; ſi $a^3 - 3$ b plano a æquetur d ſolido, dummodo tamen d ſolidi quadratum præſtet quadruplo b plani cubo, hoc eſt quadratum ſolidi datæ menſuræ præſtet quadruplo cubo a triente coefficientis plani, eſſe quidem b planum rectangulum ſub lateribus à quibus, qui fiunt cubi, componunt d ſolidum, ſitque a, laterum aggregatum. Id verò conſtat; in cuius gratiam eſto, quod ſequitur Theorema.

Aduertenda quædam.

Illud autem eſt animaduertendum ſcilicet in huiuſmodi demonſtrationibus, a nobis veritatem ſpectari, non autem attendi ſymbola, ſiue ſpecies, quibus magnitudines deſignantur, quæ ſcilicet, apprimè reſpondeant ijs quas in Zeteticis adhibuimus, hoc enim puerile duximus; vnde ſi ibi, in ſerie quatuor cōtinuè proportionaliū primum lacum obtineat b, ſecundum verò a, hic non idem attendimus, cùm ad rem non faciat, ſed naturali ordine procedentes, primum locum a, ſecundum verò b, concedimus, quod aduertiſſe iuat, etiam in gratiam eorum, quæ deinceps futura ſunt.

THEO-

THEOREMA.

Cubus aggregati laterum, minus ſolido facto à triplo rectangulo ſub lateribus in aggregatum laterum, aequalis eſt aggregato cuborum ab iiſdem lateribus. Analyticè.

Latus vnum eſto a, aliud verò ſit b, laterum aggregatum eſt a + b, cuius cubus eſt $a^3 + 3ba^2 + 3b^2a + b^3$, ſolidum autem factum à triplo rectangulo ſub lateribus in laterum aggregatum eſt $3ba^2 + 3b^2a$, quo dempto ex cubo iam dicto, remanet $a^3 + b^3$. Huius generis aequatio eſt illa 1 c — 48 R ⊏ 520; cuius radix eſt 10; ex hypotheſi laterum 2, & 8, à quibus cubi additi conficiunt 520.

$$\begin{array}{c} a + b \\ 3ba \\ \hline 3ba^2 + 3b^2a \end{array} \qquad \begin{array}{r} a + b \\ a + b \\ \hline ba + b^2 \\ a^2 + ba \\ \hline a^2 + 2ba + b^2 \\ a + b \\ \hline + ba^2 + 2b^2a + b^3 \\ a^3 + 2ba^2 + b^2a \\ \hline a^3 + 3ba^2 + 3b^2a + b^3 \\ 3ba^2 + 3b^2a \\ \hline a^3 + b^3 \end{array}$$

HAec autem Geometricè nullo labore ex Elementis oſtendi poſſunt. Geometricè.

Deinde, ad illam aequationem, quod attinet cum diceremus ſi $a^3 + 3b$ pl. a aequetur b plano d, eſſe quatuor cõtinuè proportionales magnitudines, ſub quarũ medijs, vel extremis fieri b planum, differentiam extremarum eſſe d, fierique a, mediarum differentiam, conſtat ex eo, quod mox ſequitur.

THEOREMA.

SI ſint quatuor latera continuè proportionalia, cubus à differentia mediorum, plus ſolido facto ex triplo rectangulo ſub medijs, vel extremis, & eadem differentia mediorum aequalis eſt ſolido, à rectangulo ſimplo praedicto in differentiam extremorum.

Analyticè. oſtenditur Theorema.

Sumto latera continuè proportionalia a, b, $\frac{b^2}{a}$; $\frac{b^3}{a^2}$ differentia mediorum eſt $b - \frac{b^2}{a}$ huius cubus eſt $b^3 - 3\frac{b^4}{a} + 3\frac{b^5}{a^2} - \frac{b^6}{a^3}$. At verò rectangulum ſub medijs eſt $\frac{b^3}{a}$, cuius triplum eſt $3\frac{b^3}{a}$ quo ducto in $b - \frac{b^2}{a}$ differentiam mediorum laterum, producitur $3\frac{b^4}{a} - 3\frac{b^5}{a^2}$ quo addito ad cubum iam dictum, fit $b^3 - \frac{b^6}{a^3}$. Hoc idem autem euenit, ſi multiplicetur $\frac{b^3}{a}$, rectangulum ſub medijs, per $a - \frac{b^3}{a^2}$; differẽtiã extremorũ, & prouenit $\frac{b^3 a}{a} - \frac{b^6}{a^3}$ hoc eſt $b^3 - \frac{b^6}{a^3}$. Caeterum ſuppoſuimus a, maius eſſe extremum ex quatuor lateribus proportionalibus, proinde b, maius eſt quàm $\frac{b^2}{a}$, quamobrem differentia mediorum laterum eſt $b - \frac{b^2}{a}$ quemadmodum differentia extremorum eſt $a - \frac{b^3}{a^2}$. Id autem eueniet, eodemque modo demonſtrabitur ſi ſupponamus a, extremum minus.

$$\begin{array}{r} b - \frac{b^2}{a} \\ b - \frac{b^2}{a} \\ \hline - \frac{b^3}{a} + \frac{b^4}{a^2} \\ b^2 - \frac{b^3}{a} \\ \hline b^2 - 2\frac{b^3}{a} + \frac{b^4}{a^2} \\ b - \frac{b^2}{a} \\ \hline - \frac{b^4}{a} + 2\frac{b^5}{a^2} - \frac{b^6}{a^3} \\ b^3 - 2\frac{b^4}{a} + \frac{b^5}{a^2} \\ \hline b^3 - 3\frac{b^4}{a} + 3\frac{b^5}{a^2} - \frac{b^6}{a^3} \\ 3\frac{b^4}{a} - 3\frac{b^5}{a^2} \\ \hline b^3 - \frac{b^6}{a^3} \end{array}$$

Quod attinet ad conſtitutionem aequationum cubicarum in quibus affectiones exiſtũt ſub quadrato, quid oporteat oſtendere, inferiùs dicemus.

Si

Æquationum cubicarum conſtitutio proponitur indaganda.

Si indaganda ſit cubicarum æqnationum conſtitutio hæc non vna eſt, quia non vna æquatio cubica, alia enim eſt in qua affectio exiſtit ſub latere, alia in qua affectio exiſtit ſub quadrato, alia denique in quaduobus prædictis modis affectio contingit, nempe ſub latere, & per τὴν ἐυκασίαν τῶν ὁμοίων cum neoterico, aliam deinde quam nos excogitauimus longè ſimpliciorem allaturi, vt in quadraticis, haud infel iciter credimus præſtitiſſe.

Ad primum æquationis genus, quod attinet, in quo affectio eſt ſub latere tantum.

Proponitur æquatio cũ qua inſtituenda eſt cõparatio.

Si fuerit æquatio $a^3 * + d^2 a - g^3 = o$. Huius igitur conſtitutio ſuperiori modo ſic ſe habet. Sint duæ ęquationes $a^2 + b a + c^2 = o$, & $a - b = o$ multiplicatis inter ſe, fiet $a^3 \, {}^{c^2 - b^2}_{+ c^2} \, a - b c^2 = o$. Ex hypotheſi verò quod c^2 præſtet b^2 hæc erit natura perſimilis ſuperiori; facta itaque collatione terminorum, qui tertio ſunt loco habiti, erit $c^2 - b^2$, æquale d^2; quare ſi vera radix b cognoſcitur, conſtat c^2 æquale fore $d^2 + b^2$, quo ſubſtituto in locum ipſius c^2, cum prius eſſet $a^2 + b$ $a + c^2 = o$ erit vtique $a^2 + b a + d^2 + b^2 = o$. Hæc autem æquatio ad duas reliquas radices reſpicit cum vera radice b, concurrens ad efformandam propoſitam æquationem, Vltimis verò terminis inuicem collatis fiet $g^3 = b c^2$, quare c^2 æquabiur $\frac{g^3}{b}$; atqne cognita vera radice b, æquationem hanc $a^2 + b a + \frac{g^3}{b} = o$ ad duas quoque reliquas radices reſpicere, atque cum vera b, concurrere ad efformandam æquationem propoſitam ſit manifeſtum.

Æquatio, cuius conſtitutio per comparationem inſtituitur.

Si verò fuerit æquatio $a^3 * - d^2 a - g^3 = o$; eius conſtitutio ita ſe habet, ſint duæ æquationes $a^2 + b a + c^2 = o$, & $a - b = o$, multiplicatis adinuicem producitur æquatio $a^3 \, {}^{c^2 - b^2}_{+ c^2} \, a - b c^2 = o$. Ex hypotheſi autem, quod b^2, præſtet c^2, erit hæc natura perſimilis ſuperiori propoſitæ æquationi. Facta igitur mutua iſtarum duarum æquationum comparatione, collatiſque terminis vtriuſqne tertio loco habitis, erit $b^2 - c^2 = d^2$. Vnde deprehenditur c^2 eſſe æquale $b^2 - d^2$, quo ſubſtituto in locum ipſius c^2, cum priùs eſſet $a^2 + b a + c^2 = o$ erit vtique $a^2 + b a$ $+ b^2 - d^2 = o$. Hæc autem æquatio ad duas reliquas radices reſpicit cum vera b, concurrens ad efformandam propoſitam æquationem. Vltimis verò terminis inuicem collatis, fiet $g^3 = b c^2$ quare c^2 æquabitur $\frac{g^3}{b}$; cognita autem vera radice b æquationem hanc $a^2 + b a + \frac{g^3}{b} = o$ ad duas reliquas radices reſpicere fit manifeſtum.

Proponitur æquatio cum qua inſtituenda eſt comparatio.

Si fuerit aquatio $a^3 * - d^2 a + g^3 = o$, eius conſtitutio ſic ſe habet; fiant duæ æquationes $a^2 + b a - c^2 = o$, & $a - b = o$, multiplicentur inter ſe, vt fiat $a^3 \, {}^{-b^2}_{-c^2} \, a + b c^2 = o$. Hęc natura perſimilis eſt priori; facta igitur mutua earum comparatione, collatiſque terminis vtriuſque tertio loco poſitis, habebimus $b^2 +$ $c^2 = d^2$, vnde fit manifeſtum c^2 æquale eſſe $d^2 - b^2$, atque cognita vera radice b; hanc æquationem $a^2 + b a + b^2 - d^2 = o$, ad duas reliquas radices reſpicere. Vltimis verò terminis adinuicem collatis, habebimus $g^3 = b c^2$, atque adeo $c^2 = \frac{g^3}{b}$ quamobrem cognita vera radice b; fit manifeſtum hanc æquationem $a^2 +$ $b a - \frac{g^3}{b} = o$, à duabus reliquis radicibus concerni.

Summa ſupradictorum.

Et hæc eſt apud nonnullos ſupradictarum æquationum conſtitutionis ratio.

Supradictarũ æquationum apud auctorem conſtitutio.

Mihi prædictarum æquationum cubicarum longè aliter, & quidem per ſimpliciora procedens eſt conſtitutio per διαίρεσιν τῆς γραμμῆς ὀρθῆς.

Solidorum æquationum principia.

Sunt autem immediata ſolidi principia planum, & latus; cùm itaque nos inquiramus cubicarum æquationum conſtitutionem, atque adeo conſtitutiua; duo ſunt illa, quæ immediatè concurrunt, à nobis recognoſcenda primordia, at ſi recta diuidatur in partes, vtrumque fit obuium, illud multiplicatione partium, hoc verò diuiſione totius in partes.

Proponitur æquatio cuius conſtitutio inquiritur.

Si fuerit æquatio in qua cubus afficitur adiunctione ſolidi ſub latere, datoque coefficiente plano.

Suppoſitio duplex, & hæc ea proponitur quæ eſt amplior.

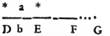
Sit recta quidem D F, vtcunque diuiſa in E, poteſt autem hypotheſis bifariam inſtitui, vel ſcilicet protracta D F, in G, itaut F G, ſit æqualis ipſi D E, & D F, dicatur a, atque F G, dicatur b. Quemadmodum ſuperiùs etiam dicebamus, cùm ageremus de huiuſmodi ratione indagandi æquationum primordia atque adeo naturam.

Vel ſupponendo D F, eſſe a, itemque b.

Quia

Quia tamen ſi ſupponatur eadem dici a; dicique b, adhuc a — b, æquabitur o, non minus quàm ſi b, foret diſtincta ab a, eadem verò currit demonſtratio; propterea ſecundam amplectemur hypotheſin.

D E eſt a, itemque b, foret etiam b, ipſa F G, rectangulum F D E, eſt c planum; rectangulum D E F, eſt c plan. — b^2.



Sit ergo recta D F, ſecta vtcunque in E, Manifeſtum eſt cubum ex D E, adauctum ſolido a plano D E F, in latus D E, æquari ſolido à plano F D E, in D E, latus.

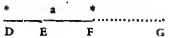
Si itaque D E, ſit radix; erit planum D E F, coefficiens planum ſublaterale; cum igitur cubus ex D E, plus ſolido à plano D E F, in D E, hoc eſt radicis cubus, plus homogeneo ſub latere, & coefficiente plano, æqualis ſit ſolido à plano F D E, in D E, latus, ſolidum à plano F D E, in D E, latus; erit homogeneum datæ menſuræ. Itaque D E, erit radix, cui cum æquetur ipſa D E, imo ſit eadem, erit D E, minus D E, æqualis o, nempe nihilo, vnde D E, erit radix vera, at coefficiens ſublaterale erit planum F D E, minus quadrato ex D E. Hinc addiſcimus differentiam duorum planorum, quorum vnum eſt quadratum à radice vera, alterum autem planum proueniens ex applicatione homogenei datæ menſuræ ad eandem veram radicem, eſſe in ęquatione de qua loquimur, planum coefficiens ſublaterale. Quamobrem ſi D E, fuerit a, itemque b, planum autem ortiuum iam dictum ſit c planum; homogeneum datę menſurę erit ſolidum, nempe b c planum; eſt autem a — b æqualis o; cùm a, æquetur b, & eadem quantas ſit a, itemque b, planum ortiuum eſt c planum, ſi ex c plano, auferatur b^2, prouenit c planum — b^2; in quod ſi ducatur a, fit ç planum a — b^2 a, quo addito ad a^3, nempe cubum eiuſdem a, fiet a^3 † c plano a — b^2 a, quod æquabitur ſolido à b in c planum, vnde oritur æquatio $a^3 \begin{smallmatrix} -b^2 \\ +c\ plan. \end{smallmatrix} a = b\ c$ plano, quod ſi c planum intelligatur ad quadratum redactum fiet æquatio $a^3 \begin{smallmatrix} -b^2 \\ +c^2 \end{smallmatrix} a = b\ c^2$. At facta comparatione inter poſitiuum, & negatiuum erit $a^3 \begin{smallmatrix} -b^2 \\ +c^2 \end{smallmatrix} a - b\ c^2 = o$.

Huius æquationis radix vera eſt b, nempe lateralis, altera plana, falſa, vt a^2 † b a † b^2. Vnde ſunt duæ æquationes vna vera altera impoſſibilis, a quarum mutuo ductu ſuperior oritur æquatio; eſt autem æquatio vera a — b = o at impoſſibilis eſt a^2 † b a † c^2 = o.

Si fuerit æquatio in qua cubus afficitur multa ſolidi ſub latere, datoque coefficiente plano, mihi per *διαιρεσιν τῆς γραμμης ορθῆς* conſtitutio ſic ſe habet. *Proponitur æquationis negatiua conſtitutio ab Auctore itidem inuenta.*

Sit recta quidem D F, vtcunque diuiſa in E poteſt autem hypotheſis bifariam inſtitui. Vel ſcilicet protracta D F, in G, itaut F G ſit æqualis ipſi D F, vnde hęc dicatur a, illa verò b,. Vel ſuppoſito, quòd D F, ſit a, eademque dicatur b; quia tamen in ſecunda hypotheſi adhuc a — b; æquatur o; nempe nihilo, non minus, quàm in prima, & eadem currit demonſtratio; propterea ſecundam hypotheſin amplectemur, ergo recta D F, ſecta ſit vtcunque in E; Manifeſtum eſt cubum ex D F, minus ſolido abs D F, in rectangulum D F E, ęquari ſolido abs D F, in rectangulum F D E.

D F, eſt a, itemque b, at etiam F G foret b, D F quadratum eſt b^2, & rectangulum F D E, eſt c pl. rectãgulum D F E eſt b^2 — c pl.



Si itaque D F, ſit radix, rectangulum D F E. erit planum coefficiens ſublaterale; Cùm igitur cubus ex D F minus ſolido abs D F, in rectangulum D F E, hoc eſt minus homogeneo ſub latere, & coefficiente plano, æqualis ſit ſolido à, plano F D E, in D F, latus, ſolidum à plano F D E, in D F, latus erit homogeneum datæ menſuræ. Itaque D F, erit radix; cui cùm ęquetur ipſa D F, imo ſit eadem, erit D F, minus

D F,

D F, æqualis o; nempe nihilo. Vnde D F erit radix vera, at coefficiens ſublaterale erit quadratum D F, minus rectangulo F D F. Hinc addiſcimns differentiam duorum planorum, quorum vnum, nempe maius eſt quadratum veræ radicis; at minus eſt planum proueniens ex applicatione homogenei datę menſuræ ad ipſam veram radicem in æquatione de qua loquimur eſſe coefficiens planum ſublaterale quamobrem ſi D F, fuerit a, itemque b; planum ortiuum iam dictum F D E, ſit c planum, homogeneum datæ menſuræ erit ſolidum, nempe b c planum; eſt autem a — b æqualis o; cùm a, æquetur b; eadem quantitas eſt a, itemque b, planum ortiuum eſt c planum; ſi ex b^2 auferatur c planum, prouenit b^2 — c plano in quod ſi ducatur a, fit b^2 a — c plano a, quo ſubtracto ex a^3, remanet a^3 — b^2 a † c pl. a; quod æquabitur ſolido abs b^2 in c planum, vnde oritur æquatio $a^3 \begin{smallmatrix}-b^2\\ +c\,pl.\end{smallmatrix} a = b$ c plano, quod ſi c planum intelligatur redactum ad quadratum, fiet ęquatio $a^3 \begin{smallmatrix}-b^2\\ +c^2\end{smallmatrix} a = b\,c^2$. Et facta comparatione inter poſitiuum, & negatiuum fiet $a^3 \begin{smallmatrix}-b^2\\ +c^2\end{smallmatrix} a - b\,c^2 = o$.

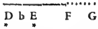
Huius æquationis radix vera eſt b, nempe lateralis, altera plana falſa, vt a^2 † b a † c^2. Vnde ſunt duæ ęquationes, vna vera, altera impoſſibilis, è quarum mutuo ductu ſuperior oritur æquatio, eſt autem æquatio vera a — b = o at impoſſibilis eſt a^2 † b a † c^2 = o.

Proponitur æquatio cubica ... ſitu, cum ... inquiritur.

Si fuerit æquatio in qua cubus negatur de homogeneo ſub latere, datoque coefficiente plano, nobis hæc eſt conſtitutio per διαιρεσιν τῆς γραμμῆς ορθῆς.

Sit recta D F, vtcunque ſecta in E, poteſt autem hypotheſis bifariam inſtitui, vel ſcilicet protracta D F, in G, itaut F G, ſit æqualis D E, vnde hæc dicatur a, illa verò b; Vel ſuppoſito, quòd D E, ſit a, eademque b; quia tamen in ſecunda hypotheſi adhuc a — b, æquatur o, nempe nihilo, non minus quàm in prima, & eadem currit demonſtratio, propterea ſecundam amplectemur hypotheſin.

D E, eſt a, itemque b, vt F G, æqualis ipſi D E, foret b, & rectangulum D E F, eſt c planum, rectangulum verò F D E, eſt b^2 † c plano,



Sit ergo D F, vtcunque ſecta in E; Manifeſtum eſt ſolidum ex D F, in quadratum D E, minus cubo eiuſdem D E, æquari ſolido abs D E, in rectangulum D E F; ſi itaque D E, ſit radix, rectangulum F D E erit planum coefficiens ſublaterale, cùm igitur ſolidum ex D E, in rectangulum F D E, minus cubo ipſius D E, æquale ſit ſolido ab eadem D E, in rectangulum D E F, ſolidum ab ipſa D E, in rectangulum D E F, erit homogeneum datæ menſurę. Itaque D E, erit radix, cui cùm æquetur ipſa D E, imo ſit eadem, erit D E, minus D E, æqualis o, nempe nihilo; quare D E, erit radix vera, & rectangulum F D E, coefficiens planum ſublaterale. Hinc addiſcimus planum proueniens ex applicatione homogenei datę menſuræ ad radicem, plus quadrato ex eadem vera radice eſſe, in æquatione de qua loquimur, coefficiens planum ſublaterale; quamobrem, ſi D E, fuerit a, itemque b, planorum aggregatum iam dictum erit rectangulum F D E, ſcilicet b^2 ✠ c plano; homogeneum datæ menſurę erit ſolidum, nempe b, c planum; eſt autem a — b æqualis o; cùm a, æquetur b, & eadem quantitas eſt a, itemque b, planum ortiuum eſt c planum, ſi b^2 addatur c plano, prouenit b^2 ✠ c plano, in quod ſi ducatur a, fit b^2 a ✠ c plano a, quo ſi auferatur a^3, remanebit b^2 a ✠ c plano a — a^3, quod æquabitur ſolido abs b in c planum, vnde oritur æquatio $a^3 \begin{smallmatrix}-b^2\\ -c\,pl.\end{smallmatrix} a = b$ c plano, quod ſi c planum intelligatur redactum ad quadratum erit $a^3 \begin{smallmatrix}-b^2\\ -c^2\end{smallmatrix} a = b\,c^2$, & facta comparatione inter poſitiuum, & negatiuum, fiet $a^3 \begin{smallmatrix}-b^2\\ -c^2\end{smallmatrix} a - b\,c^2 = o$.

Huius æquationis radix vera eſt b; nempe lateralis, altera plana, videlicet a^2 ✠ b a — c^2. Vnde ſunt duæ ęquationes, vna vera altera item poſſibilis, è quarum mutuo ductu ſuperior oritur æquatio, eſt autem æquatio vera a — b = o at item poſſibilis eſt a^2 ✠ b a — c^2 = o.

D[illegible] ... proponitur de æquationibus cubicis ... ſub quadrato

Cubicarum æquationum in quibus affectiones exiſtunt ſub quadrato natura, atque conſtitutio ex Zeteticis, aperitur.

Hucu-

Hucuſque agentes de æquationibus cubicis, naturam, atque conſtitutionem explicuimus ex Zeteticis, alijſque modis; at verò earum tantummodo in quibus affectiones exiſtunt ſub latere, nunc idem pręſtabimus, in conſtitutione earum, in quibus affectiones exiſtunt ſub quadrato, & primò quidem ex Zeteticis, deinde alijs, modis pręſertim eo, quem nos adinuenimus. *Quid deinceps agendum proponitur.*

Si ſit æquatio $a^3 + b a^2$. Sunt quatuor continuè proportionales, quarum prima minor inter extremas eſt b; differentia verò inter ſecundam, & quartam, eſt d. Fit autem a, differentia inter primam, & tertiam, quod cum Vieta ex Zetetico cognoſcemus. *Proponitur æquatio affirmatiua.*

Data prima minore inter extremas, & differentia inter ſecundam, & quartam in ſerie quatuor continuè proportionalium, reperire differentiam inter primam, & tertiam. *Zeteticum.*

Data ſit b; prima in ſerie quatuor continuè proportionalium, eademque minor inter extremas, differentia verò ſecundæ, & quartę ſit d, Oporteat reperire differentiam inter primam, & tertiam.

Quæſita differentiam eſto a; ergo tertia erit $a + b$; eſt autem vt a, ad d, ita b ad $\frac{bd}{a}$; ergo $\frac{bd}{a}$ erit ipſa ſecunda, cùm ſit vt differentia primæ, & tertiæ ad differentiam ſecundæ, & quartę, ita prima, ad ſecundam, At verò rectangulum ſub prima, & tertia, æquale eſt quadrato ſecundæ; proinde $b a + b^2$ rectangulum ſub prima, & tertia, ęquabitur $\frac{bbdd}{aa}$ nempe ſecundæ quadrato; omnia verò ducantur in a^2; & per b, diuidantur, & fiet æquatio $a^3 + b a^2 = b d^2$, quod priùs ordinabatur. *Explicatio.*

Sit æquatio $1C + 2Q = 288$. Sunt quatuor continuè proportionales, quarum prima minor inter extremas eſt 2; differentia verò inter ſecundam, & quartam eſt ℞ 144, hoc eſt 12; & ſit 1 R differentia primæ, & tertię, &c. ex ſerie proportionalium 2, 4, 8, 16. *Numeris ſuperiora tractantur.*

Si ſit æquatio $a^3 - b a^2 = b d^2$; Sunt quatuor continuè proportionales, quarum prima, maior, vel minor inter extremas eſt b, aggregatum verò ſecundę, & quartę eſt d, & ſit aggregatum primæ, & tertię ex Zetetico. *Proponitur æquatio negatiua.*

Data prima, & aggregato ex ſecunda, & quarta in ſerie quatuor continuè proportionalium, reperire aggregatum primæ, & tertiæ. *Zeteticum.*

Data ſit prima b, maior, vel minor inter extremas, aggregatum autem ex ſecunda, & quarta ſit d; in ſerie quatuor continuè proportionalium Oporteat reperire aggregatum ex prima, & tertia.

Huiuſmodi aggregatum ſit a, ergo tertia erit $a - b$; eſt autem, vt a ad d; ita b ad $\frac{bd}{a}$ quamobrem $\frac{bd}{a}$ erit ſecunda, cùm ſit, vt aggregatum primæ, & tertię, ad aggregatum ſecundæ, & quartæ, ita prima ad ſecundam; rectangulum verò ſub prima, & tertia ęquatur quadrato ſecundæ; quare erit, æquatio $b a - b^2 = \frac{bbdd}{aa}$ nempe rectangulum ſub prima b; & tertia $a - b$, hoc eſt $b a - a^2$, ęquabitur quadrato è ſecunda $\frac{bd}{a}$ hoc eſt $\frac{bbdd}{aa}$. Omnia ducantur in a^2 atque diuidantur per b, fiet æquatio $a^3 - b a^2 = b d^2$, quod prius ordinabatur. *Explicatio.*

Sit æquatio $1C - 2Q = 800$. Sunt quatuor continuè proportionales prima quarum inter extremas eſt 2; aggregatum autem ex ſecunda, & quarta eſt ℞ 400 id eſt 20, & ſit 1 R aggregatum primę, & tertiæ, ex ſerie proportionalium 2, 4, 8, 16, & quidem ſi 1 R valet 10, aggregatum ex prima 2, & tertia 8; eius cubus eſt 1000; a quo ſi ſubtrahatur 200; radicum pretium, remanet 800, comparationis homogeneum. *Numeris ſuperiora tractantur.*

Si ſit ęquatio $b a^2 - a^3 = b d^2$. Sunt quatuor continuè proportionales, quarum prima eſt maior inter extremas b; differentia verò ſecundæ, & quartæ eſt d, ſit autem a, differentia primę, & tertiæ ex Zetetico. *Proponitur æquatio ambigua.*

Data prima maiori inter extremas, & differentia ſecundæ, & quartæ in ſerie quatuor continuè proportionalium, reperire differentiam primæ, & tertiæ. *Zeteticum.*

Data ſit b, prima in ſerie quatuor continuè proportionalium eademque maior inter extremas differentia autem ſecundę, & quartę ſit d; Oporteat reperire differentiam primæ, & tertiæ.

Quæſita differenaia eſto a, itaque tertia erit $b - a$, vt autem eſt a ad d, ita *Explicatio.*

b, ad $\frac{bd}{a}$ ob id $\frac{bd}{a}$ erit ſecunda, cùm ſit vt differentia primæ, & tertię ad differentiam ſecuudę, & quartę: ita prima ad ſecundam; at verò rectangulum ſub prima, & tertia, ęquale eſt quadrato ſecundæ; proinde erit æquatio $b^3 - b\,a = \frac{bb\,dd}{aa}$. Omnia ducantur in a^2, & diuidantur per b; fiet æquatio $b\,a^2 - a^3 = b\,d^2$, & id ordinabatur,

Numeris explicantur ſuperius tradita

Sit æquatio $16\,Q - 1\,C = 576$. Sunt quatuor continuè proportionales, quarum prima maior inter extremas eſt 16; at differentia ſecundæ, & quartæ eſt ℞ $\frac{576}{16}$ id eſt 6, fit autem 1 R differentia primæ, & tertię ex ſerie proportionalium 16, 8, 4, 2

S C H O L I O N.

Aduertenda quædam.

Circa ſuperiùs dicta illud occurrit tantummodo conſiderandum, quod veluti demonſtratum aſſummebatur, nempe differentiam inter primam, & tertiam, ad differentiam, inter ſecundam, & quartam in ſerie quatuor continuè proportionalium, eſſe, vt prima, ad ſecundam, vel vt ſecunda ad tertiam, vel vt tertia ad quartam; vnde eſto.

T H E O R E M A.

Analyticè.

Differentia inter primam, & tertiam ad differentiam inter ſecundam, & quartam in ſerie quatuor continuè proportionalium, eſt vt prima ad ſecundam; atque adeo, vt ſecunda ad tertiam, & vt tertia ad quartam.

Sit prima a, ſecunda b, tertia erit $\frac{bb}{a}$, vt patet ex ſupra traditis, & quarta erit $\frac{b4}{aab}$ igitur ſunt in continua ractione, vt verò differentia inter primam, & tertiam eſt $\frac{bb}{a} - a$ ita quidem differentia inter ſecundam, & quartam eſt $\frac{b4}{aab} - b$, Oſtendendum eſt ita eſſe $\frac{bb}{a} - a$ ad $\frac{b4}{aab} - b$, vt a ad b. Quoniam enim ſi ſint proportionales $\frac{bb}{a} - a$; $\frac{b4}{aab} - b$; a, & b erit factum ſub extremis æquale facto ſub medijs; propterea $\frac{bb}{a} - a\,b$ ęquabitur $\frac{ab4}{aab} - a\,b$, at ita ſe habet, nam $\frac{bb}{a} - a\,b$ idem eſt quod $\frac{b3 - aab}{a}$ at verò $\frac{ab4}{aab} - a\,b$ idem eſt, quod $\frac{ab4 - aabb}{aab}$ ſunt autem $\frac{b3 - aab}{a}$ & $\frac{ab4 - aabb}{aab}$ inter ſe æqueles, huius enim numeratore, & denominatore diuiſo per a, fit $\frac{b4 - aabb}{ab}$, & diuiſione inſtituta per b fit $\frac{b3 - aab}{a}$ ſunt igitur ęquales $\frac{bb}{a} - a\,b$, & $\frac{ab4}{aab} - a\,b$, quare proportionales erunt hæ magnitudines videlicet, vt a ad b, ita $\frac{bb}{a} - a$, ad $\frac{b4}{aab} - b$. Quod nobis erat iniunctum demonſtrare.

Geometricè.

Sint continuè proportionales A, B, C, D. Dico eſſe differentiam inter A, & C, ad differentiam inter B, & D, vt A, ad B, &c. Quoniam enim A, B, C, D, ſunt ex hypotheſi proportionales, erit, [a] vt A, ad C, ita B ad D, proinde inuertendo [b] erit, vt C ad A, ita D ad B, itaque diuidendo, [c] vt C, minus A ad A, ita D, minus B, ad B, atque adeo, [d] vt C, minus A, hoc eſt differentia primę, & tertię ad D, minus B, id eſt differentiam ſecundæ, & quartæ; ita A, ad B, hoc eſt prima ad ſecundam, &c. ac proinde contra, vt B, ad A, ſecunda ad primam, ita erit D, minus B ad C, minus A, &c.

a 16. quinti.
b 4. quinti.
c 17. quinti.
d 16. quinti.



THEO-

THEOREMA.

IN ſerie quatuor continuè proportionalium, vt eſt prima, ad ſecundam, &c. ita aggregatum primæ, & tertiæ ad aggregatum ſecundæ, & quartæ.

SIt prima a, ſecunda b, tertia erit $\frac{bb}{a}$, & quarta $\frac{bbb}{aa}$ aggregatum ex prima, & tertia eſt a $+$ $\frac{bb}{a}$ aggregatum ex ſecunda, & quarta eſt b $+$ $\frac{bbb}{aa}$ vt autem eſt a, ad b, &c. ita eſt a $+$ $\frac{bb}{a}$ ad b $+$ $\frac{bbb}{aa}$, quod multiplicalione comdrobatur, multiplicatis enim exrremis, & medijs, fiunt producta æqualia, ducatur a in b $+$ $\frac{bbb}{aa}$ fit ab $+$ $\frac{abbb}{aa}$; hoc eſt a b $+$ $\frac{b^3}{a}$; ducatur b in a $+$ $\frac{bb}{a}$ fit a b $+$ $\frac{b^3}{a}$ ſunt ergo in eadem ratione. *Analyticè.*

SInt quatuor magnitudines A, B, C, D, continuè proportionales. Dico eſſe, vt prima ad ſecundam, vel vt ſecunda ad tertiam, vel vt tertia ad quartam ita, &c. Quoniam A, B, C, D, ſunt ex hypotheſi proportionales,[a] erit vt A, ad C, ita B, ad D, quare conuertendo,[b] vt C, ad A, ita D ad B, & componendo,[c] vt C, plus A, ad A, ita D, plus B, ad B, quare,[d] vt A, plus C, id eſt aggregatum primæ, & tertiæ ad B, plus D, hoc eſt aggregatum ſecundæ, & quartæ, ita A, ad B, prima ad ſecundam. Quod aportebat oſtendere. *Geometricè.*

a 16. quinti.
b 4. quinti.
c 18. quinti.
d 16. quinti.



Hoc numeris conſtat, ſi ſint enim continuè proportionales 2, 4, 8, 16, manifeſtum eſt eſſe 10, aggregatum primi, & tertij, ad 20, aggregatum ſecundi, & quarti, vt 2, ad 4, &c.

Alia etiam ratione huiuſmodi æquationum naturam apud quoſdam explorare licet.

Sit ęquatio $a^3 + d a^2 * - g^3 = o$. Multiplicetur hęc æquatio $a^2 + c a + b c = o$ per hanc $a - b = o$, vt producatur hęc; puta $a^3 \begin{smallmatrix}-b\\+c\end{smallmatrix} a^2 * - b^2 c = o$, ex hypotheſi verò, quod c, maior ſit quam b; hęc erit perſimilis priori, eiuſdem propterea naruræ; atque coſtitutionis; facta igitur mutua earum comparatione, & ſecundis vtriuſque terminis collatis, habebitur $c - b = d$; vel $c = d + b$. *Qua ratione earundem æquationũ natura inquiratur.* *Proponitur æquatio, cum qua inſtituenda eſt coparatio Æquatio affirmatiua.*

Proinde conſtat cognita vera radice b, æquationem $a^2 \begin{smallmatrix}+b\\+d\end{smallmatrix} a + b^2 + b d = o$, duas reliquas radices reſpicere. Vltimiſque terminis collatis, innoteſcit g^3 ęquari $b^2 c$ quare $\frac{g^3}{b^2}$ æquabitur c, itaque c, oritur ex applicatione g^3, ad quadratum radicis veræ, qua cognita, nempe b, conſtat æquationem $a^2 + \frac{g^3}{b^2} a + \frac{g^3}{b} = o$, duas reliquas radices reſpicere.

Vbi aduerte in locum eorum, quæ in æquatione $a^2 + c a + b c = o$, habentur, nempe c a, & b c, ſubrogari $b a + d a$, & $b^2 + b d$; illud fit ex a, in $b + d$, hoc autem ex b in $b + d$. *Aduertenda quadam.*

Sit æquatio $a^3 - d a^2 * - g^3 = o$. Multiplicetur $a^2 + c a + b c = o$ per $a - b = o$, vt fiat æquatio $a^3 \begin{smallmatrix}-b\\+c\end{smallmatrix} a^2 * - b^2 c = o$. Suppoſito autem quod b, maior ſit quàm c, erit initio propoſitæ ſimilis, eiuſdem proinde erit naturæ; atque conſtitutionis, facta igitur mutua earum comparatione, & ſecundis vtriuſque terminis collatis, habebitur $b - c = d$. *Proponitur æquatio, cum qua inſtituenda eſt cōparatio Æquatio eſt negatiua.*

Vnde conſtat c, æqualem eſſe $b - d$, & cognita vera radice b, æquationem hanc $a^2 \begin{smallmatrix}+b\\-d\end{smallmatrix} a + b^2 - b d = o$, duas reliquas radices reſpicere. Vltimis autem collatis terminis; fiet $g^3 = b^2 c$; Vnde ſequitur c. eſſe æqualem $\frac{g^3}{b^2}$, & ſi radix b, vera innotuerit, hanc æquationem $a^2 + \frac{g^3}{b^2} a + \frac{g^3}{b} = o$ duas reliquas radices reſpicere.

Digitized by Google

Aduertenda quædam.

Vbi aduerte in locum eorum, quæ in æquatione $a^2 + ca + bc = 0$ habentur, nempe ca, & bc, ſubrogari $ba - da$, & $b^2 - bd$. Illud fit ex a in $b - d$ hoc autem ex b, in $b - d$.

Proponitur æquatio cum qua ineunda eſt comparatio eſt aute æquatio affirmatiua.

Sit æquatio $a^3 - da^2 + g^3 = 0$ Multiplicetur $a^2 - ca - bc = 0$ per $a - b = 0$, vt fiat æquatio $a^3 \begin{smallmatrix}-c\\-b\end{smallmatrix} a^2 * b^2 c = 0$. Hæc erit initio propoſitæ perſimilis, eiuſdem propterea naturæ, atque conſtitutionis, facta igitur mutua earum comparatione, & vtriuſque ſecundis terminis collatis, habebitur $c + b = d$.

Hinc autem addiſcimus c, æqualem eſſe $d - b$, & ſi vera radix b, innotuerit, hanc æquationem $a^2 \begin{smallmatrix}-b\\-d\end{smallmatrix} a - b^2 - bd = 0$ duas alias radices concernere. Vltimis verò terminis comparatis, habetur $g^3 = b^2 c$, vnde ſequitur c, æquale eſſe $\frac{g^3}{b^2}$, & cognita vera radice b, hanc æquationem $a^2 - \frac{g^3}{b^2} a - \frac{g^3}{b} = 0$ reliquas duas radices reſpicere.

Aduertenda quædam.

Vbi aduerte in locum eorum, quæ in æquatione $a^2 - ca - bc = 0$ habentur, nempe ca, & bc, ſubrogari $da - ba$, & $-b^2 - bd$. Illud fit ex a, in $d - b$ hoc autem ex b, in, &c.

Quæ nos hac in re excogitauimus ita ſe habent, & primò.

Ratio explicandi prædictarum æquationum naturam quam Auctor adinuenit.

Sit æquatio, in qua cubus afficitur adiunctione ſolidi ſub quadrato, dataque coefficiente longitudine.

Sit recta DF, vtcunque ſecta in E, poſſet autem inſtitui hypotheſis eadem protracta, vt crementum fit æquale ipſi DE, ſed, ob eas, quas attulimus cauſas, prima erimus hypotheſi contenti. Sit igitur, vt diximus DF, ſecta in E, Manifeſtum eſt cubum ex DE, plus ſolido ab eiuſdem quadrato in EF, eſſe æqualem ſolido, à quadrato eiuſdem DE, in DF; Si itaque DE, ſit radix, & EF, coefficiens ſubquadratica, cùm cubus ex DE, plus ſolido à quadrato eiuſdem in EF, nempe cubus radicis, plus homogeneo ſub quadrato, & coefficiente longitudine, æqualis ſit ſolido à quadrato ipſius DE, in DF, proinde ſolidum à quadrato DE, in longitudinem DF, erit homogeneum datæ menſuræ.

DE, eſt a, itemque b, at DF, eſt c, & EF eſt c — b.

```
*   a   *
-----------------
D b  E    c—b  F
*     c        *
```

Itaque DE, erit radix vna, cui cum æquetur DE, imo ſit eadem, propterea DE, minus DE, æquabitur o, nempe nihilo; Vnde DE, erit radix vera; differentia autem inter DE, & DF, nempe EF, erit coefficiens longitudo. Hinc addiſcimus differentiam prædictam in æquatione de qua loquimur eſſe coefficientem longitudinem, atque cognita vera radice DE, per additionem ipſius coefficientes longitudinis EF, fieri cognitam DF, & contra cognita DF, per ſubtractionem eiuſdem coefficientis longitudinis fieri cognitam veram radicem DE; Comparationis autem homogeneum eſſe ſolidum factum à quadrato verę radicis DE, in ipſam DF.

Hin etiam deprehendimus DF, oriri ex applicatione homogenei comparationis, ad quadratum veræ radicis, &c.

Itaque ſi DE, ſupponatur a, itemque b; at verò DF, dicatur c, vt EF, ſit $c - b$; proueniet æquatio, $a^3 \begin{smallmatrix}-b\\+c\end{smallmatrix} a^2 * = b^2 c$, quod ſi placet fieri comparationem inter poſitiuum, & negatiuum; erit $a^3 \begin{smallmatrix}-b\\+c\end{smallmatrix} a^2 * - b^2 c = 0$. Vbi aduerte ex hypotheſi, quòd c, ſit maior, quàm b, per additionem $+c$, ad $-b$, fieri ęquationem affirmatiuam, &c.

Proponitur æquatio negatiua.

Sequitur æquatio in qua cubus afficitur multa ſolidi ſub quadrato, dataque coefficiente longitudine.

Sit recta DF, ſecta in E, & quamuis poſſet aliter inſtitui hypotheſis, vt in ſuperioribus vidimus, hic eam adhibebimus, in qua radix vera, duplici ſymbolo inſignitur, vt diximus ſit DF, ſecta in E, Manifeſtum eſt cubum ex DF, minus ſolido à quadrato ipſius DF, in EF, longitudinem, eſſe æqualem ſolido ab eodem quadrato

DE, eſt a, itemque b, at DE, eſt c, & EF, eſt c — b.

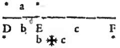
```
*      a      *
-----------------
D c E   b—c   F
*        b     *
```

drato DF, in DE, ſi itaque DF; ſit radix, & EF, coefficiens longitudo ſubquadratica, cùm cubus ipſius DF, minus ſolido à quadrato eiuſdem, in EF, nempe cubus radicis, minus homogeneo ſub quadrato, & coefficiente longitudine, æqualis ſit ſolido à quadrato eiuſdem DF, in DE; Solidum à quadrato DF, in DE, erit homogeneum datæ menſuræ. Itaque DF, erit radix vna, cui cum æquetur DF, imo ſit eadem, propterea DF, minus DF, æquabitur o, nempe nihilo. Vnde DF, erit radix vera, differentia autem inter DF, & DE, nempe EF, erit coefficiens longitudo. Hinc addiſcimus differentiam prædictam in æquatione de qua loquimur eſſe coefficientem longitudinem. Atque cognita vera radice DF, per ſubtractionem ipſius coefficientis longitudinis EF, fieri cognitam DE; & contra per additionem eiuſdem coefficientis longitudinis ad DE, fieri cognitam veram radicem DF, innoteſcit quoque comparationis homogeneum eſſe ſolidum factum à quadrato veræ radicis DF, in ipſam DE. Hinc etiam deprehendimus DE, oriri, ex applicatione homogenei comparationis, ad quadratum veræ radicis, &c. Itaque ſi DF, ſupponarur a, itemque b, at verò DE, dicatur c, vt EF, ſit b — c proueniet æquatio $a^3 \, {}^{-b}_{+c} \, a^2 * = b^2 c$, quod ſi placet fieri comparationem inter poſitiuum, & negatiuum, erit $a^3 \, {}^{-b}_{+c} \, a^2 * - b^2 c = o$. Vbi aduerte, ex hypotheſi, quod b, ſit maior quàm c, per additionem ✠ c ad — b, fieri æquationem negatiuam.

Sequitur tandem æquatio, in qua ſolidum ſub quadrato, dataque coefficiente longitudine afficitur multa cubi. *Frotonitur æquatio amphibola*

Sit recta DF, ſecta in E, manifeſtum eſt ſolidum, à quadrato DE, in DF, minus cubo eiuſdem DE, æquale eſſe ſolido à quadrato eiuſdem DE, in EF; Si itaque DE, ſit radix, & DF, coefficiens ſubquadratica, cùm ſolidum à quadrato DE, in DF, minus cubo eiuſdem DE, nempe homogeneum ſub quadrato, & coefficiente longitudine, minus cubo ipſius DE, æquale ſit ſolido à quadrato eiuſdem DE, in EF; ſolidum à quadraro DE, in EF, erit homogeneum datæ menſuræ, itaque DE, erit radix vna, cui cùm æquetur DE, imo ſit eadem, propterca DE, minus DE, æquabitur o, nempe nihilo. Vnde DE, erit radix vera. Aggregatum autem ex DE, & EF, nempe DF, erit coefficiens longitudo. Hinc addiſcimus aggregatum prædictum in æquatione de qua loquimur eſſe coefficientem longitudinem; atque cognita vera radice DE, per additionem ipſius EF, fieri cognitam DF, &c. Innoteſcit quoque comparatiouis homogeneum eſſe ſoliduim factum à quadrato veræ radicis DE, in EF. Hinc etiam deprehendimus EF, or ri ex applicatione comparationis homogenei, ad qnadratum veræ radicis. Itaqueeſi DE, ſupponatur a, eademque b, at verò EF, dicatur c, & DF ſit b ✠ c prouiniet æquario $a^3 \, {}^{-b}_{-c} \, a^2 * = b^2 c$; quod ſi placet fieri comparationem inter poſitiuum, & negatiuum, erit $a^3 \, {}^{-b}_{-c} \, a^2 * - b^2 c = o$.

DE, eſt a, itemque b, & EF, eſt c, atque DF, eſt b † c.



S C H O L I O N.

IN alijs æquationum generibus non abſimili modo procedendum erit, vt earum natura, atque conſtitutio comparetur, qua de re multi doctiſſimè ſcripſerunt, quos adire iuuabit Artificioſè igitur inquiritur natura, atque conſtitutio æquationum trium dimenſionum ſecundo, vel tertio, vel nullo termino carentium; & quidem tertio, vt $a^3 ✠ d a^2 * - g^3 = o$. *&c. Vel ſi placet alias adhibere ſpecies, vt in vſu iam quibuſdam poſitis, vti liceat pro æquationum radicibus, ita ſe habebit æquatio* $a^3 ✠ l a^2 * - n^3 = o$. *Inſuper* $a^3 - l a^2 * - n^3 = o$, *demum in ordine harum erit* $a^3 - l a^2 * ✠ n^3 = o$.

Inſinuatur ſimilibus modis procedendum eſſe in diſquirenda natura cæterarũ æquationum.

Si fuerit $a^3 ✠ l a^2 * - n^3 = o$. *Perficietur, vt diximus. Ducatur* $a^2 ✠ c a ✠ b c = o$ *in* $a - b = o$, *fit* $a^3 \, {}^{-b}_{+c} \, a^2 * - b^2 c = o$. *Ex hypotheſi autem, quod c, ſit*

maior

maior quàm b, perſimilis erit propoſita; atque adeo eiuſdem erunt naturæ; atque conſtitutionis, facta mutua earum comparatione, ſecundiſque terminis inuicem collatis, reperiemus $c - b$ *æquari l; ſiue c, æquari* $l + b$. *Vnde cognita vera radice b; fit manifeſtum æquationem* $a^2 \begin{smallmatrix}+b\\+l\end{smallmatrix} a + b^2 + bl = 0$ *duas reliquas concernere radices, & vltimis collatis terminis, conſtat* n^3 *æquari* $b^2 c$; *vnde fit vt c, æquetur* $\frac{n^3}{b^2}$ *atque cognita radice b, æquationem hanc* $a^2 + \frac{n^3}{b} a + \frac{n^3}{b} = 0$ *duas reliquas radices reſpicere.*

Proponitur æquatio negatiua. *Si verò fuerit* $a^3 - la^2 * - n^3 = 0$. *Ducatur* $a^2 + ca + bc = 0$ *in* $a - b = 0$, *fiet* $a^3 \begin{smallmatrix}-b\\+c\end{smallmatrix} a^2 * - b^2 c = 0$. *Ex hypotheſi verò, quod b, ſit maior quàm c; hæc perſimilis erit propoſitæ, atq; adeo eiuſdem erunt naturæ, atque conſtitutionis; facta proinde mutua earum comparatione, ſecundiſque terminis inuicem collatis, habebimus* $b - c = l$. *Vnde fit manifeſtum c, eſſe æqualem* $b - l$, *atque cognita vera radice b; hanc æquationem* $a^2 \begin{smallmatrix}+b\\-l\end{smallmatrix} a + b^2 - bl = 0$ *duas reliquas radices concernere. Vltimiſque terminis collatis, perſpicuum fit* n^3, *æquari* $b^2 c$, *vnde conſtat c, eſſe æqualem* $\frac{n^3}{b^2}$, *& cognita vera radice b; hanc æquationem* $a^2 + \frac{n^3}{b^2} a + \frac{n^3}{b} = 0$ *duas reliquas reſpicere radices.*

Proponitur æquatio amphibola. *Si fuerit* $a^3 - la^2 * + n^3 = 0$. *Ducatur æquatio* $a^2 - ca - bc = 0$ *per hanc* $a - b = 0$, *vt producatur* $a^3 \begin{smallmatrix}-c\\-b\end{smallmatrix} a^2 * + b^2 c = 0$, *hæc erit propoſita perſimilis, atque adeo eiuſdem erunt naturæ atque conſtitutionis; facta mutua earum comparatione, ſecundiſque terminis inuicem collatis, reperiemus,* $c + b$ *æquari l; vnde conſtat c, æquari* $l - b$ *& ſi vera radix b, cognita fuerit, innoteſcit æquationem* $a^2 \begin{smallmatrix}-b\\-l\end{smallmatrix} a - b^2 - bl = 0$ *ad duas reliquas radices reſpicere. Atque vltimis terminis inuicem collatis; habebimus* $n^3 = b^2 c$, *vnde conſtat c æquari* $\frac{n^3}{b^2}$ *atque cognita vera radice b; æquationem hanc* $a^2 - \frac{n^3}{b^2} a - \frac{n^3}{b} = 0$, *ad duas reliquas radices inueniendes referri.*

Cùm autem æquatio fuerit cubica, ſiue trium dimẽſionum ſeptem quidem modis variari poteſt; propter totidem affectionum variationem per ſigna +, & —. Vt ſi fuerit $a^3 - la^2 + m^2 a - n^3 = 0$. *Huius quidem natura inquiritur inſtituta multiplicatione inter* $a^2 - ea + d^2 = 0$, *&* $a - b = 0$. *Hinc enim prouenit æquatio* $a^3 \begin{smallmatrix}-b\\-e\end{smallmatrix} a^2 \begin{smallmatrix}+d^2\\+be\end{smallmatrix} a - bd^2 = 0$ *quæ eiuſdem eſt naturæ cum propoſita; ac proinde eiuſdem conſtitutionis. Inſtituta autem comparatione inter ipſas, collatiſque terminis ſecundis vtriuſque, fit* $b + e = l$ *ſeu* $e = l - b$, *& ex comparatione terminorum, qui tertio ſunt loco, fit* $d^2 + be = m^2$, *&c. atque conſimili modo, & huius, & cæterarum huius ordinis indagatur natura.*

Supradictarum imitatione cæterarum æquationum indagatur natura. *Ad horum imitationem inquirenda eſt natura æquationum quadratoquadraticarum, ſeu quatuor dimenſionum; ſiue in iis ſecundus, & tertius terminus deſit, ſiue tertius, & quartus, ſiue ſecundus, ſiue quartus, ſiue tertius tantùm; ſiue nullus terminus deſit, &c. De his tamen conſulere iuuat alios, qui cumulatè, atque diſertè hac de re locuti ſunt; nobis enim ſufficit, & aliorum modos retuliſſe, pro ſuperioribus æquationibus, & noſtram methodum tradidiſſe pro iiſdem; ſiquidem ex iis, haud obſcurè conſtabit, quid in reliquis agendum ſit, vt earum natura comparetur, atque primordia explicentur. Vt ergo ſuperiùs diximus; Alia præter hæc æquationum genera perſcrutari licet non diſſimili arte ad earum indagandam naturam. Vnde extant etiam æquationes cubicæ, ſeu trium dimenſionum in quibus nullus terminus deeſt, inſuper æquationes quatuor dimenſionum, cuiuſmodi ſunt quadrato-quadraticæ, ſiue ſecundo, tertio termino, ſiue tertio, & quarto, ſiue ſecundo tantùm, ſiue quarto, ſiue tertio tantùm, ſiue nullo careant, quarum naturam explorare, tum methodis, quas, ex aliis tradidimus, cùm etiam, ea, quam nos proprio marte adinuenimus operoſum non erit diligenter notatis iis, quæ hactenus enarrauimus, ac explicuimus.*

Non abſimili modo aliarum æquationum indagatur natura.

Supereſt modo, vt perpendamus vlteriùs, ſi quæ alia eſt ratio inquirendi ipſarum æquationum naturam, quod in ſequentibus præſtare conabimur.

Alia

Alia traduntur, vnde licet Artifici, æquationum conſtitutionem, atque naturam indagare.

CAPVT XVIII.

Quibus modis præter ſupradicta liceat æquationum indagare naturam, et earundem æquationum primordia.

PRęſtat hìc primùm diſſerere de tranſmutandis æquationibus; & quidem hoc bifariam perfici poſſe, aliàs monuimus, vel nimirum alterata, vel inuariata radice, Alteratio plurifariam contingit, atque adeo radix de qua quæritur pluribus modis noua poteſt ſpecie exhiberi. Primò fit per additionem; Secundò per ſubtractionem, Tertiò per multiplicationem; Quartò per diuiſionem, Quintò per analogiam rationis, vt aiunt explicatæ, Sextò per analogiam rationis implicitę; Septimò per parabolicam hypoſtaſin, & iterum in ſequentibus de huiuſmodi tranſmutatione ſermo redibir. Illud verò non prætetibo, nempe quomodocumque huiuſmodi alteratio perficiatur, inter radiçem primariam, & nouam, dari notam differentiam, vel rationem, itaut vna cognita, altera nequeat ignorari.

Primum proponitur.

Si primùm oporteat eam, quam dicebamus primam alterationem per additionem inſtituerę, ita procedendum. Sit radix a, additione alteranda, ei addatur b, vt fiat $a + b$; At verò $a + b$ eſto e, quare $e - b$ erit a; Si itaque cognoſcamus magnitudinem e, cùm nota ſit magnitudo b; non poterit quidem ignorari primæua radix a; Vt ſi b, fuerit 4, & cognoſcamus e, eſſe 12, illico innoteſcet a; foret enim $e - b$, nempe 8; In huiuſmodi autem opere, radix alterata, quæſititia conceditur eſſe æqualis alteri inquirendæ, ex hac enim conceſſione nouam induit ſpeciem, ſub qua æquatio primò poſita dirrigitur, ac ordinatur; vt ſi propoſita foret ęquatio $a^2 =$ z plano. Dicemus $a + b$ eſſe e, quoniam autem a^2 conceditur ęquari z plano, & $a + b$ ęquatur ipſi e, propterea $e - b$, æquabitur a; hinc noua ordinabitur æquatio hunc in modum. Quadratum ex $e - b$; æquabitur z plano; at huiuſmodi quadratum eſt $e^2 - 2be + b^2$, quare fiet ęquatio $e^2 - 2be + b^2 =$ z plano, & per antitheſin fiet $e^2 - 2be =$ z plano $- b^2$; Si placet adhibere z^2, loco ipſius z plani, proueniet $e^2 - 2be = z^2 - b^2$.

Prima alteratio radicis.

Alteratur æquationis radix modo iam explicato, itaque dicimus $a + b$ eſto e, ergo $e - b$, æquabitur a; hac autem conceſſione, atque argumentatione, vt vides radix alteratur, & noua quadam exhibetur ſpecie, & hic primus eſt modus.

Secunda alteratio radicis.

Secundus per ſubtractionem fiet alteratio radicis hac conceſſione, & argumentatione, Sit radix a; cui ſubducatur b; vt fiar $a - b$; at verò $a - b$, eſto e, ergo $e + b$ erit a; Vbi vides ſubtrahendo b, ab a, primæuam ipſam radicem a, alterari, & noua quidem ſpecie exhiberi.

Tertia alteratio radicis.

Tertiò poteſt etiam radix alterari per multiplicationem hac ſcilicet conceſſione, & argumentatione, b a, eſto e planum; ergo $\frac{e \text{ planum}}{b}$ erit a; Vides igitur qua arte radix, per multiplicationem, alterationem ſubeat; Si enim concedatur b a eſſe e planum, hoc vtique applicato ad b; fit $\frac{e \text{ planum}}{b}$, & ortiua magnitudo fiet a; hoc enim pacto, magnitudo ortiua ducta in metientem magnitudinem, facit magnitudinem applicatam.

Si verò loco ipſius e plani, ſymbolum quis adhibeat e^2, nempe accepta ſpecie pro genere, expeditiùs pragmatiam inſtituet; vnde dicetur b a, eſto e^2, ergo $\frac{e^2}{b}$ erit a.

Quarta alteratio radicis.

Quartò per diuiſionem quoque radix alteratur, hac ſcilicet conceſſione, & argumentatione $\frac{a \text{ planum}}{b}$ eſto e; ergo b e erit a planum; ſi enim a planum applicetur ad b,

quod

quod fit $\frac{a\ planum}{b}$ dicatur e; manifeſtum eſt ortiuam magnitudinem ductam in metientem, debere efficere magnitudinem applicatam, quare b e, factum ex b in e, erit a planum.

Notanda quædam.

Hìc etiam licet, loco ipſius a plani, adhibere a^2, vt ſit $\frac{a^2}{b}$ idem, quod $\frac{a\ planum}{b}$, vnde dicetur $\frac{a^2}{b}$ eſto e, ergo b e erit a^2.

Quinta alteratio radicis.

Quintò per analogiam explicatæ rationis, hoc pacto concedendo nimirum eſſe, vt b, ad g, ita a, ad e, deinde analogiam reſoluendo, & arguendo $\frac{eb}{g}$ erit a, quandoquidem ſi ſint quatuor latera proportionalia, quorum ſcilicet primum ſit ad ſecũdum, vt tertium, ad quartum, ſiuè ſint in proportione continua, ſiuè non, & rectangulum factum ſub extremis, applicetur ad ſecundum ex eadem ſerie; magnitudo ortiua eſt latus tertium in eadem ſerie. Vt ſi ſint 12, 6, 4, 2; & 24, numerus factus mutua multiplicatione 12, in 2, diuidatur per 6, terminum ſecundum, ſit quotiens 2, qui eſt tertius terminus eiuſdem ſerie.

Sexta alteratio radicis.

Sextò per analogiam rationis implicitæ, vt ſi concedatur eſſe vt a, ad b; ita g, ad e, deinde reſoluatur analogia, & arguatur; ergo $\frac{bg}{e}$ erit a; Quandoquidem ſi fuerint, quatuor latera proportionalia, factum autem ſub medijs, applicetur quarto orietur primum, cùm igitur ſint quatuor proportionalia a, b, g, e, factum ſub medijs, eſt b g; quare ſi applicetur quarto e, orietur primum a.

Septima alteratio radicis.

Septimò alteratio radicis fit per parabolicam hypoſtaſin in quibuſcuuque ęquationum generibus, vtpatote in quadraticis æquationibus concedendo e^2 ✠ ac æquari d plano; quæ quidem æquatio eſt quadrati affecti affirmatè; mox arguendo $\frac{d\ planum - e^2}{e}$ erit a; Vel concedendo $e^2 - a\,e$ æquari d plano; quæ æquatio dicitur quadrati affecti negatè, & arguendo ergo $\frac{e\,e - d\ plano}{e}$ æquabitur a; Hæc autem operatio ea ratione perficitur; quia cùm fuerit e^2 ✠ a e = d plano, per antitheſin fiet a e = d plano — e^2, cùm autem factum ex a in e, æquetur d plano — e^2; ſi hoc fuerit applicatum ad vnum ex illis lateribus, orietur alterum; quare ſi applicatum fuerit ad e, orietur a; vnde $\frac{d\ planum - e^2}{e}$ æquabitur a.

Quod ſi concedatur $e^2 - a\,e$ æquari d plano; per antitheſin fiet e^2 = d plano † a e, rurſus e^2 — d plano = a e; At ſi factum ex a in e, æquatur e^2 — d plano hoc applicato ad vnum ex illis, aliud orietur, quare ſi applicetur e^2 — d plano, ad e orietur a, propterea $\frac{e\,e - d\ plano}{e}$ æquabitur a.

Altera radicis alteratio.

Tandem fit radicis alteratio concedendo a e — e^2 ęquari d plano; quæ quioem æquatio eſt plani ſub larere de quo negatur quadratũ, & arguẽdo ergo $\frac{e\,e - d\ plano}{e}$ æquabitur a; Cum enim a e — e^2 æquetur d plano, ergo a e æquabitur d plano † e^2 at verò factum ex a in e, æquatur d plano † e^2 propterea hoc applicato ad vnum ex illis, alterum oriatur neceſse eſt, vt ſuperiùs dicebatur, quare $\frac{d\ planum + e\,e}{e}$ ęquabitur a.

Obſeruanda quædam.

Cęterum obſeruandum eſt, quamcumque ſpeciem induat a; æquationem iuxra eam eſſe transformandam; atque nouam de e, quidem ordinandam, itaut ſi quæ enunciantur de a; in propoſita æquatione, eadem enunciari debeant de noua illa ſpecie, quam a, quidem induit, & in quam eſt transformata.

Alteratio radicis per additionem.

Alteratur a, per additionem fingendo nimirum a ✠ b eſſe e, & hic eſt primus tranſmutandi modus, ex ſuperiùs allatis; erit ob id e — b, idem, quòd a; cum ergo creabitur par poteſtas, ab e — a; quæ procreabatur ab a; ſimiliſque parodici gradus (vt inferiùs exemplis manifeſtum fiet) in quos ducantur coefficientes inuariandę; ad efficienda eadem affectionum homogenea; huiuſmodi facta æquabuntur omnino propoſito homogeneo, & procedendo iuxta Artis præcepta; de e; ordinetur æquatio; erit enim ęquatio traſmutata in nouam, enunciandam de e; hoc eſt ipſa a, producta cremento b.

Explicatio ſuperadditionem.

Supponatur a^2 æquari z plano: alteretur a per additionem fingendo a ✠ b, eſſe e; & e — b, fieri a. At verò ab a, creatur, poteſtat a^2; par autem poteſtas creabitur ab e — b, nimirum e^2 — 2 b e ✠ b^2, & tam hoc quadratum, quàm illud æquabitur z plano, & per antitheſin fiet e^2 — 2 b e = z plano — b^2, & ita ęquatio illa primaria tranſmutata eſt in nouam, enunciandam de e, hoc eſt ipſa a, producta cremento b; & hoc alijs in modis locum habet.

Æquationes tranſmutantur alterata radice.

Æquationes alterata radice tranſmutantur, vt vidimus, idem autem perficitur

ipſamet

ipſamet radice omnino inuariata, de quo nunc diſſerendum.

Eſt autem ipſius æquationis tranſmutatio, quæ fit inuariata radice, nil aliud quàm graduum in eadem æquatione depreſſio, quæ alioquin Græcè diceretur ὑποβιβασμὸς vel elatio, & Græcè ἀναβιβασμὸς; adeo vt inuariata radice æquationem ipſam tranſmutare nil aliud ſit, quàm eiuſdem æquationis gradum deprimere, vel attollere; fit igitur quidam deſcenſus, vel aſcenſus.

Traſmutatio, quæ fit inuariata radice.

Aſcenſus autem, vel deſcenſus climacticus, ſiue ſcalaris duplex, regularis videlicet, & irregularis.

Aſcenſus, vel deſcenſus climacticus duplex eſt.

Regularis fit climacticus aſcenſus, cùm vtraque pars æquationis propoſitæ ordinatè diſtributa ducitur quadraticè, cubicè, & vlteriùs climacticè.

Regularis aſcenſus climacticus.

Deſcenſus verò climacticus regularis eſt, cùm vtraque propoſitæ, æquationis pars ordinatè diſtributa diuiditur, ſubquadraticè, ſubcubicè, atque depreſſiùs ſubclimacticè ad id videlicet adſcito dato, vel inquirendo ſupplemento, multiplicatione, vel applicatione facta, omnia congruè ordinantur. Hæc autem exemplis illuſtrare iuuabit,

Deſcenſus regularis climacticus.

Si $a^2 + ba$ æquetur z pl. per antitheſin a^2, æquabitur z pl. $- ba$ ducatur vtraque æquationis pars quadraticè, a^4 æquabitur z pl. pl. $- 2b$ z plano $a + b^2a^2$, recipit autem interpretationem affectio illa b^2a^2 ex æquatione propoſita, vt inferiùs dicetur; propterea $a^4 + \overline{b^2 + 2b \text{ z pl.}}\, a$ æquabitur z planó plano $+ b^2$ z pl.

Proponitur æquatio.

De his tamen rurſus infra ſermo redibit.

De his infra ſermo redibit.

Irregularis autem aſcenſus fit, cum omnia ſingularia homogenea, quibus propoſita conſtat æquatio in eundem parodicum gradum ducuntur, ſiue purum, ſiue affectum à datis congruentibus magnitudinibus, vel eas etiam afficientem, atque ducta congruam interpretationem, & ordinationem accipiunt. Id autem exemplo hunc in modum illuſtrabimus.

Aſcenſus climacticus irregularis.

Si $a^2 + ba$ æquatio z pl. fiet æquatio per antitheſin $a^2 =$ z pl. $- ba$; omnia ſi ducantur in a fiet $a^3 =$ z pl. $a - ba^2$; ſed hac de re iterum inferiùs.

Proponitur æquatio.

Deſcenſus fit cum omnia illa ſingularia homogenea applicantur; ſiue ad quæſititiam radicem, ſiue ad gradum radicis poteſtate inferiorem, vel purè, vel cum afficientibus, vel cum affectis datis magnitudinibus congeneribus; hoc eſt eiuſdem generis; & diuina ad id ſcilicet adcito ſupplemento dato, vel inquirendo congruam interpretationem, ac ordinationem accipiunt; hac tamen omnia faciliùs exemplis infra à nobis in medium afferendis, intelligentur.

Deſcenſus climacticus irregularis.

Huc ſpectat πλάσις; vnde πλαστικὸς locum habet, vtile quidem πλάσμα eſt, & hac in re non inconſultò Analyſta τὸν πλασματίαν adibit; vt nimirum inquirat æquationum naturam.

Plaſmaticum opus declaratur.

Æquationibus autem πλάσμα, ineſſe nos intelligimus, cùm poteſtates affectæ à puris, vel à minus affectis, æquè tamen altis, vel etiam altiores à depreſſioribus deducuntur, itaque huic æquationi $e^2a - 2be =$ z pl. $- b^2$; πλάσμα ineſt, cùm ab hac pura deducatur æquatione $a^2 =$ z pl. inſuper huic $e^3 + 3be^2 =$ z ſol. $+ 2b^3$; cùm ab hac deducatur $a^3 - 3b^2a =$ z ſol. inſuper huic $a^4 + \overline{b^2 + 2b \text{ z pl.}}\, a =$ z pl. pl. $+ b^2$ z pl.

Æquationes, quibus plaſma ineſt.

Plaſma ineſt, quoniam deducitur ab ea $a^2 + ba =$ z plano. Huius operationis præcipuus finis eſt, vt cognitæ æquationes plaſmaticæ, in ſimpliciores, à quibus eductæ ſunt, reſoluantur, per omnes autem modos inſtitui poteſt, quibus nimirum æquationum tranſmutatio fit diuiſione excepta, atque etiam climactico deſcenſu.

Quæ de cauſa æquationibus plaſma inſit.

Oportet autem aduertere, ſi aliqua poteſtas, affecta eſt, vel afficit ſub ſingulis gradibus, ad eam parodicis plaſmaticam eſſe per modum additionis, vel ſubtractionis; quandoquidem radix intelligitur affecta fuiſſe, cremento, vel decremento deſumpto ex coefficiente ſub gradu altiori ſecundum poteſtatis conditionem, atque naturam, Vt ſi ſit æquatio $e^2 + 2be =$ z pl. $- b^2$, plaſmatica eſt per modum ſubtractionis; intelligitur enim radix affecta fuiſſe decremento quidem deſumpto ex dimidia coefficiente b; prout quadratum expoſcit; ſic etiam in alijs quadratis, &c.

Aduertenda quædam quando æquatio plaſmatica eſt per modum additionis vel ſubtractionis.

Si namque ſit æquatio $a^2 =$ z plano. Intelligatur a, affecta decremento b, ſitque

Proponitur æquatio.

a — b; & hoc erit idem quod e; nam $e^2 + 2be$ æquabitur z plano — b^2.

Æquatio Plaſmatica per modum ſubtractionis.

Quod ſi fuiſſet æquatio $e^2 - 2be =$ z plano — b^2, Plaſmatica fuiſſet per modum additionis; intelligeretur enim radix affecta cremento deſumpto ex dimidia coefficiente b. Si itaque eſſet æquatio $a^2 =$ z plano. Intelligatur a, affecta cremento b; & fit $a + b$; idem, quod e; quamobrem e — b æquabitur a; & ita $e^2 - 2be$ æquabitur z plano — b^2.

In cubo quomodo intelligatur affecta radix, &c.

In Cubis verò intelligitur affecta radix triente coefficientis ſub quadrato. In Quadratoquadratis, quadrante coefficientis ſub cubo. In Quadrato-cubis quintante coefficientis ſub quadratoquadrato, & ita deinceps.

Quamobrem Quadrata affecta ſumunt originem à puris, vt $e^2 + 2be =$ z plano — b^2, & $e^2 - 2be =$ z plano — b^2 ducunt originem à pura æquatione $a^2 =$ z plano. Inſuper cubi affecti ſub quadrato, & latere, originem ducunt à cubis affectis ſub latere, quemadmodum hæc æquatio $e^3 - 3be^2 + \overline{3b^2 + d\ plano}\ e =$ z ſol. + d pl. b + b^3 ducit originem ab hac alia $a^3 +$ d pl. $a =$ z ſol. nimirum à cubo affecto ſub latere; Intelligitur autem a, affici quidem b; quamobrem e — b; æquatur a; quod inferiùs exemplis illuſtrabimus. Quadratoquadrata verò affecta, ſub cubo; quadrato, & latere, à Quadratoquadratis affectis ſub quadrato, vel latere, aut tàm ſub quadrato, quàm latere, & ita deinceps, de quibus inferiùs afferemus exempla.

Quando poteſtas eſt à radice plana.

Prætererea ſi aliqua poteſtas eſt à radice plana, aut ſolida, vel homogenea ordinis vlterioris, plaſmatica eſt per modum multiplicationis de quo ſupra verba fecimus, vel implicitæ analogiæ Vt $e^4 + b^2 e^2 = b^2$ z plan. Plaſmatica eſt per modum multiplicationis, & ducit originem abs $a^2 + ba =$ z plano. Sic enim arguitur b a; eſto e^2 ergo $\frac{e^2}{b}$ æquabitur a; ſi enim $\frac{e^2}{b}$ æquatur a, multiplicetur id quadraticè, vt fiat $\frac{e^4}{b^2}$ ducatur autem $\frac{e^2}{b}$ in ipſum b, fiet quidem productum e^2, quo addito ad $\frac{e^4}{b^2}$; fiet $\frac{e^4}{b^2} + e^2 =$ z plano; hoc eſt $e^4 + b^2 e^2 = b^2$ z plan. Hac autem de re inferiùs cumulatè loquemur.

Quadratoquadratum affectum ſub quadrato ducit originem à quadrato affecto ſub latere.

Ita Quadratoquadratum, affectum ſub quadrato, ducit originem, à quadrato affecto ſub latere, quoniam omnia ſingularia homogenea, quibus æquatio conſtat, ducta ſunt in quadratum coefficientis ſub latere, atqueadeo radix effecti quadrato quadrati media intelligitur proportionalis inter coefficientem ſublateralem, & eam radicem, quæ primò proponebatur, qua de re infra.

Quando cubocubus eſt affectus ſub cubo.

Ita quoque Cubocubus affectus ſub cubo, ducit originem à quadrato affecto ſub latere, atqueadeo radix effecti cubocubi, ſecunda ſit proportionalium continuè è quibus ſublateralis coefficiens eſt prima, & radix primò propoſita, eſt quarta. Itaque $e^6 + b^3 e^3 = b^4$ z pl. ducit originem abs $a^2 + ba =$ z pl. Inſuper Cubocubus affectus ſub quadratoquadrato, ducit originem à cubo affecto ſub quadrato, omnibus ſingularibus homogeneis, quibus æquatio conſtat ductis in cubum coefficientis ſub quadrato, & radix effecti cubocubi eſt media proportionalis inter coefficientem ſub quadraticam, & primò propoſitam, & ita $e^6 + b^2 e^4 = b^3$ z ſol. ducit originem abs $a^3 + b a^2 =$ z ſol. vt ex infra dicendis, perſpicuum fiet.

Omne quadratoquadratum eſt affectum ſub gradu parodico, &c.

Omne autem Quadratoquadratum affectum ſub gradu parodico ad illud, vno, vel pluribus plaſmaticum eſt per aſcenſum climacticum, ducens originem à quadrato affecto ſub latere, vt æquatio iſta $a^4 + \overline{b^2 + 2b\ z\ pl.}\ a =$ z planopl. + b^2 z pl. ducit originem per climacticum aſcenſum abs $a^2 + ba =$ z plano. Cùm itaque quadratoquadratum afficitur ſub latere, æquatio affecti quadrati, à quo æquatio quadratoquadratica duxit originem, paſſa eſt diſtributionem ſingularium homogeneorum, quibus æquatio conſtat, itaut fecerit æquationis partem vnam ſymbolum quadrati, & planum ſub latere, vna cum comparationis data magnitudine, alteram. Vt ſi ſit æquatio $a^2 + ba =$ z plano. Quoniam $a^2 + ba$, æquatur z plano; fiet per antitheſin æquatio $a^2 =$ z plano — b a, & ita quadrati ſymbolum conſtituit vnam æquationis partem, & planum ſub latere, vna cùm, &c. vtraque verò parte ducta quadraticè, fiet æquatio, vt vides $a^4 =$ z pl.pl. — 2 b z pl. a + $b^2 a^2$, & ſi interpretationem acceperit congruam, homogeneum ſub quadrato, nempe $b^2 a^2$, vt valeat b^2 z pl. — b^3 a, fiet æquatio $a^4 + \overline{b^3 + 2b\ z\ pl.}\ a =$ z pl. pl. + b^2 z pl.

Si

Si verò Quadratoquadratum afficitur, tam ſub quadrato, quàm ſub latere Plaſmatica eſt, eodem modo, vt æquatio iſta $a^4 + \overline{2\,d\,pl. - b^2}\,a^2 + 2\,b\,z\,pl.\,a = \overline{z\,pl.pl. - d\,planopl.}$ ducit originem ab $a^2 + b\,a = z\,pl. - z\,pl.$ etenim hæc fit per antitheſin $a^2 + d\,pl. = z\,pl. - b\,a$, & vtraque parte ducta quadraticè, fit æquatio, vt ſupra facta nimirum ordinatione ſecundum Artem, &c. Itaque ſi Q Q; afficiatur, tàm ſub quadrato, quàm latere, ęquatio affecti quadrati à quo deducta eſt quadrataquadratica paſſa eſt diſtributionem ſingularium ſuorum homogeneorum, quibus ipſa conſtat itaut poteſtas quadratica, vna cum dieſi dati plani comparationis, vel eiuſdem productione fecerit vnam æquationis partem, at verò planum ſub latere, vna cùm apatome ſeu reſiduo dati plani comparationis, vel eodem producto conſtituat alteram partẽ, & vtraque parte ducta quadraticè omnia ordinẽtur, &c.

Quando quadratoquadratum afficitur tam ſub quadrato, quàm ſub latere, quo modo æquatio plaſmatica ſit

Poſtremò ſi Quadratoquadratum afficiatur ſub cubo, vt $a^4 + \frac{2\,b\,z\,pl. + b^3}{z\,pl. + b^2}\,a^3 = \frac{z\,pl.\,pl.\,pl.}{z\,pl. + b^2}$ ducit originem ab $a^2 + b\,a = z$ plano, & ita æquatio iſta affecti quadrati à quo quadratoquadratica deducta eſt, paſſa eſt deſtributionem ſuorum, quibus conſtat ſingularium homogeneorum, itaut quadrati ſymbolum, vna cùm plano ſub latere, fecerit vnam æquationis partem, vtrumque comparationis planum fecerit alteram, & ducta quadraticè vtraque parte tam homogenea ſub quadrato, quàm ſub latere, congruam acceperint interpretationem.

Quando quadratoquadratum afficitur ſub cubo, quo pacto plaſmatica ſit æquatio.

Atque etiam Cubica quæcumque æquatio deduci poteſt à quadraticis per climacticum irregularem aſcenſum; Vt ſi ſit $\overline{b^2 + z\,pl.}\,a - a^3 = b\,z\,pl.$ ducit originem ab $a^2 + b\,a = z\,pl.$ Quoniam enim eſt $a^2 + b\,a = z$ plano; ſi omnia ducantur in a, & adſcita interpretatione, quod a^2 ęquetur $z\,pl. - b\,a$, ad exprimendum valorem ſub b, nimirum in a^2 ſolidi confecti fiet $a^3 + b\,z\,pl. - b^2\,a = z$ plano a, omnibuſque ritè ordinatis fiet $\overline{z\,pl. + b^2}\,a - a^3 = b\,z\,pl.$

Æquatio cubica, quo pacto deduci poſſit à quadraticis per climacticum irregularem aſcenſum.

At verò in his non patet reductionis via ad primæuas æquationes, niſi per æquationem æquę altarum poteſtatum; quamuis inde conſtitutarum æquationum proprietas non mediocriter iuuet; Cæterum iam ſuperiùs inſinuauimus Plaſtices finem, eiuſdemque præcipuum vſum, cùm diceremus, ope ipſius æquationes Plaſmaticas agnitas in ſimpliciores, a quibus deductæ fuerunt haud inutiliter reſolui.

Finis Plaſtices ſuperiùs inſinuatus fuit.

S C H O L I O N.

IN gratiam Tyronum, placet vnum vel alterum exemplum diligenter explicare, Proponatur a^2 æquari z plano. Supponamus a, eſſe 6, & z planum eſſe 36; Dum alteratur a, per additionem fingendo $a + b$ eſſe e, quod eſt plaſma adhibere; Dicamus b, valere 4; proinde $a + b$, valebit 10; atque adeo e, erit 10; & conſequenter $e - b$ erit 6; atque adeo, etiam a, erit 6; at verò dum ab a, creatur poteſtas a^2; par poteſtas creatur ab $e - b$; & erit $e^2 - 2\,b\,e + b^2$, quadratum illius reſidui $e - b$; Tam igitur illud, quadratum a^2, quàm hoc, nimirum $e^2 - 2\,b\,e + b^2$ dicebamus æquari z plano, & ita eſt, Nam ſi explicetur quadratum iſtud, comperiemus ſecundum præfixas æſtimationes valere 36; nam e^2 eſt 100; cui ſi addatur b^2, puta 16; fiet 116; à quo ſi auferatur 2 b e, nempe 80; remanet 36.

Multa in Tyronum gratiâ afferuntur, vnde colligere licet, quæ alioquin obſcuriora videri poſſunt, atque hinc euidenter conſtat vis ipſius Plaſtices.

Si ſit æquatio $a^2 + b\,a = z$ plano. Dicebamus etiam eſſe equationem $a^4 + \overline{b^2 + 2\,b\,z\,pl.}\,a = z\,pl.pl. + b^2\,z\,pl.$ Poſita enim æquatione $a^2 + b\,a = z\,pl.$ dicebamus fieri $a^2 = z\,pl. - b\,a$; vtraque parte ducta quadraticè, fieri $a^4 = z\,pl.pl. - 2\,b\,z\,pl.\,a + b^2\,a^2$, & ita eſt; Supponamus a, valere 2; & b eſſe 10; at z pl. valere 24, itaut ſit $1\,Q + 10\,R = 24$, per antitheſin, fiet $1\,Q = 24 - 10\,R$; vtraque parte ducta quadraticè, fit $1\,QQ = 576 - 480\,R + 100\,Q$; At verò 100 Q, nempe $b^2\,a^2$, valebunt $2400 - 1000\,R$, hoc eſt $b^2\,z\,pl. - b^2\,a$; quandoquidem ducta vtraque parte huius æquationis $1\,Q = 24 - 10\,R$ in 100, quadratum ex 10; fit $100\,Q = 2400 - 1000\,R$. Itaque ſi loco illius 100 Q, ſubrogemus $2400 - 1000\,R$, hoc eſt ad $576 - 480\,R$, addamus $2400 - 1000\,R$; fiet ſumma $2976 - 1480\,R$, & erit $1\,QQ = 2976 - 1480\,R$, & ita eſt; Si quis enim exiguo labore ſecundum radicis æſtimationem omnia perpendat, rem aliter ſe habere non poſſe, comperiet.

Affectio $b^2\,a^2$ interpretationem accipiens ex æquatione propoſita; valet b^2 z plan. $- b^3\,a^2$ ergò fiet æquatio vt ſupra facta ordinatione ſecundum Artem.

De ęquationibus deducendis.

CAPVT XIX.

Deductio maximè cōducit ad cognoſcendam æquationum naturā; propterea non eſt ſilentio prætereunda; imò de ea copiosè tractādū.

Auctor de quibuſdam magni momenti ſe acturum in ſuo Geometra Promoto pollicetur.

Æquatio ſuperiùs generatim definita hic diuiditur.

Æquatio alia originalis, alia canonica, quæ vel abſolutè eſt huiuſmodi, vel quia ab ipſa deducitur canonica.

Canonicarum æquationum primaria ſpecies, vna, quid.

AD aſſequenda æquationum primordia, atque adeò ad earum naturam dignoſcendam plurimùm facit deductio, quæ Gręcè Καθοδηγία dicitur; propterea non grauabimur hic de ratione deducendi æquationes magis compoſitas à ſimplicioribus tractationem inſtituere idque eò libentiùs faciendum arbitrati ſumus, quia inde aperitur via ad æquationum reductionem, qua de re, paulò poſt nobis erit agendum non ſine commodo Artificis, præſertim in Arithmeticis imò etiam in Geometricis non exiguæ eſt vtilitatis, quamuis alia via nos incedentes nulla fortè ad id quidem cogat neceſſitas, vt in noſtro Geometra Promoto, manifeſtè conſtabit. Æquatio, quam generatim ſupra definiuimus quæ, vel à Quæſtionum, ſiue Problematum, vtcunque propoſitorum terminis communiter deducitur, Communis appellari conſueuit; vel Canonica dicitur, aut quatenus ex ea, alia quæ propriè huiuſmodi eſt, deducitur, aut quia abſolutè huiuſmodi ſibi vendicat nomenclaturam. Æquationes igitur illæ, quæ etſi Canonicæ non ſint, quoniam tamen ab ijs, vt ab originalibus ſuis aliæ deducuntur, quæ propriè hoc nomine ſunt inſignitæ, propterea Canonicarum æquationum originales non iniuria nuncupantur. Hoc autem pacto æquationes illæ ſe habent, quæ per multiplicationem ex radicibus binomijs immediatè conficiuntur, in quibus producta ex multiplicatis radicibus æquantur radicibus multiplicandis ſub forma tantummodo multiplicationis, ordinatis. Ab his, quibus minus benè accommodata eſt æquationis deſcriptio, duæ propriè deducuntur ſpecies Canonicarum, quarum vnam Primariam, alteram Secundariam appellant; Canonicæ fortaſſe nuncupatæ, cùm per earum applicationem, tanquam per canones radicum numerus in æquationibus communibus determinatur. Canonicarum igitur æquationum ſpecies primaria eſt, quæ ab originalibus per deriuationem conſtituuntur; reiecta ſiquidem formali radicum binomiarum ordinatione, obtinente alteram æquationis originalis partem, & ex alterius partis homogeneis, homogeneo dato per affectionis mutationem in ſitum reliquis oppoſitum tranſlato; ſit æquatio quam Primariam Canonicam dixerunt.

Canonica ſecūdaria, quid.

Secundaria autem earum eſt, quæ à primarijs per reductionem conſtituuntur ablato ſiquidem de medio vno ex parodicis primariæ æquationis gradibus, ſit hęc de qua loquimur æquationis ſpecies Secundaria.

Æquatio Reciproca, quid.

Æquatio autem Reciproca, de qua ſæpe in ſequentibus mentio ſit; ea eſt, cuius homogeneum datum facto ex coefficientibus, & reciprocè poteſtas facto è gradibus parodicis, æquatur.

Collaterales, quid.

Æquationes Correlatæ, quid.

Auctor ne dū tradit ſpecioſam algebram in Geometria ſed etiam Arithmeticæ gratiam.

Sunt etiam ęquationes, quæ Collaterales appellantur, ſimplices illæ, in quibus fieri poteſt hypobibaſmus, per depreſſionem gradus parodici, itant facta æqua depreſſione tandem aliqua magnitudo ſolitariè exiſtat, veluti homogeneum datę menſurę cui poſſint reliqua homogenea comparari, ſunt igitur illæ, in quibus dignitates collaterales exiſtunt; vt ſi ex vna ęquationis parte exiſtat quadratum, ex altera verò radix; Sunt etiam ęquationes Correlatę, quę nimirum ſimiles ſunt, & ijſdem datis magnitudinibus conſtant, ſiue affectionum parabolis, ſiue affectionum homogeneis, de quo poſtea.

Hęc eo alacriùs tractanda ſuſcepimus, quoniam in animo eſt ne dum Specioſam Algebram tradere, quatenus Geometricis effectionibus inſeruit, & prout cuique licet

cet ea vti ad Geometrica reſoluenda Problemata, ſed etiam quatenus inde nos in Numeroſa ſic erudimur, vt huius penitiora introſpicientes, aſſequamur, quæ hactenus in tenebris latitarunt,

At ſummopere decet nos eſſe ſollicitos de huiuſmodi deducendi ratione; propterea quod patefacta via tunc demum ad reductionem videtur, cum conſtauerit, vnde reducenda æquatio ſuam originem traxerit, & quidem, vt ab æquatione Pura, deducitur Affecta; ita contra & affecta ad puram reuocatur; ſed quo pacto ſint hæc vſurpanda ex infra dicendis exploratum erit,

Summopere decet nos eſſe ſollicitos de ipſa deducendi ratione.

Neminem præterit ratio ordinandi binomias radices in multiplicationis formam. Hinc verò fit Διοχετεία, qua nimirum æquationes, cuiuſque ordinis ab originalibus ſuis, deducuntur. Vnde cùm oblata fuerit Canonica quædam æquatio, ad quem ordinem pertineat inſpecta poteſtatis natura conſiderandum eſt. Primò autem quadratici ordinis ſe ſe offerunt æquationes è quibus prima ſit καταφατική.

Æquationes cuiuſque ordinis, quomodo ab æquationibus ſuis deducantur.

Si igitur fuerit $a^2 - ba + ca$ = + b c, ſuppoſito quòd b, æquetur a. Æquatio affirmatiua ab originali ſua in qua factum ex radicibus binomijs multiplicatis æquale eſt ipſis multiplicandis radicibus ſub forma tantummodo multiplicationis ordinatis, quæ quidem impropriè ſibi æquationis vendicat nomen, atque rationem; ita ſe habet $a - b$ / $a + c$ = $a^2 - ba + ca$ — b c. Si igitur ſupponamus b, æquari a; ex hac hypotheſi, vtique a — b æquabitur o. Vnde ſi a, æquetur b; conſequens eſt vt $a - b$ / $a + c$ æquatur o; erat autem $a - b$ / $a + c$ = $a^2 - ba + ca$ — b c, ergò $a^2 - ba + ca$ — b c, æquabitur o; & per antitheſim $a^2 - ba + ca$ æquabitur + b c. Hunc itaque in modum apud non nullos quadratici ordinis æquatio, ab originali ſua deducitur.

Exemplum de æquatione affirmatiua.

Ne mireris autem, quòd ex a — b in a + c fiat productum æquale o; ſi namque a — b æquatur o; perinde eſt ducere a — b in a + c ac ducere o, in a + c; inde autem fit o; vt in multiplicatione vulgari contingit; ſi enim o, ducatur in a, vel alium quemcumque numerum fit o, de his tamen agentes de Maximis, & Minimis plura dicemus fuſiori calamo ſcribentes.

Ex multiplicationis poſitiui in negatiuũ produci o, declaratur.

Nec diſſimiliter ſi æquatio fuerit ἀποφατική. At ſi fuerit ἀμφίβολος. vt.

Si fuerit, æquatio $a^2 - ba - ca$ = — b c; poſito quòd b, vel c, æquetur a, deducitur ab originali. in qua factum ex radicibus binomijs multiplicatis, æquale eſt ipſis multiplicandis radicibus, ſub forma, tantummodo multiplicationis ordinatis, quæ quidem impropriè ſibi æquationis vendicat nomen, atque rationem; ita ſe habet $a - b$ / $a - c$ = $a^2 - ba - ca + bc$. Nam poſito quòd b, vel c, æquetur a; ex hac hipotheſi erit a — b æqualis o, vel ſi a, æquetur c; erit a — c, æqualis o. Si igitur ſupponamus a æquari b, vel c; erit quidem $a - b$ / $a - c$ = o. At verò $a - b$ / $a - c$ æquatur $a^2 - ba - ca + bc$. propterea $a^2 - ba - ca$ + b c æquabitur o; ergò & $a^2 - ba - ca$ æquabitur — b c.

Exemplum æquationis negatiuæ, non ſecus ac de affirmatiua.

Exemplum de æquatione amphebola.

Hunc itaque in modum ſupradictæ æquationes ab originalibus ſuis deducuntur:

Quòd ſi æquationes fuerint cubicæ, non abſimilis eſt modus eas ab originalibus ſuis deducendi; vndè.

Modo iam explicato æquationes ab originalibus ſuis deducuntur.

Si fuerit $a^3 - ba^2 - bca$ = + b c d poſito quòd b, æquetur a, ab originali ſua deducitur
+ ca^2 — b d a
+ da^2 + c d a

in qua factum ex radicibus binomijs multiplicatis, æquale eſt ipſis multiplicandis radicibus in formam tantummodo multiplicationis ordinatis quę vendicat quidem impropriè ſibi æquationis, nomen atque rationem.

Æquationes cubici ordinis

Et ita ſe habet a — b = $a^3 - b^2 - bca$ Ex hypotheſi enim, quòd a, æquetur b;
a + c + ca^2 — b d a
a + d + da^2 + c d a — b c d.

erit quidem a — b, æqualis o. quare poſito quòd a æquetur b, erit a — b, a + c, a + d æqualis o.

Erat autem a — b = $a^3 - ba^2 - bca$
a + c + ca^2 — b d a
a + c + da^2 + c d a — b c d.

Explicatur earum ab originalibus ſuis deductio.

Quamobrem

Quamobrem $\left.\begin{array}{l} a^3 - b a^2 - b c a \\ + c a^2 - b d a \\ + d a^2 + c d a - b c d \end{array}\right\}$ æquabitur o. Igitur.

$\left.\begin{array}{l} a^3 - b a^2 - b c a \\ + c a^2 - b d a \\ + d a^2 + c d a \end{array}\right\}$ ęquabitur $+ b c d$.

Quando æquationes fuerint Reciproca.

Nec diſsimiliter aliæ quoque cubici ordinis ęquationes ab originalibus ſuis deſignatis, deducuntur.

Quòd ſi fuerint Reciprocæ cubici quidem ordinis, vt ſi fuerit $a^3 - b a^2 + c d a = + b c d$ poſito quod b, æquetur a, deducitur ab originali ſua deſignata, in qua factum à radicibus binomijs multiplicatis ęquale eſt ipſis multiplicandis radicibus in formam tantummodo multiplicationis ordinatis, quæ quidem impropriè ſibi ęquationis nomen, atque rationem vendicat, & ita ſe habet $\frac{a-b}{a^2+cd} = a^3 - b a^2 + c d a - b c d$; ex hypotheſi igitur, quòd b, ęquetur a; erit $a - b$ ęqualis o, ſi itaque, b ęquetur a, etiam $\frac{a-b}{a^2+cd}$ æquabitur o. At verò $\frac{a-b}{a^2+cd}$ ęquatur $a^3 - b a^2 + c d a - b c d$, ergo $a^3 - b a^2 + c d a - b c d$ ęquabitur o; ergo per antitheſin $a^3 - b a^2 + c d a$ ęquabitur $+ b c d$.

Nec diſsimiliter cateræ æquationes huius ordinis ab originalibus ſuis deducuntur.

Atque hunc in modum cæterę ęquationes huius ordinis Reciprocæ ab originalibus ſuis deducuntur.

Nec abſimili modo ac ſupra, cùm de cubicis ęquationibus loqueremur, procedendum in æquationibus ordinis quadratici, ſemper ex hypotheſi, quòd a, ęquetur b modo enim conſimili ab originalibus ſuis deducuntur; quemadmodum etiam ſi huius ordinis ęquationes extiterint Reciprocę, prout de Reciprocis ad cubicum ordinem ſpectantibus, paulo antea dictum eſt, & ita de cęteris, &c.

Æquationes affecta à puris deducuntur. Exemplum.

Deducuntur autem æquationes affectæ, ab ijs, quę puræ dicuntur. Itaque.

Si ſit æquatio $a^2 =$ z plano; $a - b$ eſto e; & erit $e^2 + 2 b e =$ z pl. $- b^2$ Cùm enim ſit æquatio $a^2 =$ z plano; ſitque $a - b$ æqualis radici e; ergo $e + b$ ęquabitur a; ſi itaque $e + b$ ſubeat eandem multiplicationis affectionem, quam ſubit a, fiet quadratum ex $e + b$, æquale quadrato ex a, eſt autem ex hypotheſi a^2 æquale z plano; ergo quadratum ex $e + b$, ęquabitur z plano; at, vt patet ex geneſi, quadratum ex $a + b$, eſt $e^2 + 2 b e + b^2$, hoc igitur ęquabitur z plano, cùm itaque $e^2 + 2 b e + b^2$ æquetur z plano; per antitheſin fiet, vt ſupra $e^2 + 2 b e =$ z pl. $- b^2$; hoc autem ordinabatur, Vides igitur qua induſtria, ex pura æquatione, affecta deducatur. Hęc eſt per decrementum deductio.

Exemplum.

Si ſit æquatio $a^2 =$ z plano. Hinc affectam æquationem deducemus hoc pacto. Supponamus $a + b$ eſſe e; ex hac autem hypotheſi proueniet æquatio $e^2 - 2 b e =$ z pl. $- b^2$. Cùm enim ſit æquatio $a^2 =$ z plano; ſitque $a + b$ æqualis radici e; ergo $e - b$; æquabitur a, radici; ſi itaque $e - b$, ſubeat eandem affectionem, multiplicationis, quam ſubit a; fiet quadratum ex $e - b$, æquale quadrato ex a; eſt autem ex hypotheſi a^2, æquale z plano, ergo quadratum ex $e - b$, æquabitur z plano. At vt patet ex geneſi, quadratum ex $e - b$, eſt $e^2 - 2 b e + b^2$ hoc igitur æquabitur z plano; cùm itaque $e^2 - 2 b e + d^2$ æquetur z plano; per antitheſin fiet, vt ſupra $e^2 - 2 b e =$ z pl. $- b^2$ hoc autem ordinabatur. Vides igitur qua arte ex pura ęquatione deducatur affecta; quod Vieta, ingenioſè explicauit. Hæc eſt per crementum deductio.

Exemplum.

Si ſit æquatio $a^2 =$ z plano; $b - a$, vel $a + b$ eſto e; & $2 b e - e^2$ æquabitur $b^2 -$ z plano. Siquidem a^2 ſupponitur æquari z plano, & $b - a$; æqualis eſt radici e; ergo $b - e$ æquabitur a; & $b^2 - 2 b e + e^2$ hoc eſt quadratum ex $b - e$ æquabitur z plano, & facta ordinatione, fiet ęquatio, ad eum qui ſequitur modum $2 b e - e^2 = b^2 -$ z pl.

Exemplum.

At ſi $a + b$; ęquetur e; ergo $e - b$; æquabitur a, & $e^2 - 2 b e + b^2$ hoc eſt quadratum abs $e - b$ æquabitur z plano, & per antitheſin fiet $2 b e - e^2 = b^2 -$ z pl.

SCHOLION.

Hactenus tradita numeris explicantur Antiqua Algebra explicantur.

H*Actenus tradita numeris explicari poſſunt, & in grattam Tyronum; exemplum afferemus.*

Supponamus 1 *Q* = 144 *itaut z pl. valeat* 144 *loco autem b intelligatur numerus* 4, *atque* 1 *R* + 4 *ſit* 1 *A hoc eſt vna ſecunda radix, ergo quoniam* 1 *R* + 4; *aquatur* 1 *A; erit ob id aquatio inter* 1 *A* — 4, & 1 *R proinde quadratum abs.* 1 *A*, — 4 *nempe A Q* — 8 *A* + 16 *aquabitur* 144, *vtrinque ablatis* 16; *remanet* 1 *A Q* — 8 *A* = 128; *cuius aquationis radix eſt* 16, *at ſi ex* 16, *auferatur* 4; *nempe crementum, remanebit* 12, *valor ipſius R.*

Alia Auctori eſt Deductionis ratia.

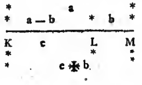
Sed de his quoque Vieta: Nobis æquationum affectarum à puris eiuſdem ordinis ita ſe habet deductio.

A ſolinomia radice pura oritur aquatio.

Primò ſiquidem illud ſe offert conſiderandum à ſolinomia radice, puram æquationem otiri, cùm autem binomia euaſerit, tunc ſe prodit affectio; vnde eadem magnitudo, & ſolinomia ſit, & binomia; illa puræ æquationi hęc autem affectę primordium eſt; Non ibimus inficias, etiam ſolinomiam affectæ ęquationi inſeruire, cùm ad libitum ſit latus aſſumere, & ex eo poteſtatem cuiuſque generis effingere, quæ deinde, vel affecta eſſe poterit homogeneo ſub vno ex parodicis gradibus, vna ſiue multiplici affectione, prout homogenea ipſa pro diuerſitate parodicorum graduum plura, vel pauciora fuerint, & affectio diuerſimode ſe ſe habere poteſt, ſiue poteſtas afficiatur, vt diximus, ſiuè ſit afficiens. Tamen hic ſermo eſt de affecta æquatione, quæ ductu poteſtatis in ſe affectionem conſequitur, collata cum homogeneo datæ menſurę. Hoc itaque pacto res ſe ſe habet.

Proponitur aquatio affirmatiua quadratica, vnde affecta deducitur.

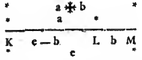
Sit æquatio a^2 = z plano.



Recta KM, diuiſa ſit in L; & quidem ipſa KM, eſto a; & LM ſit b, ergo KL, erit a — b; quæ dicatur e; ſi igitur KL, puta a — b, eſt e; ergo KM, erit e + b quæ cùm ſit a; proinde e + b, æquabitur a; Manifeſtum eſt autem, quadratum KM, æquale eſſe quadrato KL, plus duplo rectangulo KLM; vna cum quadrato LM; hoc eſt e^2 + 2 b e + b^2; hoc igitur æquatur a^2, ſeu z^2, hoc eſt z plano; vnde per antitheſin e^2 + 2 b e, æquabitur z pl. — b^2.

Rurſus pura aquatio proponitur, vnde affecta deducitur.

Sit ęquatio a^2 = z pl.



Recta KL, poducta ſit cremento LM; ſit autem KL; idem, quòd a, at verò LM, ſit b; ergo KM, erit a + b, quæ dicatur e, ſi igitur KM, puta a † b; eſt e, ergo KL, erit e — b; quæ cùm ſit a; propterea e — b ęquabitur a, Manifeſtum eſt autem, quadratum KL; æquari quadrato KM, minus duplo rectangulo KML, plus quadrato LM; hoc eſt e^2 — 2 b e + b^2, hoc igitur ęquatur a^2, ſeu z^2, vel z plano; quare per antitheſin e^2 — 2 b e, æquabitur z pl. — b^2.

Proponitur iterum aquatio pura vnde aquatio affecta deducitur.

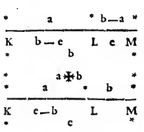
Sit æquatio a^2 = z plano.

Recta KL, ſubducta ſit rectę KM, aut KL; aucta ſit cremento LM; Sit autem KL, idem, quod a; at verò KM, vel LM, ſit b; ſed LM, vel

KM,

Supradictorũ demonſtratio.

KM, erit e; cui quidem æquatur $b - a$, vel $a + b$, & KL erit $b - e$, & eadem erit $e - b$ vtraque dicitur a; proinde $b - e$ æquabitur a; cui etiam æqualis erit $e - b$; Manifeſtum eſt autem quadratum KM, vel LM minùs duplo rectangulo KML; vna cum quadrato LM, vel KM æquari quadrato KL; ergo $b^2 - 2be + e^2$ æquabitur a^2, ſeu z^2 vel z plano; ergo $2be - e^2$ æquabitur $b^2 - z$ plano. Itaque ex æquationibus puris eiuſdem ordinis, æquationes affectæ deductæ ſunt.



Æquationes in quibus cubus afficitur ſub quadrato.

Æquationes autem in quibus Cubus afficitur ſub quadrato ab ijs in quibus affectio eſt ſub latere, deducuntur, quę quidem deducendi ratio multum momenti habet, vt ex ſequentibus planum fiet.

Proponitur æquatio cubica.

Si ſit æquatio $a^3 - 3b^2a = z$ ſolido; $a - b$ eſto e; & erit $e^3 + 3be^2 = z$ ſol. $+ 2b^3$.

Quoniam enim $a^3 - 3b^2a$ æquatur z ſolido, & eſt $a - b$ æqualis radici e; ergo $e + b$ æquabitur a, quamobrem cubus ex $a + b$ multatus ſolido abs $3b^2$ in $e + b$ æquabitur z ſolido. At verò cubus ex $a + b$ eſt $e^3 + 3be^2 + 3b^2e + b^3$, & ſolidum affectionis eſt $- 3b^2e - 3b^3$, ergo facta ordinatione ſecundum Artem, erit $e^3 + 3be^2 = z$ ſolido $+ 2b^3$.

Vel ſi $a^3 - 3b^2a$ æquetur z ſolido $a + b$ eſto e, & $e^3 - 3be^2$ æquabitur z ſolido $- 2b^3$ Quoniam enim $a^3 - 3b^2a$ æquatur z ſolido, eſt autem $a + b$ radici e, æqualis ergo $e - b$, æquabitur a. Proinde cubus ex $e - b$, multatus ſolido abs $3b^2$ in $e - b$ æquabitur z ſolido, & non diſſimiliter, ac ſupra procedendum, &c.

Proponitur æquatio altera cubica.

Si ſit æquatio $3b^2a - a^3 = z$ ſol, $b - a$ eſto e, & erit quidem $3be^2 - e^3 = 2b^3 - z$ ſolido.

Cùm enim $3b^2a - a^3$ æquetur z ſol. ſitque $b - a$ radici e, æqualis; ergo $b - e$ æquabitur a, quapropter ſolidum factum ex $3b^2$ in $b - e$ minus cubo ex $b - e$ æquabitur z ſol. at verò ſolidum illud affectum conſtat $3b^3 - 3b^2e$, & cubus negatus de ſolido, conſtat $- b^3 + 3b^2e - 3be^2 + e^3$, ergo omnibus ritè ordinatis, proueniet æquatio $3be^2 - e^3 = 2b^3 - z$ ſolido.

Proponitur æquatio cubica &c.

Vel ſit eadem æquatio, vt priùs $3b^2a - a^3 = z$ ſol. Itaque $b + a$ eſto e, & erit $3be^2 - e^3 = 2b^3 + z$ ſolido.

Cum enim $3b^2a - a^3$ æquetur z ſol. ſit autem $b + a$ radici e æqualis, ergo $e - b$ æquabitur a; ergo ſolidum ex $3b^2$ in $e - b$; minus cubo ex $e - b$ æquabitur z ſolido. Solidum autem illud affectum conſtat $3b^2e - 3b^3$, & cubus negatus de ſolido iam dicto conſtat $- e^3 + 3be^2 - 3b^2e + b^3$ quamobrem facta ordinatione ſecundum Artem, fiet æquatio $3be^2 - e^3 = 2b^3 + z$ ſolido.

Cum affectio eſt ſub quadrato, & latere. Proponitur æquatio altera cubica.

Si ſit æquatio $a^3 + 3b^2a = z$ ſolido; & quidem $a - b$ eſto e, ergo; $e^3 + 3be^2 + 6b^2e$ æquabitur z ſolido $- 4b^3$.

Quoniam enim $a^3 + 3b^2a$ æquatur z ſolido, eſt autem $a - b$, radici e, æqualis ergo $e + b$ æquabitut a; quare cubus ex $e + b$, adſcito ſolido abs $3b^2$ in $e + b$; æquabitur z ſolido. At verò cubus ex $e + b$, conſtat $e^3 + 3be^2 + 3b^2e + b^3$ ſolidum autem affectionis conſtat $3b^2e + 3b^3$, propterea facta ordinatione ſecundum Artem, fiet æquatio, vt ſupra $e^3 + 3be^2 + 6b^2e = z$ ſol. $- 4b^3$. Vel.

Rurſus eadẽ proponitur.

Si ſit æquatio, vt ſupra $a^3 + 3b^2a = z$ ſolido, & quidem $a + b$ eſto e, ergo $e^3 - 3be^2 + 6b^2e$ æquabitur z ſolido $+ 4b^3$.

Quoniam enim $a^3 + 3b^2a$ æquatur z ſolido; eſt autem $a + b$ radici e, æqualis; ergo $e - b$ æquabitur a, quare cubus ex $e - b$ adſcito ſolido abs $3b^2$ in $e - b$ æquabitur z ſolido. At verò cubus ex $e - b$ conſtat $e^3 - 3be^2 + 3b^2e - b^3$ ſolidum verò affectionis $3b^2e + 3b^3$; propterea facta ordinatione ſecundum Artem, fiet æquatio, vt ſupra $e^3 - 3be^2 + 6be^2 = z$ ſolido $+ 3b^3$. De hoc infra.

SCHO-

SCHOLION.

Multa hoc in loco conſiderantur vnde plurimū ſupradicta elucecunt.

HAEC vt melius intelligantur. Supponamus modo cubicam illam æquationem affirmatiuam a^3 † 3 b^2 a = z ſol. Si igitur intelligamus radicem a, *multari quantitate nota* b; *fiet reſiduum* a, — b, *quod appellemus* e, *cum igitur* a — b, *æquetur e, ergò per antitheſim e ✠ b, æquabitur* a, *& quia erat æquatio a^3 † 3 b^2 a = z ſol. hic verò ſumitur e † b, loco ipſius a; propterea, debet e ✠ b, ſubire multiplicationem, vt a; igitur ducatur e ✠ b, in ſe cubicè; & fiet e^3 † 3 b e^2 ✠ 3 b^2 e † b^3 & quoniam a, ducebatur in 3 b^2 cum eſſet ſolidum afficiens 3 b^2 a; faciendum eſt igitur ſolidum ex e ✠ b, in 3 b^2 facta multiplicatione; prouenit 3 b^2 e ✠ 3 b^3 vt patet; cum verò poteſtas foret affecta per adiunctionem huiuſmodi ſolidi, propterea ſolidum hoc eſt addendum poteſtati, nempe cubo iam dicto ex e ✠ b, fit autem aggregatum e^3 ✠ 3 b e^2 ✠ 6 b^2 e † 3 b^3 = z ſolido; ſeparentur autem ignota quantitates à notis, vt fiat æquatio, apta ad exhibendam quaſitam radicem, & proueniet per antitheſin æquatio e^3 ✠ 3 b e^2 † 6 b^2 e = z ſol. — 4 b^3 vt conſtat; neque diſſimili modo ratiocinandum de cæteris æquationibus hactenus traditis ad hunc ordinem pertinentibus, & hunc in modum variatio fit radicis cremento, vel decremento quantitatis notæ; de quo etiam in ſequentibus redibit ſermo.*

Obſeruanda quædam non exigui momenti.

Obſeruandum eſt autem, affectionem, in ſubrogatis attendi penes affectionem ſolidorum in æquatione, quod magnopere conſiderandum eſt; inde ſiquidem non modica ſuboriri poteſt æquiuocatio. Vnde ſi homogeneum ſub gradu parodico, in primaua æquatione afficiatur ſymbolo † idem, quoque adhibendum in ſubrogatis; & ſi afficiatur nota —, idem retinendum.

Superiora illuſtrantur.

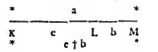
Ad maiorem illuſtrationem poſſumus numeros adhibere, ſi fuerit æquatio a^3 ✠ 3 b^2 a = z ſolido ex hypotheſi, quod a — b æquetur e, vnde ſequitur e ✠ b, æquari a; Supponamus a eſſe b; & b; eſſe 2; ergò æquatio illa erit 1 c ✠ 12 R = 288. Sic autem a — b valebit 4; quamobrem eius cubus erit 64, & 3 b e^2 valebit 96; inſuper 6 b^2 e, valebit itidem 96, horum ſumma eſt 256; at ſi ex 288, z ſolido, auferantur 4 b^3, quorum pretium eſt 32 remanebit pariter idem numerus 256.

Propenitur æquatio cubica affirmatiua affecta ſub latere.

Præter ea, quæ apud Vietam leguntur, nobis licebit alia in medium afferre deductionis gratia.

Deductio, quā Auctor inſtituit ſuprapoſitis æquationibus inſeruiens. Deducitur æquatio affecta tam ſub latere quam quadrato.

Sit ęquatio a^3 ✠ 3 b^2 a = z ſolido.



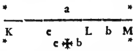
Recta K M, diuiſa ſit in L, & ipſa quidem K M, dicatur a, at L M ſit b, ſegmentum K L, ſit e, proprerea eadem K M, quę dicitur a, erit e ✠ b. Ex hypotheſi verò K M, cubus plus, triplo ſolido à quadrato L M in K M longitudinem æquatur z ſolido, Manifeſtum eſt autem cubum ex K M, æqualem eſſe cubo ſegmenti K L, plus triplo ſolido à quadrato K L in L M, plus triplo ſolido à quadrato L M, in K L, vna cùm cubo eiuſdem L M, at ſolidum triplum à quadrato L M in K L. vna cum triplo cubo ex L M, additum cubo iam dicto ipſius K M, facit cubum ex K L, plus triplo ſolido à quadrato K L, in L M, longitudinem, plus triplo ſolido à quadrato L M, in K L, longitudinem. vna cum cubo eiuſdem L M, plus triplo ſolido à quadrato L M, in longitudinem K L, vna cum triplo cubo ipſius L M; quę ſimul quidem ęquantur K M, cubo, plus triplo ſolido abs L M, quadrato in K M, ſed hoc ęquatur z ſolido, ergo e^3 ✠ 3 b e^2 ✠ 3 b^2 e ✠ b^3 ✠ 3 b^2 e ✠ 3 b^3 ęquatur z ſolido, & per antitheſin e^3 ✠ 3 b e^2 ✠ 6 b^2 e ęquabitur z ſolido — 4 b^3. Hęc tamē eſt cubica æquatio affecta ſub quadrato, & latere.

Sit æquatio a^3 — 3 b^2 a = z ſolido.

Recta K M, multata ſit ſegmento L M, at ipſa quidem K M, dicatur a; & L M, ſit b,

 ſegmen-

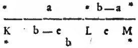
ſegmentum verò K L, eſto e; propterea eadem K M, quæ dicebatur a, erit e † b; Manifeſtum eſt autem cubum ipſius K M, æqualem eſſe cubo ſegmenti K L, plus triplo ſolido à quadrato K L, in L M, plus triplo ſolido à quadrato L M, in K L, vna cum cubo eiuſdem L M; At ſolidum triplum à quadrato L M, in K L, vna cum triplo cubo ex L M, ſubtractum ex iam dicto cubo relinquit cubum ipſius K L, plus triplo ſolido à quadrato K L in L M, minus duplo cubo eiuſdem L M, quæ ſimul quidem æquantur cubo ipſius K M, minus triplo ſolido à quadrato L M in K M; Sed hoc æquale eſt z ſolido, ergo $e^3 + 3be^2 - 2b^3$ æquabitur z ſolido, & per antitheſin $e^3 + 3be^2$ æquabitur z ſolido $+ 2b^3$. Hæc æquatio cubica affecta eſt ſub quadrato tãtũ.



Proponitur æquatio cubica amphibola affecta ſub latere.

Sit æquatio $3b^2a - a^3 = z$ ſolido.

Recta K M ſit b à qua ſubtracta ſit K L, vt remaneat L M, at verò ſegmentum K L ſit a; vt L M remaneat b — a eadem L M, eſto e, vt K L ſit b — e. Manifeſtum eſt autem cubum ſegmenti K L, eſſe æqualem cubo ipſius K M, minus triplo ſolido abs K M, quadrato in L M, plus triplo ſolido a b L M, quadrato in K M, minus cubo ipſius L M, Solidum autem triplum de quo negatur cubus ex K L, eſt triplus cubus ipſius K M, minus triplo ſolido à quadrato eiuſdem K M, in L M, à quo ſi ſubtrahatur cubus ipſius K L, remanet cubus L M, plus duplo cubo ex K M, minus triplo ſolido à quadrato L M in K M, quæ quidem æquantur triplo ſolido à quadrato ipſius K M, in K L, minus cubo ipſius K L; ſed hæc æquantur z ſolido; ergo $e^3 + 2b^3 - 3be^2$, æquabitur z ſolido, & ordinatione facta ſecundum Artem, proueniet æquatio $3be^2 - e^3 = 2b^3 - z$ ſolido. Quę æquatio cubica eſt affecta tantum ſub quadrato.



Aliæ quoque æquationes. Auctoris artificio, non diſſimiliter à cubicis deducuntur.

Perſimili artificio, etiam ęquationes cubicæ, quibus nullus terminus deeſt à cubicis, in quibus deeſt ſecundus terminus, deducuntur. Hæc autem deductionis ratio magni facienda eſt, vt infra conſtabit.

Proponitur æquatio cubica affecta ſub latere, vnde cubica affecta ſub latere, à quadrato deducitur.

Si ſit $a^3 + d\,pl.\,a = z$ ſol. Supponatur $a + b$ eſſe e, & inde fiet æquatio $e^3 - 3be^2 + \overline{3b^2 + d\,pl.}\,e = z$ ſol. $+ d\,pl.\,b + b^3$. Quandoquidem ſupponitur $a^3 + d\,pl.\,a$, ęquari z ſolido, eſtque $a + b$ æqualis radici e; propterea $e - b$ æquabitur a, per antitheſin, vt patet; quare cubus ex $e - b$; additus ſolido abs d pl. in $e - b$ æquabitur z ſol.; eſt autem cubus ex $e - b$, ſolidum conſtans $e^3 - 3be^2 + 3b^2e - b^3$, & ſolidum affectionis eſt $+ d\,pl.\,e - d\,pl.\,b$, ergo facta ordinatione ſecundum Artem, fiet æquatio, vt ſupra.

Proponitur æquatio cubica affirmatiua ſub latere affecta vnde æquatio cubica affecta ſub quadrato, & latere deducitur per decrementum.

Si ſit $a^3 + d\,pl.\,a = z$ ſol. $a - b$ eſto e, ergo fiet æquatio $e^3 + 3be^2 + \overline{3b^2 + b\,pl.}\,e = z$ ſol. $- d\,pl.\,b - b^3$.

Quoniam enim $a^3 + d\,pl.\,a$ æquatur z ſolido, & eſt $a - b$ radici e æqualis, ergo $e + b$ æquabitur a; Itaque cubus abs $e + b$, additus ſolido ex d pl. in e † b, æquabitur z ſolido. At cubus ex $e + b$ conſtat $e^3 + 3be^2 + 3b^2e + b^3$; ſolidum autem affectionis eſt $+ d\,pl.\,e$ † $d\,pl.\,b$, ergo omnibus ordinatis ex Artis præceptis fiet æquatio, vt ſupra, &c.

Proponitur æquatio cubica affirmatiua affecta ſub latere.

Si ſit $a^3 + d\,pl.\,a = z$ ſol. $b - a$ eſto e, & erit æquatio $e^3 - 3be^2 + \overline{3b^2 + d\,pl.}\,e = b^3 + d\,pl.\,b - z$ ſolido.

Quoniam enim $a^3 + d\,pl.\,a$ æquatur z ſolido; eſt autem $b - a$ radici e, æqualis; ergo $b - e$ æquabitur a, atqueadeo cubus abs $b - e$, adiunctus ſolido abs d pl. in $b - e$ æquabitur z ſolido. Sed cubus abs $b - e$, conſtat $b^3 - 3b^2e + 3be^2 - e^3$ ſolidum autem affectionis eſt $+ d\,pl.\,b - d\,pl.\,e$ ergo ritè omnibus ordinatis ſecundum Artem, fiet æquatio, vt ſupra.

Proponitur æquatio cubica negatiua affecta ſub latere vnde æquatio cubica affecta ſub latere, & quadrato deducitur.

Sit fuerit æquatio $a^3 - d\,pl.\,a = z$ ſol. $a + b$ eſto e, erit igitur æquatio $e^3 - 3be^2 + \overline{3b^2 - d\,pl.}\,e = z$ ſol. $+ b^3 - d\,pl.\,b$.

Quo-

Quoniam enim $a^3 - d\,pl.\,a$ ęquatur z ſolido; eſt autem $a + b$ radici e, æqualis; ergo $e - b$ æquabitur a; proinde cubus abs $e - b$ multatus ſolido abs d pl. in $e - b$ æquabitur z ſolido. Sed cubus abs $e - b$ conſtat $e^3 - 3\,b\,e^2 + 3\,b^2\,e - b^3$ ſolidum autem affectionis eſt $- d\,pl.\,e + d\,pl.\,b$ facta ordinatione ſecundum Artem, fiet æquatio, vt ſupra.

Si ſit $a^3 - d\,pl.\,a = z\,ſol.$ $a - b$ eſto e, & erit æquatio $e^3 \dagger 3\,b\,e^2 \overline{+ 3\,b^2 - d\,pl.}\,e = z\,ſol. + d\,pl.\,b - b^3$.

Proponitur æquatur quadratica negatiua, unde cubica deducitur.

Cùm enim $a^3 - d\,pl.\,a$ æquetur z ſolido; eſt verò $a - b$ radici e, æqualis; ergo $e \dagger b$; æquabitur a, ob id cubus abs $e + b$; multatus ſolido abs d pl. in $e \dagger b$, æquabitur z ſolido. Sed cubus abs $e \dagger b$ conſtat $e^3 \dagger 3\,b\,e^2 + 3\,b^2\,e + b^3$. Solidum autem affectionis eſt $- d\,pl.\,e - d\,pl.\,b$, facta ordinatione ſecundum Artem fiet æquatio, vt ſupra.

Si ſit æquatio $a^3 - d\,pl.\,a = z$ ſolido $b - a$ eſto e; & fiet æquatio $e^3 - 3\,b\,e^2 \overline{+ 3\,b^2 - d\,pl.}\,e = b^3 - d\,pl.\,b - z$ ſolido. Cæterum $a^3 - d\,pl.\,a$ æquatur z ſolido; eſt autem $b - a$; radici e, æqualis; proinde $b - e$ ęquabitur a; quamobrem cubus abs $b - e$ multatus ſolido abs d pl. in $b - e$ æquabitur z ſolido. Sed cubus ex $b - e$ conſtat $b^3 - 3\,b^2\,e + 3\,b\,e^2 - e^3$. Solidum affectionis eſt $- d\,pl.\,b + d\,pl.\,e$ ergo facta ordinatione ſecundum Artem; proueniet æquatio, vt ſupra.

Proponitur æquatio cubica negatiua affecta latere unde cubica affecta tam ſub quadrato, quàm ſub latere negatiua tamen, deducitur.

Si ſit æquatio $d\,pl.\,a - a^3 = z$ ſolido; $a + b$ eſto e, & erit $\overline{d\,pl. - 3\,b^2}\,e + 3\,b\,e^2 - e^3 = z$ ſolido $+ d\,pl.\,b - b^3$.

Proponitur æquatio cubica ambigua, unde deducitur ambigua cubica affecta ſub quadrato & latere. Hæc deductio per crementum.

Quoniam enim $d\,pl.\,a - a^3$ æquatur z ſolido, & eſt $a + b$, æqualis radici e; propterea $e - b$; æqnabitnr a; itaque ſolidum factum abs d pl. in $e - b$ multatum, cubo ex $e - b$; ęquatur z ſolido. Solidum autem abs d pl. in $e - b$ conſtat $d\,pl.\,e - d\,pl.\,b$ cubus ablatitius eſt $- e^3 + 3\,b\,e^2 - 3\,b^2\,e + b^3$ omnibus ritè ſecundom Artis pręcepta ordinatis, fiet æquatio, vt ſupra.

Si ſit æquatio $d\,pl.\,a - a^3 = z$ ſolido; $a - b$ eſto e, & proueniet ęquatio $\overline{d\,pl. - 3\,b^2}\,e - 3\,b\,e^2 - e^3 = z$ ſolido $- d\,pl.\,b + b^3$.

Proponitur eadem æquatio, &c.

Cùm enim $d\,pl.\,a - a^3$ ęquetur z ſolido; eſt autem $a - b$, radici e ęqualis; ergo $e + b$ æquabitur a; proinde ſolidum abs d pl. in $e + b$ multatum cubo ex $e + b$ ęquabitur z ſolido. Solidum abs d pl. in $e + b$ conſtat $d.\,pl.\,e + d\,pl.\,b$, cubus ablatitius eſt $- e^3 - 3\,b\,e^2 - 3\,b^2\,e - b^3$ omnibus autem ritè ordinatis, proueniet ęquatio, vt ſupra.

Hæc deductio per decrementum.

Si ſit æquatio $d\,pl.\,a - a^3 = z$ ſolido $b - a$ eſto e, & proueniet ęquatio $\overline{d\,pl. - 3\,b^2}\,e + 3\,b\,e^2 - e^3 = d\,pl.\,b - b^3 - z$ ſolido.

Quoniam $d\,pl.\,a - a^3$ æquatur z ſolido; eſtque $b - a$ radici e ęgualis ergo $b - e$ ęquabitur a, proinde d pl. in $b - e$ minus cubo ex $b - e$ ęquabitur z ſolido; at verò ſolidum abs d pl. in $b - e$ conſtat $d\,pl.\,b - d\,pl.\,e$; cubus ablatitius eſt $- b^3 + 3\,b^2\,e - 3\,b\,e^2 + e^3$; Omnibus ritè ordinatis ſecundum Artem, proueniet ęquatio, vt ſupra.

Hęc ſunt iuxta Vietę inuenta, ad quorum maiorem explicationem non pigebit hìc paululum immorari. Repetamus igitur primam illam ęquationem $a^3 + d\,pl.\,a = z$ ſolido, à qua deduci ęquationem affectam tam ſub quadrato, quàm ſub latere dictum fuit. Supponendum eſt $a + b$ eſſe e, quod plaſmaticum eſt, cùm itaque nota quantitas b, addita ſit ignotæ a; aucta eſt radix de qua quæritur huiuſmodi cremento, at ſi $a \dagger b$, ęquetur e; per μετατεσιν, fiet a æqualis $e - b$. In illa autem æquatione a, ſupponebatur cubicè ducta, cùm cubus ipſius adauctus ſolido ab eadem radice in planum coefficiens foret ęqualis homogeneo datæ menſuræ, cuiuſmodi eſt z ſolidum, proinde, $e - b$, æquipollens radici a, cubicè ducatur, vt proueniat $e^3 - 3\,b\,e^2 + 3\,b^2\,e - b^3$, supereſt, vt ſubeat eam, quam a^3, affectionem ſolidi; ſolidum quidem afficiens eſt $+ d\,pl.\,e - d\,pl.\,b$; (præponendum eſt ſymbolum †, cum affectio veteris æquationis ſit per affirmationem; eſt enim æquatio illa καταφατική) propterea orietur æquatio $e^3 - 3\,b\,e^2 + 3\,b^2\,e - b^3 \dagger d\,pl.\,e - d\,pl.\,b = z$ ſolido; quantitates autem ignotæ vnam obtineant æquationis partem, vt quæ ſunt ignotæ cùm illis comparentur, & erit $e^3 - 3\,b\,e^2 \dagger \overline{3\,b^2 \dagger d\,pl.}\,e = z\,ſol. + d\,pl.\,b \dagger b^3$.

Hactenus pro ximo tradita ſunt ex Vieta; multa ſuperſunt, tractanda ad argumentum ſpectantia.

Superiora declarantur mediantibus ſecundis radicibus.

Hæc igitur ęquatio deducitur ex illa, quam ſuperiùs attulimus. Hæc numeris explicari poſſunt; nam per d pl. intelligamus 20; & per z ſolidum, intelligamus 48, adeo vt æquatio fiat $1\,C \dagger 20\,R = 48$. At verò per b, intelligamus quemcumque numerum, exempli gratia 5; & $1\,R \dagger 5$ eſto $1\,A$, hoc eſt vna ſecunda radix, ob id $1\,A - 5$ æquabitur $1\,R$; ergo cubo abs $1\,A - 5$, nimirum $1\,AC - 15\,AQ \dagger 75\,A - 125$; ſi addatur ſolidum abs 20; in $1\,A - 5$, nempe $20\,A - 100$, fit $1\,AC - 15\,AQ \dagger 95\,A - 225$, & æquabitur 48, factaque ordinatione ſecundum Artem; proueniet æquatio $1\,AC - 15\,AQ \dagger 95\,A = 273$. In illa autem $1\,C \dagger 20\,R = 48$, radicis valor eſt 2; in hac verò eſt 7. Itaque $a \dagger b$ hoc eſt e, erit 7; quod ſi $a \dagger b$, æquabatur e, ob id $a \dagger b$, valebit 7; ergo cùm b, valeat ex hypotheſi 5; fiet 2, valor ipſius a.

Auctoris deducendi ratio in his æquationibus non eſt abſimilis illi, qua vſus eſt in deductionibus aliarum. Iterum contingit æquationum planas vel ſolidas eſſe radices. Tunc, quid agendum, cum ſcilicet radix eſt plana. Exemplum cùm radix eſt plana.

Si quis autem noſtra deductionis forma vti velit, imitando quæ ſupra docuimus de alijs ęquationibus, facilè conſequetur intentum, non enim omninò diſſimilis eſt deducendi ratio; propterea præ oculis illa, qua ſuo loco vſi ſumus, habeatur, citra laborem enim æquationibus etiam de quibus nunc diſſeritur, ſatisfieri poterit.

Contingit etiam aliquot poteſtatum planas, vel ſolidas radices habentium, à poteſtatibus ſimplicium radicum deduci; Igitur æquatio in qua Quadratoquadratum eſt poteſtas affecta ſub quadrato, deducitur quidem ab æquatione in qua quadratum afficitur ſub latere. Itaque ſi a^2 ✠ b a æquetur z pl. ab huiuſmodi æquatione deducitur altior iam dicta, ex hypotheſi, quòd b a, ſit e^2 vel e planum, & e^4 ✠ $b^2 e^2$ æquabitur b^2 z pl.

Cùm enim a^2 ✠ b a æquetur z pl., ſitque b a, æquale e^2, ob id $\frac{e^2}{b}$ æquabitur a; quamobrem quadratum abs $\frac{e^2}{b}$ adiunctum plano ſub b, & $\frac{e^2}{b}$, nempe $\frac{e^4}{b^2}$ ✠ e^2 ęquabitur z plano, omnia quidem ducantur in b^2, ergo e^4 ✠ $b^2 e^2$ æquabitur b^2 z pl., & quia e^2, ſtatuitur radix plana, propterea ſic erit enuncianda, quam ſuperiùs attulimus, æquatio e pl. quadratum ✠ b^2 e pl. $=$ b^2 z pl.

Ad maiorem ſupradictorum explicationem quædam hic aduertuntur.

Et quidem, vt magis ſuperiora explicentur. Si ſtatuamus b a, æquari e^2; manifeſtum eſt productum ex b, in a, æquari quadrato ex e, id enim eo genere loquendi ſignificamus; at ſi quadratum æquetur facto ſub duobus lateribus per applicationem ad vnum ex illis, aliud emergit, vt conſtat, quare ſi e^2, applicetur lateri, quod appellatur b; vtique magnitudo ortiua fiet a, hoc enim pacto magnitudo ortiua ducta in metientem facit planum, quod applicatur; Itaque $\frac{e^2}{b}$ ducatur in b; et proueniet e^2, vt conſtat, hoc autem addendum eſt quadrato ex $\frac{e^2}{b}$, vt enim $\frac{e^2}{b}$ æquatur a, ita huiuſmodi quadratum ęquabitur a^2, eſt autem quadratum prædictum $\frac{e^4}{b^2}$, propterea fiat additio, vt dictum eſt, quandoquidem propoſita illa æquatio erat affirmatiuè affecta, atque proueniet $\frac{e^4}{b^2}$ ✠ e^2 $=$ z plano; quod ſi omnia ducantur in b^2, non tolletur ęqualitas, cùm per communem multiplicationem æqualitas adhuc ſubſiſtat, & hunc in modum tollitur fractio, vt proueniat e^4 ✠ $b^2 e^2$ $=$ b^2 z pl. quia verò, radix plana ſupponitur, propterea quod b a, cui ſupponitur æquari e^2, planum eſt; ob id retenta natura ipſius radicis enuncianda ęquatio eſt; atque adeo exprimenda radix, prout ipſius exigit natura, vnde dicemus e pl. 2 quo ſymbolo denotamus quadratum ipſius e plani, & formabimus æquationem, vt ſupra tradidimus, nimirum e pl. 2 ✠ b^2 e pl. $=$ b^2 z pl.

Retinenda eſt radicis natura, propterea de ipſa, quatenus plana eſt æquatio enunciari debet.

Si verò a^2 — b a æquetur z pl. facta, ſimili hypotheſi, ac ſupra, nempe b a, eſſe e^2, vel e planum, & e^4 — $b^2 e^2$ ęquabitur b^2 z pl. Vel e pl. 2 — b^2 e pl. $=$ b^2 z pl.

Inſuper ſi b a — a^2 ęquetur z plano ex eadem hypotheſi, quòd b a, ſit e^2, vel e planum $b^2 e^2$ — e^4 æquabitur b^2 z pl.

Explicatur æquatio de radice ſolida.

Si a^3 ✠ b a ęquetur z pl. ex hypotheſi, quod b^2 a ſit e^3, vel e ſolidum, fiet e^6 † $b^3 e^3$ $=$ b^6 z pl.

Cùm enim a^3 † b a, æquetur z pl. ſupponatur verò b^2 a æquari e^3 ergo $\frac{e^3}{b^2}$ æquabitur a; Itaque cubus ex $\frac{e^3}{b^2}$ vna cum $\frac{b\,e^3}{b^2}$, nempe $\frac{e^6}{b^6}$ ✠ $\frac{e^3}{b}$ ęquabitur z plano. Omnibus verò ductis in b^6; fiet e^6 ✠ $b^5 e^3$ æqualis b^6 z pl.

Supradictorum declaratio ac accurata explicatio.

Et quidem, vt magis ſuperiora explicentur. Si ſtatuamus b^2 a ęquari e^3, manifeſtum eſt ex applicatione ipſius ad b^2, oriri a; propterea quod b^2 a ſolidum conſtans ex b^2, in a, æquale eſt ſolido, nempe e^3; ſi igitur hoc ſolidum applicetur b^2

neceſſa-

neceſſariò ſit magnitudo ortiua a; hęc enim ducta in metientem, puta b^2, facit ſolidum, quod applicatur, ſcilicet e^3; ſi igitur $\frac{e^3}{b^2}$, ęquetur a; fungatur $\frac{e^3}{b^2}$ eodem numere, quo fungitur a; propterea, vt a, ducebatur in b; duci etiam debebit in b, ipſum $\frac{e^3}{b^2}$, & fiet productum $\frac{b\,e^3}{b^2}$, hoc autem addendum eſt ipſi $\frac{e^3}{b^2}$ ducto in ſe quadraticè, vt enim $\frac{e^3}{b^2}$ æquatura, ita $\frac{e^3}{b^2}$ quadraticè ductus, æquabitur a, quadraticè multiplicato, nempe a^2; illud autem eſt $\frac{e^6}{b^4}$, & huic addendum eſt $\frac{b\,e^3}{b^2}$, quoniam a^2, affectum erat per affirmationem ipſius b a; igitur fiet æquatio $\frac{e^6}{b^4} + \frac{e^3}{b} =$ z plano nempe $e^6 + b^3\,e^3$ æquabitur b^4 z pl., videlicet omnibus ductis in b^4, &c.

Si enim $\frac{e^6}{b^4}$, qnod eſt quadratum ipſius $\frac{e^3}{b^2}$ ſibi adſciſcat $\frac{b\,e^3}{b^2}$, quod eſt factum ex $\frac{e^3}{b^2}$ in b; coefficientem londitudinem; fit $\frac{e^6}{b^4} + \frac{b\,e^3}{b^2}$, quod ęquabitur z plano, at ſi illa ęquationis pars ducatur in b^4, fit $e^6 + b^3\,e^3$; nam ſi $\frac{e^6}{b^4}$ ducatur in b^4, prouenit e^6; ſi verò $\frac{b\,e^3}{b^2}$ ducatur in b^4, fit productum $\frac{b^5 e^3}{b^2}$, nempe $b^3\,e^3$. Itaque $e^6 + b^3\,e^3$, ęquabitur b^4 z pl. Ex his intelliges ni fallor quanta ſit adhibenda induſtria in indaganda æquationum natura. Itaque. *Superiora explicantur.*

Si $a^2 - b\,a$ æquetur z plano. Supponamus b^2 a eſſe e^3, vel ſi placet, e ſolidum, & $e^6 - b^3\,e^3$ æquabitur b^4 z pl. *Proponitur æquatio quadratici ordinis negatiua*

Si $b\,a - a^2$ ęquetur z plano; b^2 a eſto e^3 vel e ſolidum; $b^3\,e^3 - e^6$ æquabitur b^4 z pl. *Item amphibola.*

Si $a^3 + b\,a^2$ ęquetur z ſolido, b a eſt e^2, & $e^6 + b^2\,e^4$ æquabitur b^3 z ſol.

Cùm enim $a^3 + b\,a^2$ æquetur z ſolido; ſitque b a, æquale e^2; ergo $\frac{e^2}{b}$ ęquabitur a; quare ex propoſitis $\frac{e^6}{b^3} + \frac{e^4}{b}$ æquabitur z ſolido, omnibuſque ductis in b^3, & $e^6 + b^2\,e^4$ æquabitur b^3 z ſol. quia tamen e^2 radix ponebatur plana, fiet æquatio enuncianda e planum 3 $+ b^2$ e plani 2 $= b^3$ z ſolido. *Exemplum de æquatione cubica affirmatiua.*

Et quidem vt magis ſuperiora explicentur. Si ſtatuamus b a, æquari e^2; conſequens eſt ex ſupra traditis, ſi e^2 applicetur vni ipſorum laterum, puta b, fieri magnitudinem ortiuam a, hoc enim pacto magnitudo ortiua ducta in metientem, facit planum, quod applicatur, & non diſſimiliter ratiocinando, ac ſupra deprehendemus, fieri ęquationem, quam diximus. *Superiora explicantur.*

Si $a^3 - b\,a^2$ æquetur z ſolido; b a eſto e^2 vel e planum ſi placet, & $e^6 - b^2\,e^4$ æquabitur b^3 z ſol. Vel e pl. 3 $- b^2$ e pl. 2 $= b^3$ z ſolido. *Exemplum de æquatione cubica negatiua.*

Si $b\,a^2 - a^3$ æquętur z ſolido b a eſto e^2 vel e planum, & $b^2\,e^4 - e^6$ ęquabitur b^3 z ſol. Vel b^2 e pl. 2 $-$ e pl. 3 $= b^3$ z ſol. *Exemplum de æquatione cubica amphibola.*

S C H O L I O N.

IN ſupradictorum gratiam hac ſubijciemus. Sit prima illa æquatio a^2 † b a = z pl. Ipſius quidem a, pretium eſto 4, & b ſit 16; at verò z pl. ſit 80; b a eſto 1 A Q hoc eſt quadratum ſecundæ radicis, & erit æquatio 1 A QQ † 256 A Q = 20480; & hoc modo reperiemus ipſius 1 A Q pretium eſſe 64, cuius QQ eſt 4096, cui ſi addatur 16384 valor ipſorum 256 A Q ſit ſumma 20480. Itaque rectè dicebamus 1 A QQ † 256 A Q æquari 20480. Cum igitur enunciatum fuerit $e^6 + b^3\,e^3$ æquari b^4 z pl. Per e^3 intelligamus a^2, nempe b a, quod eſſe 64 dicebamus, & erit ipſius e^6 pretium, vt dictum eſt; 4096, 64 verò $b^3\,e^3$ valebit 20480, & fiet ſumma 20480; quamoaram eadem conſurgit ſumma ex b^4 hoc eſt 256 in z pl. hoc eſt 80, & eodem modo in cæteris æquationibus ratiocinandum *Superius tradita declarātur.*

Hic tamen paululum immorandum; atque conſiderandum à realibus quantitatibus, imaginarias deduci, etiam per æquipollentiam cum illis. Si enim excogitemus quadratum aliquod, cuius latus, ſit vnum, è duobus rectanguli, cuius alterum ſit coefficiens longitudo itaut, hoc aggregatum conferatur alicui magnitudini datæ; Planum illud, coefficienti applicatum, reſtituit latus quadrati; atque adeo huiuſmodi planum applicatum, latus eſt, huius autem lateris quadratum, quantitas realis eſt, tamen illud planum applicatum quadraticè ductum, facit quoque planum, nam tametſi planum numerator ad planoplanum aſcendat, de- *Multa hic lōga diſſertatione tractantur, quæ maximè conducunt ad ſupradictorū explicationē & eorum quæ ſunt deinceps futura.*

nomi-

nominator, puta latus ad planum multiplicatione peruenit, quod ſi illud huic fuerit, vt re vera eſt applicatum ſit planum, vt conſtat. Nihilominus, tunc planoplanitiem conſequitur cum ab applicatione librratur, ſitque ſoluta magnitudo affecta per communem ductum homogenea ſub latere, quo pacto etiam ob eandem communem multiplicationem, ſit aſcenſus ad imaginarias quantitates, ex parte homogenei data menſura; atque adeo hac Arte à plana radice, & modo etiam perſimili à ſolita, ſit altioris ordinis æquationum deductio. Itaque huiuſmodi deductio non per multiplicationem tantum, ſed etiam per liberationem, à vinculis applicationis; quod eſt obſeruandum; ad digmoſcenda æquationum primordia.

Superior autem deductionis ratio Victæa eſt; quæ verò noſtra nunc ſequitur.

Auctoris propria deductionis ratio ſupra dictarum æquationum in quibus Quadrato quadratum afficitur ſub quadrato ab æquatione quadratica.

Si $a^2 + b\,a$ æquetur z plano, Manifeſtum eſt homogeneum datæ menſuræ aliam per eius applicationem ad coefficientem longitudinem induere poſſe formam, itaque applicatione facta, proueniat ortiua magnitudo d; itaut illa æquatio ad hanc ſit reuocata $a^2 + b\,a = b\,d$, & ex hypotheſi, quod e^2 æquetur $b\,a$, per applicationem proueniet $\frac{e^2}{b} = a$; quare in ſuperiori æqualitate, ad analogiſmum reuocata ſit vt $a + b$ ad b, ita d, ad a, ergo ſi loco ipſius a, ſubſtituatur $\frac{e^2}{b}$, fiet vt $\frac{e^2}{b} + b$ ad b, ita d ad $\frac{e^2}{b}$ vnde per multiplicationem inſtitutam inter extrema, & media, rurſus proueniet æquatio $\frac{e^4}{b^2} + e^2 = b\,d$; omnibuſque ductis in b^2, fiet $e^4 + b^2 e^2 = b^3 d$. Itaque æquationem in qua quadratoquadratum afficitur affirmatè ſub quadrato, per interceptum analogiſmum ab æquatione in qua quadratum afficitur affirmatè ſub latere, deduximus, Quod oportebat, &c.

Æquationum in quibus quadrato quadratum afficitur ſub quadrato deductio Auctoris methodo ab æquationibus quadraticis.

Si $a^2 - b\,a$ æquetur z plano Manifeſtum eſt homogeneum datæ menſuræ aliam per eius applicationem ad coefficientem longitudinem induere poſſe formam; Itaque applicatione facta, proueniat ortiua magnitudo d; itaut illa æquatio ad hanc ſit reuocata $a^2 - b\,a = b\,d$, & ex hypotheſi quod e^2 æquetur $b\,a$ per applicationem proueniet $\frac{e^2}{b} = a$, quare cum ſuperiori æqualitate ad analogiſmum reuocata, ſit vt $a - b$, ad b, ita d, ad a; ergo ſi loco ipſius a, ſubſtituatur $\frac{e^2}{b}$, fiet vt $\frac{e^2}{b} - b$ ad b ita d ad $\frac{e^2}{b}$; vnde per multiplicationem inſtitutam inter extrema, & media, rurſus proueniet æquatio $\frac{e^4}{b^2} - e^2 = b\,d$; omnibuſque ductis in b^2, fiet $e^4 - b^2 e^2 = b^3 d$. Itaque æquationem in qua quadratoquadratum afficitur negatè ſub quadrato per interceptum analogiſmum, ab æquatione in qua quadratum afficitur negatè ſub latere deduximus, Quod oportebat, &c.

Æquationũ, in quibus quadratoquadratum afficitur ſub quadrato deductio Auctoris methodo ab æquationibus quadraticis.

Si $b\,a - a^2$ æquetur z plano, Manifeſtum eſt homogeneum datæ menſuræ, aliam per eius applicationem, ad coefficientem longitudinem induere poſſe formam; itaque applicatione facta, proueniat ortiua magnitudo d, itaut illa æquatio ad hanc ſit reuocata $b\,a - a^2 = b\,d$ ex hypotheſi, quod e^2 æquetur $b\,a$ per applicationem proueniet $\frac{e^2}{b} = a$, quare cùm ſuperiori æquatione ad analogiſmum reuocata ſit, vt $b - a$ ad b ita d ad a ergo ſi loco ipſius a, ſubſtituatur $\frac{e^2}{b}$, fiet vt $b - \frac{e^2}{b}$ ad b; ita d ad $\frac{e^2}{b}$; vnde per multiplicationem inſtitutam inter extrema, & media; rurſus proueniet ęquatio $e^2 - \frac{e^4}{b^2} = b\,d$; omnibuſque ductis in b^2, fiet $b^2 e^2 - e^4 = b^3 d$. Itaque ęquationem quadratoquadraticam ἀμφιβολῶς affectam, ſub quadrato per interceptum analogiſmum ab ęquatione, in qua quadratum afficit homogeneum ſub latere, deduximus, Quod oportebat, &c.

Quadratoquadrata quidem affecta ab affectis quadratis quoque deducuntur, de quo hic aliqua dicenda occurrunt, at primò cùm quadratum fuerit affectum ſub latere. Sit igitur ęquatio καταφατική.

Quadratoquadraticarum æquationum deductio ab affectis quadratis.

Si $a^2 + b\,a$ ęquetur z plano; Hinc deducetur ęquatio quadratoquadratica, puta $a^4 + \overline{b^2 + 2\,b\,z\,pl.}\;a = z\,pl.pl. + b^2\,z\,pl.$

Hunc enim in modum ratiocinandum. Cùm ſit ęquatio $a^2 + b\,a = z$ plano, ergo per antitheſin a^2 ęquabitur $z\,pl. - b\,a$, vtraque parte ducta quadraticè, fiet $a^4 = z\,pl.pl. - 2\,b\,z\,pl.\,a + b^2 a^2$. At verò affectio illa $b^2 a^2$ ex ęquatione propoſita interpretationem accipiens, valet $b^2\,z\,pl. - b^3 a$; etenim ſi ſit ęquatio $a^2 = z\,pl. - b\,a$, & vtraque pars ducatur in b^2, fiet $b^2 a^2 = b^2\,z\,pl. - b^3 a$, huiuſmodi propterea adſcita interpretatione, ordinationeq; facta ſecundum Artem, proueniet ęquatio,

vt

vt ſupra dicebamus; Igitur ęquatio quadratoquadratica affecta à quadratica affecta ſub latere deducitur. Sed numeris hęc illuſtremus.

Si 1 Q † 10 R æquetur 24, etiam 1 Q Q ✣ 1480 R ęquabitur 2976. Cùm enim 1 Q ✣ 10 R æquetur 24; per antitheſin etiam 1 Q ⩵ 24 — 10 R, & vtraque parte ducta quadraticè; fiet 1 Q Q ⩵ 576 — 480 R † 100 Q. At verò 100 Q valebunt 2400 — 1000 R, nam ęquationis vtraque parte ducta in 100 quadratum ex 10; producitur ęquatio 100 Q ⩵ 2400 — 1000 R Quamobrem ſi loco 100 Q ſubſtituamus 2400 — 1000 R, hoc eſt ad 576 — 480 R, addamus 2400 — 1000 R, fiet ſumma 2976 — 1480 R, & erit 1 Q Q ⩵ 2976 — 1480 R, & per antitheſin fiet 1 Q Q ✣ 1480 R ⩵ 2976. Hinc itaque patent, quę ſuperiùs attulimus; cùm ſcilicet quadratoquadratum ab affecto quadrato ſub latere deducitur. Sit deinde æquatio *ἀποφατικὴ*.

Proponitur æquatio quadratici ordinis affirmatiua vnde quadratoquadratica deducitur affecta ſub latere.

Nęc diſſimiliter ſi a^4 — b a æquetur z plano; proueniet etiam æquatio huiuſmodi $a^4 - \overline{b^3 - 2\, b\, z\, pl.}\; a$ ⩵ z pl.pl. † b^2 z pl., & in hac non ſecus, ac in præcedenti diſcurrendum. Numeris hæc declarantur; nam.

Si 1 Q — 10 R æquetur 24; proueniet hinc æquatio 1 Q Q — 1480 R ⩵ 2976 Quod ſi fuerit æquatio *ἀμφίβολος*, Vt ſi b a — a^2 æquetur z plano; prouenit æquatio hunc in modum $\overline{b^3 - 2\, b\, z\, pl.}\; a - a^4$ ⩵ b^2 z pl. — z pl.pl., quod ex ſupra traditis facillimum eſt deprehendere.

Proponitur æquatio negatiua quadratici ordinis vnde quadratoquadratica deducitur affecta ſub latere. Numeris eadem tractantur.

Si 11 R — 1 Q æquetur 24; erit etiam æquatio huiuſmodi 803 R — 1 Q Q ⩵ 2328; quæ ſic declarari poſſunt. Quoniam enim 11 R — 1 Q æquatur 24, fiet per antitheſin 1 Q ⩵ 11 R — 24; vtraque parte ducta quadraticè, fiet 1 Q Q ⩵ 121 Q — 528 R † 576. At verò 121 Q valent 1331 R — 2904; etenim ſi vtraque æquationis pars ducatur in 121, quadratum ex 11; fiet 121 Q ⩵ 1331 R — 2904. Itaque 121 Q valent, vt ſupra dicebamus 1331 R — 2904; proinde ſi ad — 528 R † 576 addamus 1331 R — 2904, fiet ſumma 803 R — 2328, æqualis ipſi 1 Q Q, vt dictum eſt.

Quòd ſi aperienda eſt deductionis ratio biquadratorum affectorum, tam ſub quadrato, quàm ſub latere à quadratis affectis ſub latere; ita ratiocinandum.

Si a^2 † b a æquetur z pl. ✣ d pl. erit etiam æquatio $a^4 - \overline{2\, d\, pl.} - b^2\; a^2$ † 2 b z pl. a ⩵ z pl.pl. — d pl. plano.

Quoniam enim a^2 † b a æquatur z pl. ✣ d pl. fiet per antitheſin ęquatio a^2 — d pl. ⩵ z pl. — b a, vtraque parte ducta quadraricè, fiet a^4 — 2 d pl. a^2 ✣ d pl. pl. ⩵ z pl. pl. — 2 b z pl. a † b^2 a^2, omnibus autem ritè ordinatis, proueniet æquatio, quam ſuperiùs attulimus.

Si 1 Q ✣ 10 R ⩵ 80 ✣ 16 hoc eſt 96, compoſito ex 80, & 16, erit etiam æquatio 1 Q Q — 132 Q † 1600 R ⩵ 6144.

Cùm enim ſit 1 Q † 10 R ⩵ 80 † 16 erit per antitheſin 1 Q — 16 ⩵ 80 — 10 R, & vtraque parte ducta quadraticè, fiet 1 Q Q — 32 Q † 256 ⩵ 6400 — 1600 R ✣ 100 Q & ordinata ęquatione ſecundum, Artem proueniet 1 Q Q — 132 Q ✣ 1600 R ⩵ 6144.

Deductis quadratoquadraticarum æquationum ſub quadrato, & latere affectarum, à quadraticis affectis. Primo proponitur affirmatiua quadratica vnde ſit deductio. Secundo negatiua itidem quadratica vnde ſit deductio. Numeris eadem tractantur.

S C H O L I O N.

QVæ de, ſpeciebus diximus, numeris accommodari poſſunt. Vt ſi per a^2 intelligamus 36. Itaut ipſius a, valor ſit 6, inſuper per b, intelligamus 10; vt per d, 16; & per z; 80, & eodem pacto ratiocinando, inuenies æquationem inter ea, quæ diximus, & hæc eadem declaratio iuxta præſcriptum radicis valorem fieri poterit in æquatione numeroſa, etenim 1 Q Q valebit 4752, & 1600 R valebunt 9600, itaut 1 Q Q — 132 Q † 1600 R valeant 6144, quantum valet altera æquationis pars. Itaquidem ſi 1 Q † 10 R æquetur 96, per antitheſin fiet 1 Q ⩵ 96 — 10 R, vtraque parte ducta quadraticè,

Superiora ſpeciebus tradita numeris explicantur.

fiet

fiet 1 QQ = 9216 — 1920 R † 100 Q, & ordinata æquatione, proueniet 1 QQ — 100 Q ✠ 1920 R = 9216.

Æquatio negatiua. Si a^4 — b a æquetur z pl. ✠ d pl. erit quoque a^4 — $\overline{2\ d\ pl. - b^2}$ a^2 — 2 b z pl. a = z pl. pl. — d pl. plano.

Æquatio amphibola. Si 1 Q — 10 R æquetur 80 † 16 hoc eſt 96 compoſito, &c. etiam 1 QQ — 132 Q — 1600 R æquabitur 6144.

Si b a — a^4 æquetur z pl. ✠ d pl. etiam $\overline{b^2 - 2\ z\ pl.}$ a^2 — 2 b d pl. a — a^4 æquabitur z pl. pl. — d pl. plano.

Si 22 R — 1 Q = 80 † 16 hoc eſt 96, &c. erit etiam 324 Q — 704 R — 1 QQ = 6144.

Æquatio affirmatiua, vbi comparationis homogeneum eſt per modũ differentiæ. Si a^4 ✠ b a, æquetur z pl. — d pl. etiam a^4 ✠ $\overline{2\ d\ pl. - b^2}$ a^2 † 2 b z pl. a æquabitur z pl. pl. — d pl. pl.

Cùm enim a^2 ✠ b a, æquetur z plano — d plano; per antitheſin a^2 † d pl. = z pl. — b a; vtraque parte ducta quadradraticè, proueniet a^4 ✠ 2 d pl. a^2 ✠ d pl. pl. = z pl. pl. — 2 b z pl. a † b^2 a^2, & ordinatione facta ſecundum Artem, proueniet æquatio vt ſupra.

Si 1 Q ✠ 10 R, æquetur 84 — 60; hoc eſt 1 Q ✠ 10 R æquetur 24, differentiæ inter 84, & 60, & erit etiam æquatio 1 QQ ✠ 20 Q ✠ 1680 R = 3456.

Cùm enim ſit 1 Q ✠ 10 R = 84 — 60; erit per antitheſin 1 Q ✠ 60 = 64 — 10 R, & vtraque parte ducta quadraticè, fiet 1 QQ ✠ 120 Q ✠ 3600 = 7056 — 1680 R ✠ 100 Q, & ordinatione proueniet 1 QQ ✠ 20 Q † 1680 R = 3456.

Quando comparationis homogeneũ non proponitur per modum differentiæ, &c. At ſi comparationis homogeneum non proponatur per modum differentiæ ſed; ſit æquatio 1 Q ✠ 10 R = 24. Per antitheſin fiet 1 Q = 24 — 10 R, & vtraque parte ducta quadraticè, fiet 1 QQ = 576 — 480 R † 100 Q, & ordinata ęquatione fiet 1 QQ — 100 Q ✠ 480 R = 576. Quæ numeris declarantur, nam in illa æquatione 1 Q † 10 R = 84 — 60 radicis pretium eſt 2, & ideo in ęquatione 1 QQ ✠ 20 Q ✠ 1680 R = 3456 cùm ſit idem radicis valor 1 QQ valebit 16, & 20 Q valebunt 80, demum 1680 R; valebunt 3360, itaut 1 QQ ✠ 20 Q ✠ 1680 R valeat 3456, quantus eſt valor alterius partis, &c. & in illa alia æquatione 1 QQ — 100 Q † 480 R = 576 certè 1 QQ, valebit 16, & 100 Q valebunt 400 inſuper 480 R, valor erit 960 itatut totius 1 QQ — 100 Q † 480 R, pretium ſit 576, quantum eſt pretium alterius partis.

Æquatio negatiua. Si a^2 — b a = z pl. — d pl. erit etiam a^4 † $\overline{2\ d\ pl. - b^2}$ a^2 — 2 b z pl. a = z pl. pl. — d pl. plano.

Si 1 Q — 10 R æquetur 84 — 60; etiam 1 QQ † 20 Q — 1680 R, æquabitur 3456.

Æquatio amphibola. Si b a — a^2 ęquetur z pl. — d pl. etiam 2 b d pl. a † $\overline{b^2 - 2\ z\ pl.}$ a^2 — a^4 æquabitur z pl. pl. — d pl. plano;

Si 14 R — 1 Q æquetur 84 — 60 hoc eſt 24 differentiæ inter 84, & 60; etiam 1680 R † 28 Q — 1 QQ = 3456, &c.

Sed hæc ad Artis integritatem, abſolutamque tractationem ex Vieta dicta ſint, quod noſtrum eſt ſubijciamus, & quod attinet ad affectionem biquadratorum, ſub latere, & quadrato; non aliter inſtituenda ſolùm id adſtlam; etiam à quadrato affecto ſub latere deduci poſſe quadratoquadratum affectum ſub quadrato, & latere, quamuis homogeneum datę menſuræ ſimplex conſtitueretur, vnde cùm fuerit a^2 † b a = z plano; Perſpicuum eſt per antitheſin fieri poſſe a^2 = z plano — b a, & vtraque parte æquationis ducta quadraticè fit a^4, ęquale z pl. pl. — 2 b z pl. a † b^2 a^2, & per antitheſin fiet a^4 — b^2 a^2 ✠ 2 b z pl. a = z pl. pl. hunc enim in modum ordinata erit æquatio.

Affectio quadratoquadratorum multiplex. Proponitur exemplum idèque declaratur, Affectio quadratoquadratorum, eſt vel ſub cubo, vel ſub cubo, & quadrato. Ad primam affectionem, quod attinet: de his enim in preſenta loquimus, non ignorantes alijs quoque modis affectionem contingere.

Si a^2 † b a ęquetur z plano, etiam a^4 $\overline{\frac{\text{✠ 2 b 3 pl. ✠ b 3}}{\text{z pl. ✠ b a}}}$ a^2 æquabitur $\frac{\text{z pl. pl. b}}{\text{z pl. ✠ b a}}$.

Cùm enim a^2 † b a æquatur z pl. fiet æquatio per antitheſin a^2 = z pl. — b a omnibus ductis in a, & erit a^3 = z pl. a — b a^2. Cùm autem a^3 æquetur z pl. — b a;

b a; loco ipſius a^2 ſubrogetur z pl. — b a; factaque multiplicatione per — b, fiet productum — b z pl. + b^2 a; ob id a^2 æquabitur z pl. a — b z pl. + b^2 a, & per antitheſin ad hanc reuocabitur a^2 + b z plano = z plano a + b^2 a; vtraque parte diuiſa per z pl. + b^2, proueniet æquatio $\frac{a\,a + b\,z\,pl.}{z\,pl. + b\,b} = \frac{z\,pl.\,a + b\,b\,a}{z\,pl. + b\,b}$; ergo $\frac{a\,a + b\,z\,plano}{z\,pl. + b\,b}$ æquabitur a. Dicitur autem a^2 æquari z plano — b a, tantum igitur valet ipſum a^2; propterea ex deſignato valore ipſius a id ita exprimetur $a^2 = \frac{z\,pl.pl. - b\,a\,a}{z\,pl. + b\,b}$ ſi enim loco ipſius a, intelligamus $\frac{a\,a + b\,z\,pl.}{z\,pl. + b\,b}$, & hanc fractionem ducamus in b; quandoquidem in b, ducebatur a, facta verò multiplicatione; proueniet $\frac{b\,a\,a + b\,b\,z\,pl.}{z\,pl. + b\,b}$. Hac verò ſubducta fractione ex z plano; cùm eſſet z pl. — b a, remanebit z pl. — $\frac{b\,a\,a + b\,b\,z\,pl.}{z\,pl. + b\,b}$, ſeu quod idem eſt $\frac{z\,pl.pl. - b\,a\,a}{z\,pl. + b\,b}$; etenim ſi à z plano ſubtrahi debet $\frac{b\,a\,a + b\,b\,z\,pl.}{z\,pl. + b\,b}$ reduci debet ipſum z planum ad fractionis naturam, & hac inſtituta pragmatia, proueniet $\frac{z\,pl.pl. + b\,b\,z\,pl.}{z\,pl. + b\,b}$ ab hoc autem, ſi ſubtrahatur fractio $\frac{b\,a\,a + b\,b\,z\,pl.}{z\,pl. + b\,b}$ remanebit, vt ſupra $\frac{z\,pl.pl. - b\,a\,a}{z\,pl. + b\,b}$. Vbi obſerua, in illa reductione, ductum fuiſſe z pl. in denominatorem z pl. + b^2; atque adeo proueniſſe, quod dictum eſt; quamobrem æquatio proueniet $a^2 = \frac{z\,pl.pl. - b\,a\,a}{z\,pl. + b\,b}$.

Continuatio explicationis ſupradictorum.

Redeamus nunc ad primam æquationem a^2 + b a = z plano; ducta vtraque parte quadraticè, prouenit æquatio huiuſmodi a^4 + 2 b a^3 + b^2 a^2 = z pl. plano. At verò accepta interpretatione ex deſignato gradu ipſius a quadrati valore, illa quidem affectio b^2 a^2, idem planè erit, quod $\frac{b^2\,z\,pl.pl. - b^3\,a\,a}{z\,pl. + b\,b}$ hac autem adſcita interpretatione, atque omnibus ſecundùm Artis præcepta diſpoſitis, proueniet æquatio a^4 + $\frac{2\,b\,z\,pl. + b^4}{z\,pl. + b\,b}$ a^2 = $\frac{z\,pl.pl.pl.}{z\,pl. + b\,b}$. Atque hunc in modum quæ aliàs à Vieta tradita fuerunt, ſic enucleauimus, vt facilè cuique perſpecta eſſe poſſint, quare;

Fit reditus ad primam æquationem affirmatiuam.

Si 1 Q + 14 R æquetur 147, etiam 1 Q Q + 20 C æquabitur *9261*.

Namque per b; intelligimus *16*, per z planum, verò *192*, & per a, ac per 1 R, intelligimus 7; proinde $\frac{2\,b\,z\,pl. + b^4}{z\,pl. + b\,b}$ a^2 valebit 20 C, & $\frac{z\,pl.pl.pl.}{z\,pl. + b\,b}$ valebit *9261*, etenim z pl. pl. pl. valor eſt 317523; hic numerus ſi diuidatur per 343 pretium ipſius z pl. + b^2, fit quotiens *9261*; at verò 1 Q Q eſt 2401, & 20 C valent *6860*. Itaque 1 Q Q + 20 C valebunt *9261*, quantus eſt valor alterius partis ipſius æquationis.

Numeris eadem tractantur.

Si a^2 — b a æquetur z plano; etiam a^4 — $\frac{2\,b\,z\,pl. - b^4}{z\,pl. + b\,b}$ a^2 æquabitur $\frac{z\,pl.pl.pl.}{z\,pl. + b\,b}$. Vtar ipſius Vietę numeris; hoc enim nihil refert, & ſi 1 Q — 14 R ęquetur 147 etiam 1 Q Q — 20 C æquabitur *9261*, quod eodem pacto declarabitur.

Æquatio quadratica negatiua.

Si b a — a Q æquetur z plano, etiam $\frac{b^4 - 2\,b\,z\,pl.}{b\,b - z\,pl.}$ a^2 ęquabitur $\frac{z\,pl.pl.pl.}{b\,b - z\,pl.}$.

Si 21 R — 1 Q ęquetur 98, etiam 15 C — 1 Q Q ęquabitur 2744; declarantur, vt ſupra.

Numeris eadem tractantur.

Cùm autem affectio fuerit, etiam ſub quadrato, ab æquatione quadratica affecta ſub latere à nobis deducitur, per interceptum analogiſmum; etenim.

Si a^2 + b a æquetur z pl.; manifeſtum eſt homogeneum datæ menſuræ per applicationem ad coefficientem longitudinem poſſe nouam ſuſcipere formam; quamobrem applicatione facta, proueniet ortiua magnitudo, exempli gratia d; igitur æquatio illa, ad hanc erit reuocata a^2 + b a = b d. Hac autem ad analogiſmum redacta, fiet vt a + b ad b, ita d ad a, quare etiam horum terminorum quadrata proportionalia erunt; proinde, vt a^2 + 2 b a + b^2 ad b^2 ita d^2 ad a^2; ergo multiplicatis extremis, & medijs; fiet æquatio huiuſmodi a^4 + 2 b a^3 + b^2 a^2, quod æquabitur b^2 d^2. Hoc enim pacto æquatio ordinata eſt.

Et quidem huiuſmodi ratione ęquationes quadratoquadraticæ, in quibus affectio eſt ſub cubo, & quadrato, ab æquationibus quadraticis affectis ſub latere, per interpoſitum analogiſmum deducentur.

Quando affectio fuerit etiã ſub quadrato. Qua ratione æquationes quadratoquadratica in quibus affectio eſt ſub cubo, & quadrato ab æquationibus quadraticis affectis ſub latere per interpoſitũ analogiſmum, deducantur.

Per climacticum autem regularem aſcenſum cubicæ ęquationis amphibolæ, vbi affectio eſt ſub latere, à quadraticis affectis ſub latere, deducuntur, etenim.

Si a^2 + b a ęquetur z plano; per communem multiplicationem ipſius a, fit cubica a^3 + b a^2 = z pl. a; de ſe tamen inutilis, cùm deſit homogeneum datæ menſuræ; propterea ad id conſequendum dicam vt a^2 + b a ęquatur z plano, certè per antitheſin fiet a^2 = z plano — b a; quoniam autem a^3 + b a^2 erat ęqualis z pl. a; adſcita interpretatione quòd a^2 æquetur z plano — b a; ducatur hoc in b; hoc enim pacto in locum ipſius gradus a^2 ſubſtitutum erit z pl. — b a, & illud ſolidum per

adſcitam interpretationem, erit alio modo expreſſum; factaque multiplicatione, prouenict a^3 ✠ b z pl. — b^2a, quod ęquabitur z plano a, eadem enim retinetur æquationis pars; cum qua erat comparatio inſtituta; quare ordinatione facta per antitheſin congruam $\overline{\text{z planum ✠ } b^2}$ a — a^3 ęquabitur b z plano. Vnde huiuſmodi facta eſt æquatio ſolida, in qua cubus de homogeneo negatur, deducta ex ęquatione quadratica; quæ numeris hunc in modum declarari poſſunt.

b Æquatio cubica

Si ſit 1 Q † 10 R = 24, etiam 124 R — 1 C ęquabitur 240, cùm enim 1 Q † 10 R æquetur 24, omnibus ductis in 1 R fiet 1 C † 10 Q = 24 R; at verò 1 Q æquatur 24 — 10 R, vt per antitheſin eſt manifeſtum eſt; ergo adſcita hac interpretatione ad exprimendum valorem ipſorum, 10 Q; proinde erit 1 C † 240 — 100 R = 24 R, & ordinata ęquatione, erit 124 R — 1 C = 240; & ita quidem eſt, ſiquidem in æquatione 1 Q ✠ 10 R = 24 radicis valor eſt 2, itaque 1 C valebit 8, & 124 R valebunt 248, at ſi à 248 ſubducamus 8, cùm ſit æquationis pars 124 R — 1 C; remanebit 240. altera ęquationis pars.

Æquatio quadratica, vnde deducitur cubica negatiua

Si a^2 — b a æquetur z plano, & a^3 — $\overline{b^2 - \text{z pl.}}$ a æquabitur b z plano.

Quoniam enim a^2 — b a æquatur z plano, omnibus ductis in a, (ita enim fit climacticus aſcenſus) erit a^3 — b a^2 = z pl. a, & quia erat a^2 — b a = z pl. per antitheſin; fiet a^2 = z pl. — b a; quare in locum ipſius a^2, ſubſtituatur æquipollens z pl. — b a; vnde ducatur z pl. — b a in b, vt fiat b z pl. — b^2a, ad exprimendum homogeneum illud b a^2; propterea a^3 — b z pl. — b^2 a, æquabitur z plano a, & ordinata æquatione; fiet a^3 — $\overline{\text{z pl.} - b^2}$ a = b z pl. quod erat faciendum.

Itaque.

Si 1 Q — 10 R, æquetur 24; etiam 1 C — 124 R æquabitur 240. Nec diſſimiliter.

Æquatio eadem numeris tractatus.

Si b a — a^2 æquetur z plano, etiam $\overline{b^2 - \text{z plano}}$ a — a^3 æquabitur b z plano.

Æquatio quadratica vnde cubica deducitur.

Quoniam enim b a — a^2 æquatur z plano, omnibus ductis in a fiet b a^2 — a^3 = z plano a, & quia b a — a^2, æquabatur z plano, per antitheſin fiet b a — z plano = a^2; ergo ipſius a^2 pretium erit b a — z plano, hoc igitur ducatur in b, ad exprimendum valorem illius ſolidi b a^2; per adſcitam interpretationem ipſius b a^2, & fiet b^2 a — b z plano — a^3 = z plano a, & per antitheſin $\overline{b^2 - \text{z pl.}}$ a — a^3 æquabitur b z plano. Vnde

Æquatio eadem numeroſe tractatur.

Si 14 R — 1 Q æquetur 24 etiam 172 R — C æquabitur 336. Inſuper.

Si a^2 ✠ b a æquetur b d; etiam a^3 ✠ $\overline{b \dagger d}$ a^2 æquabitur b d^2.

Æquatio quadratica vnde cubica deducitur

Quoniam enim a^2 ✠ b a æquatur b d, omnibus ductis in a; fiet a^3 ✠ b a^2 = b d a; at verò cùm a^2 † b a æquetur b d, per antitheſin b a, æquabitur b d — a^2 vtraque parte diuiſa per b; fiet $\frac{bd - aa}{b}$ = a. Hac adſcita interpretatione, ad exprimendum valorem ipſius b d a, prouenict a^3 † b a^2 = b d^2 — d a^2, propterea quod ſi $\frac{bd - aa}{b}$ ducatur in b d; ſiquidem a, ducitur in b d, fiet $\frac{bdd - bdaa}{b}$; hoc eſt, omnibus diuiſis per b; fiet b d^2 — d a^2, At verò ſuperior æquatio a^3 † b a^2 = b d^2 — d a^2 per antitheſin fiet a^3 ✠ $\overline{b ✠ d}$ a^2 = b d^2; quamobrem ab illa ſuperiori ęquatione quadratica deducta eſt hæc cubica affecta ſub quadrato. Vnde

Si 1 Q ✠ 12 R æquetur 108, facto ex 12 in 9; etiam 1 C ✠ 21 Q æquabitur 972, cùm enim 1 Q ✠ 12 R æquetur 108 facto ex 12 in 9; omnibus ductis in 1 R, fiet 1 C ✠ 12 Q = 108 R, At verò $\frac{108 - 1Q}{12}$ æquatur 1 R hac ergo adſcita interpretatione, ad exprimendum valorem ipſarum 108 R, erit 1 C ✠ 12 Q = 972 — 9 Q, & per antitheſin fiet 1 C ✠ 21 Q = 972.

Qua-

Quarundam æquationum conſtitutio perpenditur.

CAPVT XX.

PRæcipua quædam eſt quarundam æquationum conſtitutio; ſiquidem nonnullæ ſunt correlatæ nuncupatę, quas ſuperiùs deſcripſimus, è quibus, aliquæ ſunt amphibolæ; aliæ contradicentes, aliæ demum inuerſæ. Amphibola æquatio quid ſit, iam ſuperiùs notauimus; in qua ſcilicet poteſtas de homogeneo affectionis negatur; vnde, cùm vtraque ita fuerit, & in vtraque, eadem coefficiens magnitudo, idem homogeneum datæ menſuræ; huiuſmodi æquationes correlatæ; ſimileſque dicentur.

Quarundam æquationum præcipua conſtitutio.

Amphibola æquatio quid.

Contradicentes illæ verò ſunt, in quarum vna poteſtas affirmatè afficitur, in altera negatè.

Contradicentes æquationes quæ.

Inuerſę denique in quarum vna poteſtas afficitur multa homogeneæ affectionis In altera homogenea affectionis afficitur multa poteſtatis. Harum autem peculiares, præcipuęque ſunt conſtitutiones, qua de re Vieta etiam ediſſerit loco ſupra citato de Recognitione ęquationum.

Inuerſæ æquationes quæ.

Quia tamen hæc non vni ęquationum generi conueniunt; propterea, vt etiam Vieta obſeruat, generali quadam ratione tractanda ſunt, vt deinde, vni vel alteri ęquationi accommodentur; quod vt clariùs intelligas; eùm dicimus in ęquatione amphibola ordinis quadratici, coefficientem longitudinem oriri ex applicatione differentiæ quadratorum ad differentiam laterum; & comparationis homogeneum oriri ex applicatione differentiæ reciprocè à quadrato vnius, in radicem alterius ad differentiam earũdem radicum, id ſuo modo non tam de æquationibus quadratici, quàm cubici vel alterius ordinis, intelligenda ſunt. Vnde ſi fuerit æquatio amphibola ordinis quadratici 24 R — 1 Q ⚌ 95 cuius radices ſunt 5, & 19, coefficiens 24, oritur ex applicatione 336, differentia inter 361, & 25, quadrata radicum 19, & 5, propoſitę ęquationis, ad 14, differentiam earundem radicum, ſi enim 336, diuidatur per 14, prouenit 24; Deinde ſi 361, quadratum radicis maioris, puta 19, ducatur in 5, radicem minorem, fit 1805, & ſi 25, quadratum radicis minoris ducatur in 19, radicem maiorem, fit 475, horum differentia eſt 1330, qua diuiſa per 14, differentiam ipſarum radicum, fit quotiens 95; nempe comparationis homogeneum.

Quoniã mox tractãda non vni æquationũ generi conueniunt; propterea iuuat generali quadã ratione illa tractare.

Æquatio amphibola ordinis quadratici.

Sed hæc etiam in cubicis, vt ſi 364 R — 1 C æquetur 720; cuius radices ſunt 2, 18; cubus ex 2, eſt 8, at ex 18, eſt 5832, quorum differentia eſt 5824, quæ ſi applicetur ad 16, differentiam ipſarum radicum 2, & 18, prouenit 364 coefficiens planum ſublaterale. At verò ſi 5832, cubus radicis maioris ducatur, in 2, radicem minorem fit 11664; & ſi 8 cubus minoris ducatur in 18, radicem maiorem, producitur 144; at ſi ex 11664, ſubtrahatur 144, remanet 11520, quo diuiſo per 16, differentiam laterum, proſilit in quotiente 720, ſolidum comparationis nimirum homogeneum.

Cubicæ æquationes amphibolæ.

Generali propterea quadam ratione inſtituenda eſt pragmatia, vnde genera adhibendo ſpecierum loco, ſic operabimur, quod etiam apud Vietam videre licet.

Generali ratione inſtituitur pragmatia.

Si b parabola in a gradum — a poteſtate, æquetur z homogeneę, & rurſus b parabola in e gradum — e poteſtate, æquetur z homogeneę.

Proinde b parabola in a gradũ — a poteſtate, ęquabitur b parabolę in e gradũ — e poteſtat; per antitheſin verò ſtatuendo a, maiorem, quàm e, quod liberum hic eſt, ob præ-

 ſuppoſi-

Explicatio ſupra ditiorum. ſupoſitam radicem amphibolam; ob id a poteſtas — e poteſtate, ęquabitur b parabolæ in a gradum — b parabola in e gradum. Omnibus autem per a gradum — e gradu diuiſis; prouenіet æquatio huiuſmodi $\frac{\text{a poteſtas} - \text{e poteſtate}}{\text{a gradus} - \text{e gradu}}$ æquabitur b parabolæ.

Hinc autem addiſcimus b parabolam oriri ex applicatione differentię poteſtatum ad differentiam graduum. Quoniam verò b parabola in a gradum, minus a, poteſtate, ęquatur z homogeneæ, ſi in locum ipſius b parabolæ ſubrogetur cognitus eius valor, & ea quidem ſubrogatione, æquatio reformetur, nouaque inſtituatur $\frac{\text{a poteſtas in e gradum} - \text{e poteſtate in a gradum}}{\text{a gradus} - \text{e gradu}}$ ęquabitur z, homogeneę.

Quid eſt ſupropoſita æquatione colligatur. Hinc addiſcimus z homogeneam oriri ex applicatione differentię reciprocè à poteſtate vnius radicis in gradum alterius ad differentiam graduum.

Quamobrem ęquationibus ambiguis cuiuſque ordinis hęc ſatisfacere quidem poſſunt, & vniuerſa hæc Theoria aptari poteſt ſingulis æquationibus, ſi videlicet loco poteſtatis intelligatur quadratum, vel cubus, &c. & loco gradus intelligatur latus, ſiue radix; denique loco homogeneæ intelligatur quantitatis genus, prout æquationis natura exigit, vnde ſi fuerit quadratica, intelligatur planum, ſi cubica, intelligatur ſolidium, &c.

Et quod initio notauimus hic facilè conſtabit, ſi nimirum, quod inferiùs præstabimus, generatim tradita, ſpeciatim tractentur, & æquationum ſpeciebus, ſiuè nimirum quadratici ſiue cubici vel alteriùs ordinis extiterint congruè aptentur.

Quando æquationes fuerint contradicentes. Si fuerint contradicentes, vt ſi a poteſtas — b coefficiente in a gradum, ęquetur z homogeneo, & rurſus e poteſtas — b coefficiente in e gradum, æquabitur z homogeneo; Propterea a poteſtas — b coefficiente in a gradum, æquabitur e poteſtati — b coefficiente in e gradum, & per antitheſin quidem e poteſtas — a poteſtate, ęquabitur b coefficienti in e gradum + b coefficiente in a gradum; propterea diuiſis omnibus per e gradum + a gradu, $\frac{\text{a poteſtas} - \text{e poteſtate}}{\text{a gradus} + \text{a gradu}}$ æquabitur b coefficienti.

Quid colligatur ex ſupra traditis. Hinc addiſcimus b coefficientem ſubgradualem oriri ex applicatione differentiæ poteſtatum ad aggregatum eorum, quos ſubſtinet coefficiens, graduum.

Cùm autem a poteſtas + b coefficiente in a gradum æquetur z homogeneo; in locum ipſius b coefficientis, ſubrogetur agnitus eius valor, nimirum $\frac{\text{a poteſtas} - \text{a poteſtate}}{\text{a gradus} + \text{a gradu}}$ & huiuſmodi ſubrogatione ſi reformetur ęquatio, a poteſtas + $\frac{\text{e poteſtate} - \text{a poteſtate}}{\text{a gradus} + \text{a gradu}}$ in a gradum, æquabitur z homogeneo; omnibus autem ritè ordinatis, atque diſpoſitis; $\frac{\text{a poteſtas in e gradum} - \text{e poteſtate in a gradum}}{\text{e gradus} + \text{e gradu}}$ ęquabitur z homogenea.

Quid colligatur ex ſupra traditis. Hinc deprehendimus, z homogeneum oriri ex applicatione aggregati factorum reciprocè à poteſtate radicis vnius, in gradum alteriùs, ad prædictum, cui applicatio facta eſt graduum, aggregatum.

Quando æquationes fuerint inuerſæ. Ad inuerſas demum, quod attinet,

Si a poteſtas — b coefficiente in a gradum æquetur z homogeneo, & rurſus eadem b coefficiens in e gradum — e poteſtate æquętur z homogeneo.

Propterea a poteſtas — b coefficiente in a gradum æquabitur b coefficienti in e gradum — e poteſtate, & per antitheſin a poteſtas + e poteſtate æquabitur b coefficienti in a gradum + b coefficiente in e gradum, omnibus autem per e gradum + a gradu diuiſis $\frac{\text{a poteſtas} + \text{e poteſtate}}{\text{a gradus} + \text{e gradu}}$ æquabitur b coefficienti. Itaque deprehendimus in inuerſis plane negatis ſubgraduales proficiſci ex applicatione poteſtatum, ad aggregatum eorum in quos coefficiens eſt graduum; cum autem a poteſtas — b coefficiente ſubgraduali in a gradum ęquetur z homogeneo; in locum ipſius b coefficientis, ſubrogetur agnitus eius valor, ſcilicet $\frac{\text{a poteſtas} - \text{e poteſtate}}{\text{a gradus} + \text{e gradu}}$; ergo a poteſtas — $\frac{\text{a poteſtate in e gradum} + \text{e poteſtate in a gradum}}{\text{a gradus} - \text{a poteſtate}}$ ęquabitur z homogeneo, atque adeo omnibus ritè diſpoſitis, ac ordinatis $\frac{\text{a poteſtas in e gradū} - \text{e poteſtate in a gradū}}{\text{a gradus} + \text{e gradu}}$ æquabitur z homogeneo igitur.

Homogeneum datę menſurę prouenit ex applicatione differentiæ factorum reciprocè à poteſtare radicis vnius in alteriùs gradum, ad prædictum, cui applicatio altera eſt facta graduum in quos coefficiens ſubgradualis eſt, aggregatum.

Inuerſa quarum vna per affirmationem altera per negationem. Quia tamen adſunt inuerſæ, quarum vna per affirmationem afficitur, altera per negationem, ob id.

Si a poteſtas + b coefficiente in a gradum æquetur z homogeneo, & rurſus eadem

dem b coefficiens in e gradum — e poteſtate, æquetur z homogeneo. Propterea a poteſtas ✠ b coefficiente in a gradum, æquabitur b coefficienti in e gradum — e poteſtate, & per antitheſin a poteſtas ✠ e poteſtate, æquabitur b coefficienti in e gradum — b coefficiente in a gradum. Omnibus igitur applicatis ad e gradum — a gradu, $\frac{\text{a poteſtas} - \text{a poteſtate}}{\text{a gradui} - \text{a gradu}}$ æquabitur b coefficienti.

Quid colligatur ex ſupra traditis.

In his igitur inuerſis coefficientes ſubgraduales proficiſcuntur ex applicatione aggregati poteſtatum ad differentiam eorum in quos coefficiens eſt graduum.

Cùm autem a poteſtas ✠ b coefficiente in a gradum, ęquetur z homogeneo, in locum coefficientis ſubgradualis ſubrogetur æquus valor, nempe $\frac{\text{a poteſtas} \maltese \text{a poteſtate}}{\text{a gradu} - \text{a gradui}}$ ergo a poteſtas ✠ $\frac{\text{e poteſtate} \maltese \text{e poteſtate}}{\text{e gradui} - \text{a gradu}}$ in a gradum æquabitur z homogeneo, & omnibus ritè diſpoſitis, ac ordinatis $\frac{\text{a poteſtas in a gradum} \maltese \text{e poteſtate in a gradum}}{\text{e gradus} - \text{a gradu}}$ æquabitur z homogeneo; Igitur deprehendimus.

Quid colligatur ex ſupra traditis.

Homogeneum datæ menſuræ oriri ex applicatione aggregati factorum reciprocè à poteſtate radicis vnius in gradum alteriùs, ad prædictam, cui altera facta eſt applicatio graduum, in quos coefficiens eſt, differentiam,

Nunc ſpecialis inſtituitur tractatio.

Hucuſque generatim; ſequitur modo, vt eadem ſpeciatim tractemus, & primò initio deſumpto à conſtitututione æquationum amphibolarum.

Sincriſeos doctrina explicatur.

Ad has autem conſtitutiones deprehendendas, haud mediocriter comparatio conducit, quam Græci σύγκρισιν appellant.

Explicatio ſincriſeos doctrinæ.

Æquationis quadraticæ exemplum.

Si b a — a^2 ęquetur z plano, & rurſus b e — e^2 æquetur z plano; cum vtraque eidem z plano ęquetur, conſequens eſt, vt inter ſe ęquentur; quare b a — a^2 ęquabitur b ę — e^2; ergo per antitheſin ex hypotheſi, quòd a maior ſit quàm e, quod hìc liberum eſt; & $a^2 - e^2$ æquabitur b a — b e; omnibuſque diuiſis per a — e, $\frac{a^2 - e^2}{a - e}$ hoc eſt a † e æquabitur b. Itaque b, eſt ſumma duorum laterum quæſitorum, oriunda ex applicatione differentię quadratorum ad differentiam laterum. Cùm autem b a — a^2 æquetur z plano; ſi in locum ipſius b, ſubrogetur cognitus illius valor, nempe $\frac{a^2 - e^2}{a - e}$ ſiue a † e; vtique $\frac{a^2 e - e^2 a}{a - e}$ id eſt e a æquabitur z plano; quare z planum erit id, quod fit ſub duobus quæſitis lateribus, ortum ex applicatione differentię factorum reciprocè à quadrato vnius, in radicem alteriùs, ad a — e; hoc eſt ad differentiam laterum, etenim a — e differentia eſt inter a, & e vt patet.

Quædam comprobantur.

Cæterum ſi diuidatur $a^2 - e^2$ per a — e, oriri a ✠ e manifeſtum eſt; etenim ſi a^2 diuidatur per a; prouenit a; vt conſtat, quadratum ſiquidem lateri applicatum, reſtituit latus, at — per — ſi diuidatur, emergit †, & e^2, ſi per e, diuidatur emergit e.

Non nulla confirmantur.

Ex diuiſione ipſius a^2 e — e^2 a per a — e fieri quotientem e a; Manifeſtum eſt.

Numeris hucuſque tradita explicantur.

Hactenus tamen dicta numeris tractari poſſunt hac Arte.

Supponamus ipſius a, valorem eſſe 6; ipſius verò b, eſſe 10; demum ipſius a plani eſſe 24; ob id erit æquatio 10 R — 1 Q = 24, & ſi valor ipſius e, ſit 4, erit æquatio eadem, vt patet, diſtinctionis tamen gratia ſecundis radicibus vtemur.

Prior ęquatio erit 10 R — 1 Q = 24. Secunda 10 A — 1 A Q = 24, & ita quidem eſt; nam in priori 10 R, valebunt 60, & 1 Q valebit 36; horum differentia eſt 24, vt patet. In ſecunda, ſeu poſteriori 10 A, hoc eſt decem ſecundæ radices erunt 40, & 1 A Q valebit 16, quorum differentia eſt itidem 24, & quia quę vni ęquantur ſunt inter ſe ęqualia, proinde 10 Q — 1 A Q ęquabitur 10 R — 1 Q omnibuſque diuiſis per 1 R — 1 A; vtque $\frac{1\,Q - 1\,AQ}{1\,R - 1\,A}$ id eſt 1 R † 1 A ęquabitur 10, & ita eſt, ſiquidem 1 Q valet 36, a quo ablato 1 A Q cuius valor eſt 16, remanet 20, hic ſi diuidatur per 1 R — 1 A, cuius valor eſt 2, fit quotiens 10, ergo 10, componitur ex duobus quęſitis lateribus, & hęc ſumma oritur, vt dictum eſt. Cum autem 10 R — 1 Q ęquetur 24; ſi in locum ipſius 10, ſubrogetur $\frac{1\,Q - 1\,AQ}{1\,R - 1\,A}$ ſeu 1 R † 1 A certè $\frac{1\,Q \text{ in } 1\,A - 1\,AQ \text{ in } 1\,R}{1\,R - 1\,A}$ id eſt 1 A in 1 R ęquabitur 24; proinde 24 eſt id, quod fit ſub duobus quęſitis lateribus, &c.

Explicatio, & comprobatio ſupradictorũ.

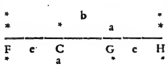
Cęterum $\frac{1\,Q \text{ in } 1\,A - 1\,AQ \text{ in } 1\,R}{1\,R - 1\,A}$. Id eſt 1 A in 1 R ęquari 24, patet; ſiquidem 1 Q valet 36; ergo 1 Q in 1 A, erit 144 a quo ſi auferamus 1 A Q in 1 R cuius valor eſt 96, remanebit 48, quo diuiſo per 1 R — 1 A, cuius valor eſt 2, fit quotiens 24.

Nos

Nos autem aliter huiuſmodi æquationum conſtitutionem inquirimus, & quidem ratione ſatis obuia.

Auctoris ratio explicandi ſu[as] propoſitas æquationes.

Sit recta F H, ſecta in punctis C, G itaut rectangulum H F G, minus quadrato F G, çquale ſit rectangulo H F C minus quadrato F C; ſeu quod idem eſt rectangulum F G H, çquale ſit rectangulo F C H, Manifeſtum eſt per rectam F H, repręſentari coefficientem longitudinem, & F G H, rectangulum & ei æquale rectangulum F C H, eſſe comparationis homogeneum; quamobrem radix maior erit F G, minor verò F C, quoniam autem rectangulum F G H, æquale eſt rectangulo F C H, erit F C, æqualis G H, vt conſtat ex Elementis; quamobrem coefficiens longitudo, eſt æqualis aggregato radicum; ſed hoc commune eſt omnibus çquationibus amphibolis, verùm hæ de quibus loquimur, ſunt correlatæ, ſunt enim ſimiles, ijſdemque magnitudinibus conſtant, & affectionum parabolis, & affectionum homogeneis, etſi radicibus diuerſis exiſtentibus, tum quia ipſæ æquationum formulæ, de duabus pluribuſque radicibus ex ſui conſtitutione ſunt explicabiles: vel in ijs diuerſa eſt affectionum nota, &c.

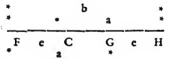


Explicatio ſupradictorum.

At ſi F H, eſt coefficiens, & radix vna ſit F G, nempe maior, & F C ſit minor, differentia quadratorum F G, F C, çqualis eſt differentiæ rectangulorum H F G, & H F C, at ſi tam prędictorum quadratorum differentia, quàm rectangulorum, applicetur ad differentiam laterum, puta C G, ex applicatione differentiæ quadratorum, ad C G oritur F G, plus F C, hoc eſt F H, ex applicatione differentiæ rectangulorum ad eandem C G, differentiam laterum, oritur F H, vnde, vt ſupra F H, eſt aggregatum duarum radicum, oriundum ex applicatione differentiæ quadratorum ad differentiam laterum. Quoniam verò rectangulum H F G, minus quadrato F G, æquale eſt rectangulo F G H; propterea liquidò conſtat comparationis homogeneum fieri ex multiplicatione duorum laterum quæſitorum, illudque oriri ex applicatione differentiæ factorum reciprocè a quadrato, radicis vnius æquationis, puta à quadrato ex F G, in G H, radicem alteriùs, & reciprocè, ad C G, differentiam laterum, quę planè ex hactenus traditis perſpicua ſunt.

Explicationis continuatio.

Repetatur ſuperior figura, itaque F H, erit b, at verò F G, erit a, & F C, erit e; quoniam verò ractangulum H F G, minus quadrato F G, çquale eſt ex hypotheſi rectangulo H F C, minus quadrato F C, nempe rectangulum F G H, æquale eſt rectangulo F C H, proinde, vt patet ex Elementis F C, æquabitur G H; atque adeo tam F C, quàm G H, erit e, inſuper tàm F G, quàm C H, erit a, hinc igitur harum correlatarum æquationum naturam deprehendimus, eiuſmodi eſſe, vt diximus; nempe coefficientem longitudinem eſſe æqualem aggregato radicum, & ex applicatione differentiæ quadratorum à radicibus, ad earundem radicum differentiam, oriri earundem radicum aggregatum, atque adeo coefficientem longitudinem.



Commentaria hic ſunt æquationibus amphibolis.

Fatendum tamen hæc communia eſſe æquationibus amphibolis, quatenus de duabus radicibus ſunt explicabiles; hoc enim modo, maior radix, conſtituit æquationem vnam eadem coefficiente longitudine retenta, eodemque comparationis homogeneo, quamobrem idem de minori radice cum dici poſſit, propterea hæ erunt æquationes ſimiles; Vnde ſi exempli gratia, çquatio vna fuerit $20 R - 1 Q = 64$, hæc duplicem habet radicem, nempe 16, & 4. Quatenus igitur inſtituitur ęquatio per radicem maiorem, fiat $b a - a^2 = z$ plano; quatenus per minorem, fiet $b e - e^2 = z$ plano; hæ itaque ſunt æquationes ſimiles, vt ex traditis apertè conſtat,

ſtat, ſed hoc nil aliud eſt, quàm per vtramque radicem vnius æquationis, duplicem æquationem inſtituere; proinde, vt aduertebam; hæc communia ſunt æquationibus amphibolia laborantibus, in quibus, vt ſuo loco vidimus de quadraticis amphibolis loquentes radicum aggregatum, æquale eſt coefficienti longitudini; vnde vtramque radicem ex æquatione propoſita eruere perinde; eſt, ac duplicem æquationem inſtituere, penes duplicem, quam propoſita, habet radicem, ęquatio; Cęterũ dum eruitur radix, ſublato comparationis homogeneo, a quadrato dimidiæ coefficientis, fit reſiduum, cuius latus, additum prædicto dimidio: exhibet radicem maiorem: ſubductum eidem exhibet minorem. Illud porrò non pręteribo, quandoque, vtramque radicem, & maiorem, & minorẽ propoſitæ æquationi amphibolæ ſatisfacere: aliquando vnicam tantùm.

Hæ communia ſunt amphibolis æquationibus.

Deinde ſi b pl. a — a^3 æquetur, z ſolido, & rurſus etiam b pl. e — e^3 æquetur z ſolido; non diſſimiliter ratiocinando hinc neceſſariò conſequitur b pl. a — a^3 æquari b pl. e — e^3, & per metatheſin ſtatuendo a, maiorem, quàm e; quod eſt hic ad libitum, ob eam, qua ęquatio laborat amphibolam, fiet $a^3 - e^3$ æqualis b pl. a — b pl. e; atque omnibus applicatis ad a — e, ex applicatione differentiæ cuborum oritur $a^2 + e^2 + a\,e$, quod multiplicatione comprobatur; ſi enim $a^2 + e^2 + a\,e$, ducatur in a — e, fit productum $a^3 - e^3$, ergo ex applicatione $a^3 - e^3$, ad a — e, proueniet $a^2 + e^2 + a\,e$ ex applicatione verò b pl. a — b pl. e, ad eandem differentiam a — e, oritur b pl. Itaque fit, vt $a^2 + a^2 + a\,e$, æquetur b plano. Vnde deprehendimus b planum, eſſe aggregatum quadratorum, a duobus de quibus quæritur lateribus, vna cum eo, quod fit ſub ijs plano; illudque oritur ex applicatione differentiæ cuborum ad differentiam laterum. Cum verò b pl. a — a^3 æquetur z ſolido ſi in locum ipſius b plani ſubrogetur agnitus eius valor nempe $\frac{a^3 - e^3}{a - e}$ ſeu quod idem eſt $a^2 + e^2 + a\,e$; vtique $\frac{a^3 e - e^3 a}{a - e}$ nimirum $a^2 e + e^2 a$ æquabitur z ſolido.

Proponitur æquatio altera amphibola cu[m] liberis ordinibus.

Sed hæc ſunt perpendenda; nam ſi $a^2 + e^2 + a\,e$, valor agnitus ipſius b plani, ducatur in a, fiet $a^3 + a\,e^2 + a^2 e$, à quo ſubtrahendus eſt cubus a^3 (erat enim b pl. a — a^3 = z ſolido) & remanebit $a\,e^2 + a^2 e$ = z ſolido. Vnde conſtat ipſum comparationis homogeneum, fieri ab aggregato laterum in planum ſub lateribus; oririque ex differentiæ ipſorum factorum reciprocè à cubo vnius lateris, in latus alteriùs, applicatione ad differentiam ipſorum laterum. Atque hìc iterum illud eſt inculcandum, quod ſuperiùs de huiuſmodi æquationibus quadratici ordinis dictum fuit.

Animaduertenda quædã.

Illud eſt animaduertendum, nempe cùm ſuperiùs eſſet æquatio b a — a^2 = z plano; deprehenſumq; eſſet $\frac{a^2 - e^2}{a - e}$ id eſt a + e (tantùm enim prouenit, ex applicatione $a^2 - e^2$ ad a — e,) æquari b, ſi in locum ipſius b, ſubrogetur agnitus eius valor, puta $\frac{a^2 - e^2}{a - e}$ ſeu a + e fieri $\frac{a^2 e - e^2 a}{a - e}$ ſeu a e (tantum enim prouenit ex applicatione; ipſius $a^2 e - a\,e^2$ ad a — e) quod æquetur z plano; Idque hunc in modum manifeſtum fiet. Si enim valor cognitus ipſius b; puta a + e, ducatur in a, fit $a^2 + a\,e$. Ergò perinde eſt $a^2 + a\,e$, ac eſt b a; Si igitur ex $a^2 + a\,e$ ſubtrahatur a^2 remanebit a e, quod æquabitur z plano, cum eſſet b a — a^2 ęquale z plano. Imo hoc idem eueniet loco ipſius a + e atque adeo ipſius b, adhibendo $\frac{a^2 - e^2}{a - e}$; nam ſi ducatur $\frac{a^2 - e^2}{a - e}$ in a, fiet $\frac{a^3 - e^2 a}{a - e}$ itaque idem eſt $\frac{a^3 - e^2 a}{a - e}$ ac eſt b a. Sed perinde eſt $\frac{a^3 - e^2 a}{a - e}$ ac eſt $a^2 + a\,e$ quod multiplicatione comprobatur, nam ſi ducatur $a^2 + a\,e$ in a — e prouenit $a^3 - a\,e^2$; ergò cùm proueniat, vt diximus $a^2 + a\,e$, ęquale b a, auferatur a^2, vt priùs, cùm ęquatio eſſet b a — a^2 = z plano. Ergò a e æquabitur z plano; quod ſupra enunciatum fuerat.

Notanda quædam in gratiam ſupradictarum.

Verùm etiam, & Contradicentes, ſuas conſtitutiones habent, vnde ſi $a^2 + b\,a$ æquetur z plano; & $e^2 - b\,e$ æquetur itidem z plano, neceſſariò conſequitur $a^2 + b\,a$, æquari $e^2 - b\,e$, & per antitheſin $e^2 - a^2$ æquari b e + b a; omnibuſque applicatis ad e + a, proueniet $\frac{e^2 - a^2}{e + a}$, nempe e — a æquabitur b; ergo b, coefficiens eſt differentia duorum, de quibus quæritur laterum, oriunda ex applicatione differentiæ quadratorum, ad aggregatum laterum.

De contradicentium conſtitutione diſſeritur.

Coefficiens in huiuſmodi æquationibus cui æquetur.

Cùm autem $a^2 + b\,a$ æquetur z plano. In locum ipſius b, coefficientis ſubrogetur cognitus eius valor; nempe $\frac{e^2 - a^2}{e + a}$ ergo $a^2 + \frac{e^2 - a^2}{e + a}$ a æquabitur z plano; &

Cõparationis homogeneum in huiuſmodi æquationibus cui æquetur.

omnibus

omnibus rectè diſpoſitis, ac ordinatis ſecundùm Artem $\frac{aae + eea}{e + a}$ hoc eſt e in a æquabitur z plano.

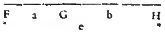
Numeris hæc eadem tractā tur, & illuſtrantur.

Itaque z planum eſt, quod fit ſub duobus lateribus, &c. Numeris autem hæc eadem tractari poſſunt, 1 Q † 12 R æquetur 85, & rurſus 1 A Q — 12 A æquetur 85; ergo 1 Q ✠ 12 R æquabitur 1 A Q — 12 A, & per metatheſin 1 A Q — 1 Q æquabitur 12 R † 12 A, omnibuſque diuiſis per 1 A ✠ 1 R etiam $\frac{1AQ - 1Q}{1A + 1R}$ æquabitur 12, & quoniam 1 Q † 12 R æquatur 85, in locum ipſius 12 ſubrogetur agnitus eius valor $\frac{1AQ - 1Q}{1A + 1R}$, & 1 Q ✠ $\frac{1AQ - 1Q}{1A + 1R}$ R æquabitur 85; omnibus ritè diſpoſitis $\frac{1Q \text{ in } 1A + 1AQ \text{ in } 1R}{1A + 1R}$ nimirum 1 A in 1 R æquabitur 85, & res ita ſe habet; Siquidem 1 Q valet 25; cùm 1 R in ſuperiori æquatione valeat 5, & 1 A, valeat 17; Itaque 1 Q in 1 A, valebit 425, huic ſi addatur 1445, valor eius, quod ex 1 A Q in 1 R; fiet 1870, quo diuiſo per 22, pretium ipſius 1 A † 1 R, fit quotiens 85, ſeu quod idem eſt 1 A in 1 R æquatur 85, nam idem eſt $\frac{1Q \text{ in } 1A + 1AQ \text{ in } 1R}{1A + 1R}$, ac eſt 1 A in 1 R, vt alibi diximus.

Quæ ratione Auctor Contradicentium æquationum naturam inquirat.

Ad æquationes Contràdicentes, quod attinet, Vietam ſecuti ſumus, quę verò nobis ad hæc videntur opportuna, proximum eſt, vt aperiamus.

Sit recta F H, diuiſa quidem in G, & G H, ſit coefficiens b; at F H, ſit radix e; ſed F G, ſit a; Manifeſtum eſt quadratum F H, minùs rectangulo F H G, æquale eſſe rectangulo ſub F H, & F G, at eidem rectangulo H F G, æquale eſt quadraatum F G, plus rectangulo F G H, itaque quadratum F H, minùs rectangulo F H G, cùm ęquale ſit quadrato F G, vnà cum rectangulo F G H, ſequitur huiuſmodi æquationes eſſe contràdicentes, vt ex ipſarum deſcriptione fit manifeſtum. In quibus cernimus G H, nempe coefficientem longitudinem eſſe differentiam duarum radicum, quarum vna eſt F H, altera verò F G; itaque eſt quantitas orianda ex applicatione differentię quadratorum ad aggregatum laterum; Et comparationis homogeneum, cuiuſmodi eſt rectangulum H F G, fit ex mutuo ductu ipſarum radicum.



In contradicentibus, comparationis homogeneum, vnde.

In contradicentibus ſubgraduales coefficientes, vnde.

Itaque ſubgraduales coefficientes oriuntur ex applicatione differentię poteſtatum, ad aggregatum eorum graduum, quos ſuſtinent coefficientes; & ſpeciatim ſublaterales coefficientes longitudines, oriuntur ex applicatione differentię quadratorum ad aggregatum laterum; Ita quidem G H, coefficiens ſublaleralis longitudo, oritur ex applicatione differentiæ quadratorum ex F H, & F G, ad aggregatum ex F H, F G. Quod eſt obſeruandum.

At ſi æquationes fuerint Inuerſę; quæ ſit conſtitutio, videamus.

Quando æquationes extiterint Inuerſæ.

Si a^2 — b a æquetur z plano, & rurſus b e — e^2 æquetur z plano; ergo a^2 — b a æquabitur b e — e^2, & per antitheſin a^2 ✠ e^2 æquabitur b a ✠ b e; omnibus propterea diuiſis per a ✠ e $\frac{aa + ee}{a + e}$ æquabitur b. Quamobrem coefficiens longitudo ortum ducit ex applicatione aggregati quadratorum ad aggregatum laterum, in quæ coefficientes longitudines ducuntur; ergo coefficiens longitudo ſublateralis prouenir ex applicatione aggregati poteſtatum, ad aggregatum laterum, in quæ ipſa ducitur coefficiens.

Coefficiens vnde.

Exemplum.

Cùm autem a^2 — b a æquetur z plano. In locum ipſius b coefficientis agnitus eius valor ſubrogetur, vt $\frac{aa + ee}{a + e}$; ergo a^2 — $\frac{aaa + eea}{a + e}$ æquabitur z plano; & omnibus rectè diſpoſitis $\frac{aae - eea}{a + e}$ æquabitur z plano.

Comparationis homogeneum vnde.

Quamobrem z planum oritur ex applicatione differentiæ factorum reciprocè à poteſtate radicis vnius in gradum alterius, ad prædictum, cui applicatio altera facta eſt, laterum, in quæ coefficiens ſublateralis, aggregatum, hoc eſt ad aggregatum ex a latere, & e latere, cui altera ſuperior facta fuit applicatio.

Simili etiam modo ratiocinandum; ſi a^2 ✠ b a æquetur z plano, & b e — e^2 æquetur z plano, &c.

Colligemus enim coefficientem longitudinem ſublateralem oriri ex applicatione

ne poteſtatum, ad differentiam eorum, in quæ coefficiens eſt laterum.

Inſuper comparationis homogeneum proficiſci ex applicatione aggregati factorum reciprocè à quadrato radicis vnius, in latus alterius, ad prædictam, cui altera facta eſt applicatio laterum, in quę coefficiens eſt differentia, hoc eſt ad e latus minus a latere, cui applicatio ſuperior eſt facta. *Vnde comparationis homogeneum proficiſcatur.*

Obſeruandum autem hanc pragmatiam ſic inſtituendam eſſe. Cum $\frac{aa+ee}{a+e}$ ſit agnitus valor ipſius b; ſitque propoſita æquatio $a^2 - ba =$ z plano. In locum ipſius b; ſubrogetur agnitus eius valor; puta $\frac{aa+ee}{a+e}$; ob id hoc ducatur in a; vt b, ducebatur in a; fiet autem productum $\frac{aaa+eea}{a+e}$ ſeu $\frac{a^3+eea}{a+e}$ hoc igitur æquipollet ipſi b a; & ſubtrahendum eſt ex ipſo a^2; quod fit ducendo a^2 in a † e; vt proueniat $\frac{a^3+eaa}{a+e}$ ex quo ſi ſubtrahatur $\frac{a^3+eea}{a+e}$ remanebit $\frac{eaa-eea}{a+e}$. Vnde ſuprà cùm hæc generatim tractaremus, erat a poteſtas $-\frac{\text{a poteſtate in e gradum} + \text{e poteſtate in a gradum}}{\text{a gradui} + \text{e gradu}}$. *Obſeruanda quædam circa traditam pragmatiam.*

Numeris hunc in modum. Sit 1 Q — 6 $\frac{2}{3}$ R $=$ 10 $\frac{2}{3}$. Inſuper 6 $\frac{2}{3}$ R — 1 Q $=$ 10 $\frac{2}{3}$. Hæ quidem æquationes ſunt inuerſæ, & in ipſis coefficiens, & homogeneum ſe habent, vt dicebamus. Prioris autem æquationis radix eſt 8; poſterioris verò 6; in his verò ſi periculum fieret, quod enunciatum eſt, deprehendetur. *Numeris eadem tractantur.*

De his igitur æquationibus hæc ſtatuuntur; nimirum. *Quæ de ſupra dictis æquationibus ſtatuātur.*

In æquationibus amphibolis ordinis quadratici, vt b a — $a^2 =$ z plano Coefficiens ſublateralis longitudo, compoſita quidem eſt à duobus lateribus, ſub quibus rectangulum, quod fit, æquale eſt comparationis homogeneo; fit autem radix latus maius, vel minus, è duobus, & aliquando vnicum tantùm ſatisfacit. Itaque ſi ſint duo latera 5, & 7, erit 12 R — 1 Q $=$ 35. Sed de his quoque ſuperiùs diſſeruimus. *Quid in æquationibus amphibolis ordines quadratici.*

In æquationibus amphibolis ordinis cubici, in quibus affectio eſt ſub latere, vt b pl. a — $a^3 =$ z ſolido. Coefficiens planum compoſitum eſt ex quadratis trium proportionalium, & comparationis homogeneum ſolidum eſt factum ex ductu alterius extremæ, in aggregatum quadratorum à reliquis. Fit autem radix, prima, vel tertia ex illis; Itaque ſi ſint 2, 6, 18; erit 364 R — 1 C $=$ 720, Quadrata enim ipſorum ſunt 4, 36, 324; quorum ſumma 364, coefficiens componitur à quadratis trium proportionalium prædictorum, & 720; comparationis homogeneum, componitur à ductu alterius extremæ trium proportionalium, puta 18. in 40, aggregatum quadratorum à reliquis. At ſi qui ſunt, qui putent, haud benè hunc in modum explicari huiuſmodi æquationis naturam, decipiuntur, non enim per impropria, tradita eſt conſtitutio. Nec enim refert, quòd per quatuor, vel plures, ſi placet, proportionales 2, 4, 8, 16; explicetur, quorum quadrata ſunt 4, 16, 64, 256. horum aggregatum eſt 340; & ſi 16, extremū vnū è ſupradictis quatuor continuè proportionalibus, ducatur in 84; aggregatum quadratorum à reliquis, fit 1344, vnde prouenit æquatio 340 R — 1 C $=$ 1344. Radice exiſtente 16; Si enim 340; ducatur in 16; fit 5440. à quo ſi dempſeris 4096; cubum ex 16. reliquum fiet 1344; Id autem ideo accidit; quia ſi planum aliquod fuerit, nihil prohibet illud intelligere diuiſum, in plures partes proportionales, quarum larera; hoc eſt rectę, quæ poſſunt ſupradictas partes, erunt proportionales. At ſi vnum ex extremis planis proportionalibus, quod quadratum intelligo, ducatur in ſui latus; fit cubus, qui ſubtractus à ſolido ſub plano prædicto, & latere iam dicto, relinquitur ſolidum, ſub hoc eodem latere, & reliquo plano, quod conſtat reliquis duobus, vel tribus planis proportionalibus, &c. prout diuiſio plani totius fuerit inſtituta, &c, Inſulsè tamen loquuntur; nam hìc de conſtitutione æquatinum amphibolarum habetur ſermo: in quibus liberum eſt, vnam, vel aliam radicem ſumere compoſitam ex ijs, quæ ad coefficientem magnitudinem, & ad homogeneum comparationis, faciunt. Hæc infra oſtendemus. Atque non diſſimili modo penes proportionales magnitudines attenditur conſtitutio quadrato-quadrati. Itaque. *Quid in æquationibus amphibolis ordinis cubici.* *Nonnulla tractantur, aduerſus quoſdā minus benè loquentes.*

In æquationibus amphibolis quadrato quadraticis affectis ſub latere, nempè b ſol. a — $a^4 =$ z plano plano; Coefficiens ſolidum eſt compoſitum ex cubis quatuor continuè proportionalium, & comparationis homogeneum fit ductu alterius extremę in cuborum aggregatum à tribus reliquis, vnde fit radix prima, vel quarta. Quare *Quid in æquationibus amphibolis quadrato-quadraticis.*

ſi ſint 2, 4, 8, 16. Dicemus 4680 R — 1 QQ æquari 9344, & fiet 1 R, 2 vel 16.

Hæc ſubijcienda ſuperſunt.

Quædam hic ſubijcienda monentur, ne ſ ſarto & quæ demum ab initio ad aucta ut ſimilia.

Sint continuè proportionales $d, g, \frac{g^2}{d}; \frac{g^3}{d^2}$ harum cubi ſunt $d^3, g^3, \frac{g^6}{d^3}; \frac{g^9}{d^6}$ quorum aggregatum eſt $d^3 + g^3 + \frac{g^6}{d^3} + \frac{g^9}{d^6}$ & hoc eſt ſolidum coefficiens; at ſi primum excipias; trium reliquorum cuborum aggregatum eſt $g^3 + \frac{g^6}{d^3} + \frac{g^9}{d^6}$ quo ducto in d, alteram extremarum, fit $d\,g^3 + \frac{g^6}{d^2} \dagger \frac{g^9}{d^5}$, quod, & eſt comparationis homogeneum; radix autem cùm ſit prima, vel quarta, ſit modò prima d, quæ ducatur in ſolidum coefficiens iam dictum, fitque $d^4 + d\,g^3 + \frac{g^6}{d^2} + \frac{g^9}{d^5}$, quod multatum quadrato-quadrato radicis, nempe d^4, remanet $d\,g^3 + \frac{g^6}{d^2} + \frac{g^9}{d^5}$. Quod erat comparationis homogeneum. Hunc igitur in modum inquiſiuimus oblatæ æquationis naturam. Nec diſſimiliter, cùm altera adhibetur extremarum.

Æquationis amphibolæ quadrato-cubicæ.

In æquationibus amphibolis Quadrato-cubicis affectis ſub latere vt b pl. pl. $a - a^5 = z$ plano ſolido. Coefficiens plano-planum componitur ex quadrato-quadratis, quinque continuè proportionalium, & comparationis homogeneum fit ductu alterius extremæ in aggregatum quadrato-quadratorum à quatuor reliquis; fitque radix prima, vel quarta. Vt ſi ſint 2, 4, 8, 16, 32. Dicemus 1118480 R — 1 QC æquari 2236928, fitque 1 R 2, vel 32.

Æquationes amphibolæ cubo-cubicæ.

In æquationibus amphibolis Cubo-cubicis affectis ſub latere, vt b pl: ſol. $a - a^6 = z$ ſol. ſolido. Coefficiens plano-ſolidum componitur ex quadrato-cubis ſex continuè proportionalium; & comparationis homogeneum, fit ductu alterius extremæ in aggregatum quadrato-cuborum à quinque reliquis, fitque radix prima, vel ſexta. Vnde ſi ſint 2, R Q C 160, R Q C 800, R Q C 4000, R Q C 20000; 10. Dicemus 124992 R — 1 C C æquari 249, 920; fitque 1 R 2, vel 10.

Decet hic nonnihil immorari, perpendendo quædam admiratu digniſſima.

Aliter quædam animaduerſione digna proponit, pro æquationibus quadraticis, cubicis, quadrato quadraticis, quadrato-cubicis, Cubo-cubicis.

Quadratum, vnde æquatio quadratica ſumit nomenclaturam, exponitur à binario, quamobrem eius conſtitutio, penes duo latera, attenditur.

Cubus; vnde cubica dicitur æquatio, exponitur à ternario, quapropter eius conſtitutio penes tria latera, & quidem continuè proportionalia, attenditur.

Quadrato-quadratum, vnde quadrato-quadratica æquatio denominatur, à quaternario exponitur; quamobrem eius conſtitutio penes quatuor latera, & quidem continuè proportionalia attenditur.

Quadrato cubus, vnde æquatio dicitur quadrato-cubica à quinario exponitur, quamobrem eius conſtitutio penes quinque latera, & quidem continuè proportionalia, attenditur.

Cubo-cubus, vnde cubo-cubica æquatio à ſenario exponitur, propterea eius conſtitutio, penes ſex latera, & quidem continuè proportionalia attenditur,

Penes quot latera cuiuſcunque æquationis naturalis conſtitutio attendi debeat.

Penes igitur tot latera attendi debet vniuſcuiuſque ex recenſitis æquationibus conſtitutio, quot ſunt vnitates, quibus exponens Poteſtatis conſtat. Et hoc in primis eſt animaduerſione dignum, Interim aduerte quàm magnia in his myſteria ſint, & quàm digna ſcitu in Mathematicis tractentur Diſciplinis. At verò prætermiſſis æquationibus amphibolis intra planorum fines, atque ſumptis ijs, quæ ſolidæ ſunt, hæc obſeruare licet. In æquationibus amphibolis cubicis, affectis ſub quadrato, quemadmodum $b\,a^2 - a^3 = z$ ſolido. Coefficiens longitudo ex tribus proportionalibus componitur. Comparationis homogeneum fit ductu alterius extremæ in quadratum compoſitæ à duabus reliquis, fitque radix compoſita à duabus primis, vel duabus poſtremis. Vnde ſi ſint 2, 4, 8. Dicemus 14 Q — 1 C æquari 288; fitq; 1 R 6, vel 12.

Hæc ſubijcienda ſuperſunt.

Quædam hic ſuperſunt conſideranda.

Sint tres proportionales $d; g; \frac{g^2}{d}$ harum aggregatum eſt $d \dagger g \dagger \frac{g^2}{d}$ & hoc eſt coefficiens. Quadratum compoſitæ, à duabus reliquis $g \dagger \frac{g^2}{d}$ ſi pro extrema ſumatur d, eſt $g^2 + 2\,\frac{g^3}{d} + \frac{g^4}{d^2}$ quo ducto in prædictam extremam, fit $d\,g^2 + \frac{2\,d\,g^3}{d} + \frac{d\,g^4}{d^2}$; ſeù quod idem eſt $d\,g^2 + 2\,g^3 \dagger \frac{g^4}{d}$; & hoc erit comparationis homogeneum; cùmque dictum ſit radicem eſſe compoſitam à duabus primis, ea quidem erit $d \dagger g$, cuius quadratum eſt, $d^2 + 2\,d\,g \dagger g^2$, quo ducto in $d \dagger g$, $\dagger \frac{g^2}{d}$ coefficientem, fit $d^3 \dagger 3\,d^2 g \dagger 4\,d\,g^2 + 3\,g^3 \dagger \frac{g^4}{d}$, à quo ſi dempſeris cubum

ex

ex $d + g$, nempè $d^3 + 3\,d^2 g + 3\,d g^2 + g^3$ remanebit $d g^2 + 2 g^3 + \frac{g^4}{d}$ quod erat comparationis homogeneum. Hac igitur arte ſum aſſecutus huius æquationis naturam.

Nec diſſimili modo, cùm altera adhibetur extrema.

Quando ſunt æquationes amphibolæ quadratoquadraticæ.

In æquationibus amphibolis Quadrato-quadraticis affectis ſub cubo, vt $b\,a^3 - a^4 = z$ plano-plano. Coefficiens longitudo compoſita eſt ex quatuor continuè proportionalibus, comparatiouis homogeneum fit ductu alterius extremæ in cubum compoſitæ à tribus reliquis, ſitque radix compoſita à tribus primis, vel tribus poſtremis. Vnde ſi ſiut 2, 4, 8, 16. Dicemus 30 C — 1 QQ æquari 43904. ſitque 1 R 14, vel 28.

Quando ſunt æquationes amphibolæ quadratocubicæ.

In æquationibus amphibolis, Quadrato-cubicis vt $b\ a^4 - a^5 = z$ plano ſolido. Coefficiens longitudo componitur ex quinque contiuuè proportionalibus, & Comparationis homogeneum; fit ductu alterius exrremæ in quadrato-quadratum compoſitę ex quatuor reliquis; ſitqne radix compoſita, ex quatuor primis, vel quatuor poſtremis. Vnde ſi ſint 1, 2, 4, 8, 16. Dicemus 31 QQ — 1 QC ęquari 810000. ſitque 1 R; 15, vel 30; Neque diſſimili artificio hęc inuenies, vt in pręcedentibus.

Quando ſunt æquationes amphibolæ cubocubicæ.

In ęquationibus amphibolis Cubo-cubicis, affectis ſub quadrato-cubo vt $b\,a^5 - a^6 = z$ ſolido-ſolido. Coefficiens longitudo componitur à ſex continuè proportionalibus. Comparationis homogeneum fit ductu alterius extremę in quadrato-cubicum compoſitę à reliquis; ſitque radix compoſita ex quinque primis, vel quinque poſtremis. Vnde ſi ſint 1, 2, 4, 8, 16, 32. Dicemus 63 QC — 1 CC ęquari 916, 132, 832. Et ęadem ratioue, qua ſupra hęc aſſequi licet.

Quædam hic in primis obſeruanda.

Hic obſeruandum occurrit, quod omnibus his commune, eſt & quid inter eadem interſit, nempè diſcrimen ortum ab affectionum diuerſitate, quamuis eadem ſit omninò poteſtas,. Collatis igitur duabus ęquationibus, b pl. $a - a^3 = z$ ſolido, & $b\,a^2 - a^3 = z$ ſolido. Commune quidem vtrique eſt, earum conſtitutionē attendi, penes tria latera *continue* proportionalia. Itemque ia vtraque ternarium facere ad coefficientis magnitudinis compoſitionem: In illa enim componitur ex quadratis trium proportionalium, in hac verò ex tribus ipſis lateribus proportionalibus; Propterea differunt, quoniam in illa componitur coefficiens, vtpotè planum ex quadratis, iu hac, vtpotè latus ex lateribus; In illa comparationis homogeneum ſolidum eſt; factum ductu alterius extremę in aggregatum quadratorum à duabus reliquis. In hac autem fit ductu alterius extremę in quadratum compoſitę à duabus reliquis; In illa quidem atteneditur aggregatum quadratorum à reliquis duabus, è tribus proportioualibus; quemadmodum cuique notare licet.

In hac attenditur quadratum compoſitę à reliquis illis duabus è tribus proportionalibus. Similia quoque in reliquis ſuprapoſitis ęquationibus obſeruanda ſunt, nempè in quadrato-quadraticis amphibolis affectis ſub latere, qnaternarium facere ad coefficientis conſtitutionem, quemadmodum etiam ad conſtitutionem coefficientis in ęquatione quadrato-quadratica affecta ſub cubo, &c. Differunt verò penes ea, quę cuique licet adnotare.

Vnde ſuperiora deducantur, inquirendum ſupereſt.

Vnde ſuperiora deducatur inquiritur.

Conſideremus igitur æquationem illam b pl. $a - a^3 = z$ ſolido. Dicebamus autem cum Vieta coefficiens planum componi ex quadratis trium proportionalium, & comparationis homogeneum ſolidum eſſe factum ex ductu alterius extremæ in aggregatum quadratorum à reliquis. Idque deprehenditur hac Arte,

Explicatio.

Sint proportionales $d.\ g.\ \frac{g^2}{d}$; Sunt autem proportionales, vt patet. Deinde ducatur quilibet terminus in ſe quadraticè, vt fiant d^2; g^2; $\frac{g^4}{d^2}$ horum aggregatum eſt $d^2 + g^2 + \frac{g^4}{d^2}$, quo ducto in d, fit $d^3 + d g^2 + \frac{g^4}{d}$ à quo ſi dematur d^3, cubus ex d, remanebit $d g^2 + \frac{g^4}{d}$. At ſi ex extremis vna puta d, ducatur in aggregatum quadratorum à reliquis, puta $g^2 + \frac{g^4}{d^2}$ fit productum $d g^2 + \frac{g^4}{d}$ hoc autem eſt idem cum dicto iam reſiduo. Vnde ſatis apertè conſtat coefficiens planum componi ex quadratis trium proportionalium, cuiuſmodi eſt $g^2 + d^2 + \frac{g^4}{d^2}$ At verò comparationis homogeneum fieri, vt dictnm eſt; patet, etenim d, modo vna ex extremis, & $g^2 +$

$\frac{g^4}{d^2}$ eſt aggregatum quadratorum à reliquis, quo ducto in d, fit $d\,g^2 + \frac{g^4}{d}$ quantum profectò remanet, ſi ex $d^3 + d\,g^2 + \frac{g^4}{d}$ auferatur d^3; remanet enim $d\,g^2 + \frac{g^4}{d}$. Hac itaque induſtria cognouimus vnde illud enunciatum, ortum ducat; quod clariùs hunc in modum euinces. Siquidem liberum eſt extremam accipere, ſumamus igitur alteram $\frac{g^2}{d}$. Itaque aggregatum quadratorum, nempe $d^2 + g^2 + \frac{g^4}{d^2}$ ducatur in $\frac{g^2}{d}$, & proueniet $d\,g^2 + \frac{g^4}{d} + \frac{g^6}{d^3}$ à quo ſi ſubducas $\frac{g^6}{d^3}$ cubum ex $\frac{g^2}{d}$ remanebit $d\,g^2 + \frac{g^4}{d}$. At verò tantum fit, ſi $\frac{g^2}{d}$ extrema eadem, ducatur in $d^2 + g^2$ aggregatum quadratorum à reliquis, fit nempe $\frac{d^2 g^2}{d} + \frac{g^4}{d}$ ſeu $d\,g^2 + \frac{g^4}{d}$.

Supra tradita oſtenduntur.

Quæ diximus de huiuſmodi ęquatione ſuo modo cæteris accommodari poſſunt. Hæc tamen in primis conſideranda ſunt. Cæterum perſimili modo, cùm altera adhibetur extrema, procedendum eſt, &c.

De contradicentibus æquationibus tractatio inſtituitur.

Proximum eſt, vt Contradicentes perpendamus, quarum primò cum Vieta, conſtitutiua perſequemur.

Si $a^2 + b\,a$ æquetur z plano, & rurſus $e^2 - b\,e$ æquetur z plano.

Sunt quidem duo latera, quæ differunt per b, coefficientem; at verò factum ſub illis, æquale eſt z plano, fitque radix a, latus minus, & maius.

Proponitur æquatio quadratica.

Sunto enim latera 5, 17, & 1 Q + 12 R æquatur 85, fit autem 1 R, 5; Rurſus 1 Q — 12 R æquetur 85, & 1 R fit 17, & ita eſt, vt quiſque poterit experiri.

Numeris eadem tractantur.

Hæc autem abs præcitato Auctore tradita, poſſunt Geometricè oſtendi. Si enim recta quædam per iuæqualia ſecetur, quadratum vnius ſegmenti, puta minoris, vna cum rectangulo ſub ipſis ſegmentis, æquale eſt quadrato totius lineæ, minus rectangulo ſub tota, & ſegmento maiori. Itaque ſegmentum minus, erit latus minus, tota linea erit latus maius, & ſegmentum maius erit coefficiens, quare coefficiens erit differentia laterum, vt patet. Hinc autem facile intelliges ęquationes contradicentes ordinis quadratici ſe habere, vt dicebamus; eſt enim coefficiens differentia laterum, quorum ductu fit comparationis homogeneum.

Geometricè oſtendi poſſunt.

Deinde ſi æquatio fuerit ordinis quadratoquadratici, vt ſi $a^4 + b$ ſol. a æquetur z planoplano; & rurſus $e^4 - b$ ſol. e æquetur z planoplano. Sunt quatuor continuè proportionales à quibus cubi, alternè ſumpti differunt per b ſolidum; fit verò z planoplanum ductu alterius extremæ in differentiam cuborum a reliquis alternè ſumptarum, eſtque a, prima minor inter extremas, & e eſt quarta.

Quando æquatio fuerit ordinis quadratoquadratici.

Sint igitur continuè proportionales, 1, 2, 4, 8, & 1 Q Q + 455 R, æquabitur 456; fitque 1 R, 1, Rurſus 1 Q Q — 455 R, æquabitur 456, fitque 1 R, 8. Inſuper.

Numeris eadem tractantur.

Si ſint 2, 4, 8, 16, fiet ęquatio 1 Q Q + 3640 R ⩵ 7296 fitque 1 R, 2. Item 1 Q Q — 3640 R ⩵ 7296, fitque 1 R, 16.

Hęret hìc quidem Geometra, cùm hæ ſint æquationes extra limites eius, quam profitetur Artem; quadratum enim in quadratum ſi ducatur, fit quantitas imaginaria, à cuius contemplatione prorſus aboret; tamen Arithmeticus hæc ſua meditatione perſequitur; & quod lineis accommodata vidimus, ſuo modo numeris aptari poſſunt; vt nil addendum videatur; ſolùm, hic ſubijcimus conſideratu digniſſima.

Geometra has æquationes quadratoquadraticas, & reliquas altioris ordinis deſtatur.

Enunciatum eſt ſi $a^2 + b\,a$ æquetur z plano, & $e^2 - b\,e$ æquetur z plano. Duo eſſe latera, quæ differunt per b. Attende quęſo harum æquationum naturam, Si $a + b$, æquetur e, vtique differentia laterum a, & e, erit b ob id $e - b$ ęquabitur a, at verò ſi $a + b$, quod e, ſupponimus ęquari, ducatur in a fiet $a^2 + b\,a$, quod æquabitur ei, quod fit ex $e - b$, in e. nempe $e^2 - b\,e$; Si itaque $a^2 + b\,a$ æquetur z plano, & $e^2 - b\,e$ æquabitur z plano; nam vt dicebamus $a + b$, ſupponitur æquari e, & $e - b$ qropterea ęquabatur a, tantum igitur proueniet ex ductu ipſius a, in $a + b$, quantum ex ductu ipſius e, in $e - b$; ſed ductu ex a, in $a + b$ fit z planum, propterea ductu ex e in $e - b$ proueniet z planum.

Oſtenduntur ſupradicta processu Analytico.

Hoc itaque modo perſpecta fit quadraticarum contradicentium natura, ac earundem conſtitutiua innoteſcunt.

Hunc in modum perfecta traditur contradicentium æquationum natura, & ſic de reliquis.

Nec Arte diſſimili, in ęquationibus ad hoc genus pertinentibus diſcurrendum. Vnde

Vnde cùm eſſet equatio $a^4 + b$ ſolido $a = z$ pl.plano, enunciatum fuit eſſe quatuor proportionales, à quibus cubi, alternè differunt per b ſolidum, & z pl.planum fit ductu alterius extremę in differentiam cuborum à reliquis alternè ſumptorum.

Proponitur æquatio cubocubica.

Si $a^6 -$ b pl.ſol. a æquetur z ſolidoſolido, & rurſus $e^6 -$ b planoſolido e, æquetur z ſolidoſolido. Sunt ſex continuè proportionales, a quibus quadratocubi alternè ſumpti differunt per b planoſolidum. Fit verò z ſolidoſolidum ductu alterius extremę in differentiam quadratocuborum à reliquis alternè ſumptorum, eſtque a prima minor inter extremas e, verò ſexta.

Numeris eadem tractantur.

Quare ſi fuerint continuè proportionales, vt 1; ℞ Q c 2, ℞ Q c 4; ℞ Q c 8; ℞ Q c 16; 2, & rurſus 1 CC $+$ 21 R, equatur 22, ſitque 1 R 1, & 1 CC $-$ 21 R æquabitur 22, ſitque 1 R; 2.

Supradicta declarantur.

Quadroto-cubi ſupradictorum terminorum 1, 2, 4, 8, 16, 32; ſi ſumantur alternè fiet, 42, & 21. nempe ſi ad 1, addatur 4; fit 5; cui ſi addas 16, fit 21; deinde ſi ad 2, addatur 8; fiet 10; huic ſi addatur 32; fiet 42; conſtat autem 42, differre à 21, per 21.

Deinde 22, fieri ductu alterius extremæ in differentiam quadrato-cuborum à reliquis alternè ſumptorum &c. Patet; ſiquidem ſi ad 2; addatur 8, fit 10, huic addito 32, fit 42, mox autem ſi ad 4, addas 16; fiet 20, patet autem 20, differre à 42, per 22. Ducatur 22, in 1, alteram extremarum, & fit 22. Rurſus ſi ad 1, addas 4, fiet 5, huic ſi addas 16, fiet 21, deinde ſi ad 2, addas 8, fiet 10, manifeſtum eſt, 10, a 21, differre per 11. Ducatur hic in 2, extremarum alteram, & fiet 22, vt priùs.

Æquationes rite ſe habere declaratur.

Ad æquationes quod attinet, ſi 1 R valor eſt 1, 1 CC valebit 1, & 21 R, valebunt 21, horum ſumma eſt 22, altera æquationis pars. Si 1 R fit 2, 1 CC valebit 64, & 21 R, 42, ſi 42 tollas à 64, remanebit itidem 22 &c.

Proponitur æquatio quadratoquadratica.

Si $a^4 + b\,a^3$, æquetur z plano-plano, & rurſus $e^4 - b\,e^3$, æquabitur z plano-plano.

Propoſitio de ipſis.

Sunt quatuor continuè proportionales, quarum alternè ſumptarum differentia eſt b, & fit z plano-planum ductu alterius extremæ in cubum differentiæ reliquarum alternè ſumptarum, & dum intelligitur prima minor inter extremas eſſe a, differentia alternè ſumpta trium primarum, & differentia eſt trium poſtremarum.

Explicatio.

Sunto proportionales continuè 1, 2, 4, 8, & 1 QQ $+$ 5 C, æquabitur 216, & fit 1 R, 3, & rurſus 1 QQ $-$ 5 C, æquabitur 216, ſitque 1 R, 6. Vel ſunto continuè proportionales 2, 4, 8, 16, & 1 QQ $+$ 10 C, æquabitur 3456, & fiet 1 R, 6, & rurſus 1 QQ $-$ 10 C, æquabitur 3456, & fiet 1 R, 12.

Supradictorū declaratio.

Si ſint continuè proportionales 1, 2, 4, 8; Sumantur alternè nimirum 1, & 4, deinde 2, & 8, & ad 1, addatur 4, & ad 2, addatur 8, fient 5, & 10, horum differentia eſt 5, deinde 216; fieri vt dictum eſt &c. patet nam 2, differt ab 8 per 6, ducatur in ſe cubicè, & fit 216, hic ducatur in 1, extremum vnum; fitque 216. Deinde 1, differt a 4, per 3, huius cubus eſt 27, ſiquidem 3, cubicè ductus facit 27, hic verò numerus ducatur in 8, extremum alterum, & fit 216, & ſic de exemplo altero.

Æquationes rite ſe habere oſtenditur.

Ad æquationes quod attinet; Si 1 R, valet 3, vtique 1 QQ valebit 81, & 5 C, valebunt 135, horum ſumma eſt 216, altera æquationis pars. Deinde ſi 1 R, valet 6, 1 QQ, valebit 1296, & 5 C, valebunt 1080. Si verò a 1297, auferamus 1080, remanebit 216, pro altera æquationis parte.

Hæc autem iuuat ſubijcere.

Pragmatia Analytica in ſupradictorū gratiam inſtituitur.

Sint continuè proportionales d, g, $\frac{g^2}{d}$, $\frac{g^3}{d^2}$. Coefficiens erit $\frac{g^3}{d^2} + g - d - \frac{g^2}{d}$. Siquidem eſt differentia alternè ſumptarum, continuè proportionalium At verò ſi prima ſit d, differentia reliquarum alternè ſumptarum eſt $\frac{g^3}{d^2} + g - \frac{g^2}{d}$. Huius cubus eſt $\frac{g^9}{d^6} + 6\frac{g^7}{d^4} - 3\frac{g^8}{d^5} - 7\frac{g^6}{d^3} + g^3 - 3\frac{g^4}{d} + 6\frac{g^5}{d^2}$, & climactico ordine ſeruato; erit $\frac{g^9}{d^6} - 3\frac{g^8}{d^5} + 6\frac{g^7}{d^4} - 7\frac{g^6}{d^3} + 6\frac{g^5}{d^2} - 3\frac{g^4}{d} + g^3$; hoc autem ducto in d, primam; fit $\frac{g^9}{d^5} + 6\frac{g^7}{d^3} - 3\frac{g^8}{d^4} - 7\frac{g^6}{d^2} + d\,g^3 - 3\,g^4 + 6\frac{g^5}{d}$, & ordine iam dicto obſeruato; erit $\frac{g^9}{d^5}$

$\frac{g^9}{d^5} - 3\frac{g^8}{d^4} + 6\frac{g^7}{d^3} - 7\frac{g^6}{d^2} + 6\frac{g^5}{d} - 3g^4 + dg^3$, & hoc erit comparationis homogeneum.

Reſolutionis continuatio. At verò radix eſt $d + \frac{g^2}{d} - g$. Huius cubus eſt $d^3 + 6dg^2 + 6\frac{g^4}{d} - 3d^2g + \frac{g^6}{d^3} - 3\frac{g^5}{d^2} - 7g^3$, quo ducto in $\frac{g^3}{d^2} + g - d - \frac{g^2}{d}$, coefficientem, fit productum $17dg^3 + 22\frac{g^5}{d} - d^4 - 22g^4 + 4d^3g - 17\frac{g^6}{d^2} - 4\frac{g^8}{d^4} + \frac{g^9}{d^5} - 10d^2g^2 + 10\frac{g^7}{d^3}$. Cui ſi addideris quadrato-quadratum eiuſdem radicis $d + \frac{g^2}{d} - g$, nempe $d^4 + 10d^2g^2 + 10\frac{g^6}{d^2} - 4d^3g - 16dg^3 - 16\frac{g^5}{d} + \frac{g^8}{d^4} - 4\frac{g^7}{d^3} + 19g^4$, ſeu ordine iam dicto ſeruato $\frac{g^8}{d^4} - 4\frac{g^7}{d^3} + 10\frac{g^6}{d^2} - 16\frac{g^5}{d} + d^4 + 19g^4 - 4d^3g - 16dg^3 + 10d^2g^2$.

Propónitur pragmatia de iocunda. Vniuerſam hanc pragmatiam habes hic extenſam quam magni facias oportet, huius enim imitatione omnia Theoremata reperies. Quod ſi Maiores hanc artificioſam analyſin omiſerint; factum id putes, quoniam in primis curabant, vt poſteritas eorum ignenia coleret: inuenta ſuſpiceret, ac admiraretur; inueniendi quidem Artem ignorans.

Radix $d + \frac{g^2}{d} - g$

$d + \frac{g^2}{d} - g$

$-dg - \frac{g^3}{d} + g^2$

$g^2 + \frac{g^4}{d^2} - \frac{g^3}{d}$

$d^2 + g^2 - dg$

Quadratum $d^2 + \frac{g^4}{d^2} - 2dg - 2\frac{g^3}{d} + 3g^2$

$d + \frac{g^2}{d} - g$

$-d^2g - \frac{g^5}{d^2} + 2dg^2 + 2\frac{g^4}{d} - 3g^3$

$+ dg^2 + \frac{g^6}{d^3} - 2g^3 - 2\frac{g^5}{d^2} + 3\frac{g^4}{d}$

$d^3 + \frac{g^4}{d} - 2d^2g - 2g^3 + 3dg^2$

Cubus $d^3 + 6dg^2 + 6\frac{g^4}{d} - 3d^2g + \frac{g^6}{d^3} - 3\frac{g^5}{d^2} - 7g^3$

$d + \frac{g^2}{d} - g$

$-d^3g - 6dg^3 - 6\frac{g^5}{d} + 3d^2g^2 - \frac{g^7}{d^3} + 3\frac{g^6}{d^2} + 7g^4$

$d^2g^2 + 6g^4 + 6\frac{g^6}{d^2} - 3dg^3 + \frac{g^8}{d^4} - 3\frac{g^7}{d^3} - 7\frac{g^5}{d}$

$d^4 + 6d^2g^2 + 6g^4 - 3d^3g + \frac{g^6}{d^2} - 7dg^3 - 3\frac{g^5}{d}$

Quadrato-quadratū $d^4 + 10d^2g^2 + 10\frac{g^6}{d^2} - 4d^3g - 16dg^3 - 16\frac{g^5}{d} + \frac{g^8}{d^4} - 4\frac{g^7}{d^3} + 19g^4$

κλιμακωτῶς $\frac{g^8}{d^4} - 4\frac{g^7}{d^3} + 10\frac{g^6}{d^2} - 16\frac{g^5}{d} + d^4 + 19g^4 - 4d^3g - 16dg^3 + 10d^2g^2$

Cubus

Cubus $d^3 + 6\,d\,g^2 + 6\,\frac{g^4}{d} - d^2 g + \frac{g^6}{d^3} - 3\,\frac{g^5}{d^2} - 7\,g^3$

Coefficiens $\frac{g^3}{d^2} + g - d - \frac{g^2}{d}$

$d\,g^3 - 6\,g^4 - 6\,\frac{g^6}{d^2} + 3\,d\,g^3 - \frac{g^8}{d^4} + 3\,\frac{g^7}{d^3} + 7\,\frac{g^5}{d}$

$- d^4 - 6\,d^2 g^2 - 6\,g^4 + 3\,d^3 g - \frac{g^6}{d^2} + 3\,\frac{g^5}{d} + 7\,d\,g^3$

$d^3 g + 6\,d\,g^3 + 6\,\frac{g^5}{d} - 3\,d^2 g^2 + \frac{g^7}{d^3} - 3\,\frac{g^6}{d^2} - 7\,g^4$

$d\,g^3 + 6\,\frac{g^5}{d} + 6\,\frac{g^7}{d} - 3\,d\,g^4 + \frac{g^9}{d^3} - 3\,\frac{g^8}{d^2} - 7\,\frac{g^6}{d^2}$

$17\,d\,g^3 + 10\,\frac{g^7}{d^3} - d^4 - 22\,g^4 + 4\,d^3 g - 17\,\frac{g^6}{d^2} - 4\,\frac{g^8}{d^4} + \frac{g^9}{d^5} - 10\,d^2 g^2 + 22\,\frac{g^5}{d}$

κλιμακωτῶς $\frac{g^9}{d^5} - 4\,\frac{g^8}{d^4} + 10\,\frac{g^7}{d^3} - 17\,\frac{g^6}{d^2} + 22\,\frac{g^5}{d} - d^4 - 22\,g^4 + 4\,d^3 g + 17\,d\,g^3 - 10\,d^2 g^2$

$\frac{g^8}{d^4} - 4\,\frac{g^7}{d^3} + 10\,\frac{g^6}{d^2} - 16\,\frac{g^5}{d} + d^4 + 19\,g^4 - 4\,d^3 g - 16\,d\,g^3 + 10\,d^2 g^2$

$\frac{g^9}{d^5} - 3\,\frac{g^8}{d^4} + 6\,\frac{g^7}{d^3} - 7\,\frac{g^6}{d^2} + 6\,\frac{g^5}{d} - 3\,g^4 + d\,g^3$. Quod eſt ęquale comparationis homogeneo.

$\frac{g^3}{d^2} + g - \frac{g^2}{d}$

$\frac{g^3}{d^2} + g - \frac{g^2}{d}$

$- \frac{g^5}{d^3} - \frac{g^3}{d} + \frac{g^4}{d^2}$

$\frac{g^4}{d^2} + g^2 - \frac{g^3}{d}$

$\frac{g^6}{d^4} + \frac{g^4}{d^2} - \frac{g^5}{d^3}$

Quadratum $\frac{g^6}{d^4} + g^2 - 2\,\frac{g^5}{d^3} - 2\,\frac{g^3}{d} + 3\,\frac{g^4}{d^2}$

$\frac{g^3}{d^2} + g - \frac{g^2}{d}$

$\frac{g^8}{d^5} - \frac{g^5}{d} + 2\,\frac{g^7}{d^4} + 2\,\frac{g^5}{d^3} - 3\,\frac{g^6}{d^3}$

$\frac{g^7}{d^4} + g^3 - \frac{g^6}{d^3} - 2\,\frac{g^4}{d^2} + 3\,\frac{g^5}{d^2}$

$\frac{g^9}{d^6} + \frac{g^5}{d^2} - 2\,\frac{g^8}{d^5} - 2\,\frac{g^6}{d^3} + 3\,\frac{g^7}{d^4}$

Cubus $\frac{g^9}{d^6} + 6\,\frac{g^7}{d^4} - 3\,\frac{g^8}{d^5} + 6\,\frac{g^5}{d^2} + g^3 - 3\,\frac{g^4}{d} - 7\,\frac{g^6}{d^3}$

$+ d$

$\frac{g^9}{d^5} + 6\,\frac{g^7}{d^3} - 3\,\frac{g^8}{d^4} + 6\,\frac{g^5}{d} + d\,g^3 - 3\,g^4 - \frac{g^6}{d^2}$

$\frac{g^9}{d^5} - 3\,\frac{g^8}{d^4} + 6\,\frac{g^7}{d^3} - 7\,\frac{g^6}{d^2} + 6\,\frac{g^5}{d} + 3\,g^4 - d\,g^3$

Rectè

Rectè igitur illud; In huiuſmodi æquatione ſunt quatuor continuè proportionales, quarum alternè ſũptarum differentia eſt b; & fit z planoplanũ ductu vtriuſuis extremæ in cubum differentiæ reliquarum alternè ſumptarum; Dumque intelligitur prima minor inter extremas, eſt a differentia alternè ſumpta trium primarum, & differentia trium poſtremarum.

Auctor declarat magis ſupradicta.

Diximus autem ſupra 216 comparationis homogeneum fieri, &c. quod, vt declaremus 2, differt ab 8, per 6; idque quoniam in ratione dupla coincidit, cum differentia reliquarum alternè ſumptarum; nam ſi 2, ſecundus terminus addatur ad 8, vltimum fit 10, a quo ſi dempſeris 4, remanet 6; cuius cubus ducendus eſt in 1, extremum alterum, &c. Quod in Specioſa reſolutione cernere licet, vbi generalem rationem efformandi comparationis homogeneum obſeruauimus. Verùm enim verò. Radices fiunt, vt enunciauimus.

Hic declarantur nonnulla, tradita pag. 138; vbi Auctor neglexit reductionem ſuam ad minimos terminos, huius autem redditur cauſa;

Hic obſeruandum occurrit, nos aliquando in fractionum vſu, ſuperiùs reductionem ad minores terminos neglexiſſe, & quidem vitandæ obſcuritatis cauſa, Tyronibus enim eſt magis obuia pragmatia per multiplicationem ſpecierum, quàm per applicationem. Si quis tamen cupiat eadem elegantiori forma tractare, ſic operabitur. Ad paginam quidem 138.

Si ſint quatuor latera continuè proportionalia, cubus è ſecundo æqualis eſt ſolido facto à quadrato primi in quartum.

Sit a, primum in ſerie quatuor continuè proportionalium; ſecundum eſto b; erit ob id $\frac{b^2}{a}$ tertium; Si enim b, quadraticè in ſe multiplicetur, fit b^2, quo applicato ad a, fit $\frac{b^2}{a}$ tertium; deinde ſi $\frac{b^2}{a}$, in ſe quadraticè multiplicetur, fit $\frac{b^4}{a^2}$ quo applicato ad b, ſecundum, fit $\frac{b^4}{aab}$ hoc autem elidendo b; fit $\frac{b^3}{a^2}$, & hoc eſt quartum; ſunt igitur quatuor latera continuè proportionalia a; b; $\frac{b^2}{a}$; $\frac{b^3}{aa}$. Ducatur a, primum in ſe quadraticè, & fit a^2; quo ducto in quartum $\frac{b^3}{a^2}$ fit productum $\frac{a^2b^3}{a^2}$; hoc æquatur b^3, ſiquidem elidendo a^2; remanet b^3.

Non diſſimiliter pagina 141; hoc modo.

Quæ tradita ſunt pag. 141 item declarantur.

Si ſint quatuor latera continuè proportionalia; cubus à differentia mediorum, plus ſolido facto ex triplo rectangulo ſub medijs, vel extremis, & eadem differentia mediorum, æqualis eſt ſolido à rectangulo triplo prædicto, in differentiam extremorum.

Sunt latera continuè proportionalia, a; b; $\frac{b^2}{a}$; $\frac{b^3}{a^2}$ differentia mediorum eſt $b - \frac{b^2}{a}$; huius cubus eſt $b^3 - 3\frac{b^4}{a} + 3\frac{b^5}{a^2} - \frac{b^6}{a^3}$; at verò rectangulum ſub medijs eſt $\frac{b^3}{a}$, cuius triplum eſt $3\frac{b^3}{a}$, quo ducto in $b - \frac{b^2}{a}$; differentiam mediorum laterum, producitur $3\frac{b^4}{a} - 3\frac{b^5}{a^2}$; quo addito ad cubum iam dictum, fit $b^3 - \frac{b^6}{a^3}$. Hoc idem autem euenit, ſi multiplicetur $\frac{b^3}{a}$ rectangulum ſub medijs, per $a - \frac{b^3}{a^2}$; differentiam extremorum; & prouenit $b^3 - \frac{b^6}{a^3}$. Cæterum ſuppoſuimus a, majus eſſe extremum è quatuor lateribus proportionalibus; proinde b; maius eſt, quàm $\frac{b^2}{a}$; quamobrem differentia mediorum laterum eſt $b - \frac{b^2}{a}$ quemadmodum differentia extremorum eſt $a - \frac{b^3}{a^2}$.

Ita pagina 146.

Quæ tradita ſunt pag. 146. enucleantur.

Differentia inter primam, & tertiam ad differentiam inter ſecundam, & quartam in ſerie quatuor continuè proportionalium, eſt vt prima ad ſecundam, atque adeo vt ſecunda ad tertiam, vt tertia ad quartam.

Sit prima a, ſecunda b, tertia erit $\frac{b^2}{a}$, & quarta erit $\frac{b^3}{a^2}$ igitur ſunt in continua ratione; vt verò differentia inter primam, & tertiam, eſt $\frac{b^2}{a} - a$ ita qnidem differentia inter ſecundam, & quartam eſt $\frac{b^3}{a^2} - b$. Oſtendendum eſt, ita eſſe $\frac{b^2}{a} - a$ ad $\frac{b^3}{a^2} - b$, vt a ad b; Quoniam enim ſi ſint proportionales $\frac{b^2}{a} - a$; $\frac{b^3}{a^2} - b$; a; & b; erit factum ſub extremis, æquale facto ſub medijs; propterea $\frac{b^3}{a} - ab$; æquabitur $\frac{ab^3}{a^2} - ab$. At ita ſe habet, nam $\frac{b^3}{a} - ab$; idem eſt, quod $\frac{b^3 - a^2b}{a}$. At verò $\frac{ab^3}{a^2} - ab$; idem eſt quod $\frac{ab^3 - a^3b}{a^2}$ at elidendo a, fit $\frac{b^3 - a^2b}{a}$; vt prius; quare proportinnales erunt hæ magnitudines, vt a ad b; ita $\frac{b^2}{a} - a$ ad $\frac{b^3}{a^2} - b$. Quod nobis erat iniunctum oſtendere.

Inſuper pagina 147.

Quæ tradita ſunt pag. 147. illuſtrantur.

In ſerie qiatuor continuè proportionalium, vt eſt prima ad ſecundam, &c. ita aggregatum primæ, & tertiæ, ad aggregatum ſecundæ, & quartæ.

Sit

Sit prima a, ſecunda b, tertia erit $\frac{b^2}{a}$, & quarta $\frac{b^3}{a^2}$. Aggregatum ex prima, & tertia eſt $a + \frac{b^2}{a}$; aggregatum ex ſecunda, & quarta eſt $b + \frac{b^3}{a^2}$. Vt autem eſt a ad b; &c. ita eſt $a + \frac{b^2}{a}$ ad $b + \frac{b^3}{a^2}$, quod multiplicatione comprobatur multiplicatis enim extremis, & medijs fiunt, producta æqualia; ducatur a in $b + \frac{b^3}{a^2}$ fit $a\,b + \frac{a\,b^3}{a^2}$, hoc eſt $a\,b + \frac{b^3}{a}$, ducatur b in $a + \frac{b^2}{a}$ fit $a\,b + \frac{b^3}{a}$. Sunt ergo in eadem ratione.

Hac igitur ratione in ſuperioribus operationibus fractiones, quas dicebamus, ad minimos terminos rediguntur; quod ibi, vt diximus neglexímus ob eam quam attulimus cauſam. Deinceps verò, ſiquidem Lectorem ſupponimus in his inſtructum, & ab huiuſmodi ſtudijs paratum, fractiones ad minimos terminos redegimus, vt in proximè habita pragmatia videre licet, & in ſequentibus etiam hoc idem intueri licebit. Atq; etiam alibi ſupra vbi reductio ad minimos terminos neglecta eſt, huiuſmodi reductionem cuilibet facillimum erit ex præceptis traditis, perficere. *Superadictæ iteratio.*

S C H O L I O N.

ADuerte circa æquationes, exempli gratia, ordinis quadrato-quadratici. Vt cùm diceremus; ſi $a^4 + b$ ſolido a æquetur z plano-plano; & rurſus $e^4 - b$ ſol. e æquetur z plano-plano; quatuor eſſe continuè proportionales, à quibus cubi alternè ſumpti differunt per b ſolidum, fie verò z plano-planum ductu alterius extrema in differentiam cuborum à reliquis alternè ſumptarum, eſtque a, prima minor inter extremas, & e eſt quarta, ſi quis eius quoque veritatis demonſtrationem deſideret, ſic Analyticè ſe habet. *Pag. 160.*

Sint d, g, $\frac{g^2}{d}$, $\frac{g^4}{d\,g}$ ſeu $\frac{g^3}{d^2}$ continuè proportionales, quarum cubi ſunt d^3; g^3; $\frac{g^6}{d^3}$; $\frac{g^9}{d^6}$. Si igitur alternè ſumantur; vt d^3, & $\frac{g^6}{d^3}$ item g^3, & $\frac{g^9}{d^6}$ fiet aggregata $d^3 + \frac{g^6}{d^3}$, & $g^3 + \frac{g^9}{d^6}$ quorum differentia eſt $g^3 + \frac{g^9}{d^6} - d^3 - \frac{g^6}{d^3}$ hoc autem ducto in d, alteram ex extremis, fit $d\,g^3 + \frac{g^9}{d^5} - d^4 - \frac{g^6}{d^2}$, & hoc erit comparationis homogeneum. *Superiora demonſtrantur.*

At verò cubus primi termini eſt d^3, cui addito cubo tertij termini, hoc eſt, addito $\frac{g^6}{d^3}$ fit $d^3 + \frac{g^6}{d^3}$ deinde cubo ſecundi termini; hoc eſt g^3 addito ad $\frac{g^9}{d^6}$ cubum quarti termini, fit $\frac{g^9}{d^6} + g^3$ quorum differentia eſt $\frac{g^9}{d^6} + g^3 - d^3 - \frac{g^6}{d^3}$, & hoc eſt coefficiens ſolidum, quod ductum in d alteram extremarum, facit $\frac{g^9}{d^5} + d\,g^3 - d^4 - \frac{g^6}{d^2}$ hoc autem ſi adſciſcat d^4, facit $\frac{g^9}{d^5} + d\,g^3 - \frac{g^6}{d^2}$ quod erat comparationis homogeneum, &c.

Nec diſſimili modo cum altera adhibetur extrema, &c.

Rectè propterea dicebatur eſſe quatuor continuè proportionales, &c. Hoc itaque modo, æquationis ad hoc genus pertinentis naturam ſum aſſecutus.

Interim aduertè ſimili artificio cætera quidem inquiri, quæ de æquationibus cuiuſq; ordinis traduntur; atque adeo, quę ab alijs; in re de qua agimus explicata ſunt, inueniri, nullo labore, poſſunt.

Si $a^6 + b\,a^5$, æquetur z ſolido-ſolido; & rurſus $e^6 - b\,e^5$, æquetur z ſolido-ſolido. *Æquatio quadrato-cubica proponitur.*

Sunt ſex continuè proportionales, quarum alternè ſumptarum differentia eſt b, fitque z ſolido-ſolidum ductu vtriuſuis extremę in quadrato-cubum differentiæ reliquarum alternè ſumptarum, denique prima intelligitur minor inter extremas, fit a differentia alternè ſumpta quinque primarum, & e differentia quinque poſtremarum.

Sunto continuè proportionales 1, 2, 4, 8, 16, 32, 1 CC + 21 Q C, æquabitur 5153632. Fitque 1 R 11; & rurſus 1 CC − 21 Q C, æquabitur 5153632, fitque 1 R, 22. *Numeris eadem tractantur.*

Si enim ad 1, addatur 4, fit 5, cui ſi addatur 16, fit 21. Deinde ſi ad 2, addatur 8, fit 10, cui ſi addatur 32, fit 42, differt autem 42, à 21, per 21.

At verò 5153632, fieri ductu vtriuſuis extremæ in quadrato-cubum differentiæ, *explicatio per numeros.*

patet, ſiquidem, ſi ad 2, addatur 8, fit 10, cui addito 32, fit 42; Deinde ad 4, ſi addas 16, fiet 20, liquet autem 20, differre à 42, per 22. Si verò 22, ducatur in ſe quadraticè fit 5153632, vt perſpicuum eſt; hoc autem ducto in 1, extremum vnum fit idem numerus.

Explicatio vlterior.

Deinde ſi ad 1, addamus 4, fiet 5, huic addito 16, fit 21, ſi verò ad 2, addamus 8, fiet 10; Differt autem 10, à 21, per 11, huius quadrato-cubus eſt 161051; qui ductus in 32, extremum alterum, producit 5153632.

Cæterum radix eſt 11, & 22, nam 1, 4, & 16, conficiunt 21, at 2, & 8, efficiunt 10, quorum differentia 11; vel 32, 8, & 2, faciunt 42, at 16, & 4, faciunt 20, quorum differentia 22.

Quando fuerint æquationes Inuerſæ.

Si verò fuerint æquationes Inuerſæ; ita ratiocinandum.

Si b a — a^2 æquetur z plano; & rurſus e^2 — b e æquetur z plano.

Duo ſunt quidem latera, ad quæ ſic ſe habet magnitudo b; vt hæc tanto exceſſu ſuperetur à maiori latere, vt hic ductus in idem latus faciat z planum, nempe comparationis homogeneum; at verò tanto exceſſu ſuperet latus minus, vt hic ductus in idem latus minus, faciat idem z planum; Quod primò numeris, mox verò Geometricè tractabimus.

Explicantur ſuperiores æquationes.

Sint 4; 6 $\frac{2}{3}$, & 8 itaut 1 $\frac{1}{3}$, exceſſus, quo 8, ſuperat 6 $\frac{2}{3}$, ductus in 8; faciat 10 $\frac{2}{3}$, & 6 $\frac{2}{3}$; ſuperat 4, exceſſu 2 $\frac{2}{3}$ qui ductus in 4, faciat 10 $\frac{2}{3}$, ergo 1 Q — 6 $\frac{2}{3}$ R, æquabitur 10 $\frac{2}{3}$; fitque 1 R 8; Et rurſus 6 $\frac{2}{3}$ R — 1 Q æquabitur 10 $\frac{2}{3}$, fitque 1 R; 4, Latera igitur ſunt 4, & 8, atque 6 $\frac{2}{3}$, coefficiens ſe habet, modo iam explicato,

Sint inſuper 6; 8 $\frac{1}{2}$, & 10; Itaut 1 $\frac{1}{2}$, exceſſus, quo 10, ſuperat 8 $\frac{1}{2}$; ductus in 10; faciat 15: quantum facit 2 $\frac{1}{2}$, exceſſus, quo 8 $\frac{1}{2}$ ſuperat 6; ductus in 6, ergo 1 Q — 8 $\frac{1}{2}$ R æquabitur 15, fitque 1 R, 10, & rurſus 8 $\frac{1}{2}$ R — 1 Q æquabitur 15; fitque 1 R, 6.

Inſuper ſint 8; 10 $\frac{2}{5}$, & 12 itaut 1 $\frac{3}{5}$ exceſſus, quo 12; ſuperat 10 $\frac{2}{5}$ ductus in 12; faciat 19 $\frac{1}{5}$; quantum facit 2 $\frac{2}{5}$ exceſſus, quo 10 $\frac{2}{5}$, ſuperat 8; ductus in 8; ergo 1 Q — 10 $\frac{2}{5}$ R æquabitur 19 $\frac{1}{5}$ fitque 1 R 12; & rurſus 10 $\frac{2}{5}$ R — 1 Q æquabitur 19 $\frac{1}{5}$, & fit 1 R, 8.

Obſeruanda quædam.

Hic autem obſerua tres eſſe quantitates, quod commune eſt tribus quibuſcunque quantitatibus; itaut facta à lateribus in coefficientem conſtituant planum, quod applicatum, ad laterum aggregatum, coefficientem reſtituant.

Theorema ex hactenus dictis.

Cæterùm quę paulo antea dicebamus, nullo labore Geometricè oſtendi poſſunt, eſt enim Theorema.

Si ſint tres quantitates, itaut prima ſuperante ſecundam, ſecunda ſuperet tertiam, vel prima deficiente a ſecunda, ſecunda deficiat à tertia, differentia verò inter primam, & ſecundam ducta in primam, tantùm faciat, quantum differentia inter ſecundam, & tertiam, ducta in tertiam. Quadratum maxima, minus rectangulo ſub eadem, & media æquale eſt rectangulo ſub minima, & media, minus quadrato eiuſdem minima.

Explicatio ſupradictorum.

Quoniam enim ſi duæ ſint rectæ, quarum maior, quæ dicatur prima ſecta ſit per inæqualia, minor, quæ dicatur ſecunda ſit ęqualis maiori ipſius primæ ſegmento; quæ ſit itidem per inæqualia diuiſa; itaut factum ſub prima, & minori ſegmento, ęquale ſit facto ſub ſegmentis ſecundæ, ſequitur intentum. Quadratum enim primę, minus rectangulo ſub eadem, & ſegmentorum vno, puta maiori, idem eſt, quod rectangulum ſub eadem, & ſegmento reliquo, nempe minori; Et rectangulum ſub ſecunda, quæ ſupponitur ęqualis maiori ſegmento primę; & ſegmentorum vno puta minori, minus quadrato eiuſdem minoris ſegmenti, idem eſt, quod rectangulum ſub iiſdem ſegmentis. Sed factum ſub prima, & ſegmento minori, ex hypotheſi ęquale eſt facto ſub ſegmentis ſecundę; ergo quadratum primę minus rectangulo ſub eadem, & ſegmento maiori, æquabitur facto ſub ſecunda, & ſegmento minori, minus quadrato minoris. Et hęc de ęquatione quadratica.

Proponitur æquationes cubica.

Si b plano a — a^3 ęquetur z ſolido, & rurſus e^3 — b plano e ęquetur z ſolido.

Explicatio.

Sunt tres proportionales, quarum quadrata, alternè accepta differunt per b planum

num; ſit verò z ſolidum ductu alterius extremæ in differentiam quadratorum à reliquis; eſtque a; prima minor inter extremas, & quidem tertia.

Sint proportionales 1, ℞ 2, 2; ergo 3 R — 1 C ęquabitur 2; ſitque 1 R, 1; Rurſus 1 C — 3 R ęquabitur 2, ſitque 1 R, 2, vel ſunt proportionales 2, 4, 8, & 52 R — 1 C ęquabitur 96, ſitque 1 R, 2; Rurſus 1 C — 52 R ęquabitur 96, ſitque 1 R, 8.

Numeris eadem oſtenduntur.

Quadratum enim ex 1, eſt 1; ex 2, eſt 4, quorum aggregatum eſt 5; à quo ſi dempſeris 2; quadratum ipſius ℞ 2, remanet 3, coefficiens. Item quadratum ex 2 eſt 4; quadratum ex 8, eſt 64, quorum ſumma eſt 68; à quo ſi dempſeris 16, quadratum ex 4, remanet 52, coefficiens, &c.

Explicatio.

Deinde ad comparationis homogeneum quod attinet. Si 1, vna è duabus extremis, ducatur in 2; differentiam quadratorum à ℞ 2, & 2, quæ ſunt 2, & 4, fit 2 comparationis homogeneum. Item ſi 2; extremarum vna ducatur in 48; differentiam quadratorum, quæ ſunt 16, & 64; fit 96, comparationis homogeneum. Non erit abs re hic nonnihil immorari.

Efformatio comparationis homogenei.

Et certè ſi ſint tres proportionales 1, ℞ 2, 2, & quadrata alternè ſumantur differunt per 3; ſiquidem quadratum ex 1, eſt 1; cui ſi addatur 4, quadratum ex 2; fiet 5, à quo ſi auferatur 2, quadratum ex ℞ 2; remanebit 3, & pręterea manifeſtum eſt 2, fieri ductu alterius extremę, &c. Nam ſi ſumatur pro extremo 1; differentia quadratorum à reliquis, erit 2, qui ductus in 2; facit 2; Si verò ſumatur 2; differentia quadratorum à reliquis, erit 1, quę ducta in 2; facit 2;

Explicatio ſupradictorum.

De ęquationibus nullus eſt ambigendi locus; nam ſi 1 R valor eſt 1; 3 R, valebunt 3; & 1 C valebit 1; Si auferamus 1, à 3, remanebit 2, numerus conſtituens alteram æquationis partem. Pręterea ſi 1 R valor ſit 2, 1 C valebit 8; & 3 R valebunt 6, his ablatis abs 8, remanet idem numerus 2.

Æquationum comprobatio.

Ad aliud exemplum quod attinet, quadratum ex 2 eſt 4, cui ſi addatur 64, quadratum ex 8, fiet ſumma 68, à quo ſi auferamus 16, quadratum ex 4, remanebit 52.

Exemplum alterum declaratur.

Deinde ſi à 64, quadrato ex 8; auferamus 16, quadratum ex 4, remanebit 48; qui ductus in 2; facit 96; Vel ſi à quadrato ex 4, nempe 16; auferamus 4, quadratum ex 2, remanebit numerus 12; qui ductus in 8; facit pariter 96. Ad æquationes, quod attinet. Si 1 R valor eſt 2; certè 52 R valebunt 104; à quo ſi auferamus 8; cubum ex eodem 2; remanebit 96; faciens alteram æquationis partem. Si verò 1 R dicatur 8, eius cubus erit 512, & 52 R, valebunt 416. Si verò auferamus 416 abs 512; remanebit 96.

Si b pl.pl. a — a' æquetur z pl.ſolido; & rurſus e' — b pl.pl. a æquetur z planoſolido.

Æquationes quadrato cubica.

Sunt quinque magnitudines continuè proportionales, à quibus quadrato-quadrata alternè ſumpta differunt per b plano-planum; ſit verò z plano-ſolidum ductu alterius extremę in differentiam quadrato-quadratorum à reliquis alternè ſumptis ſitque a, prima, at e, quinta. Vnde ſi ſint continuè proportionales 1; ℞ Q Q 2, ℞ Q Q 4, ℞ Q Q 8, 2. 11 Q — 1 Q C ęquab. 10, & ſit 1 R, 1, & 1 Q C — 11 R ęquab. 10, & ſit 1 R, 2.

Explicatio.

Numeris eadem tractantur.

Et quidem ſi quadrato-quadrata numerorum illorum continuè proportionalium alternè ſumantur, differunt per 11; etenim ſi ad 1; quadrato-quadratum ex 1; addatur 4, quadrato-quadratum ex ℞ Q Q 4, fit 5; cui ſi addatur 16, quadrato-quadratum ex 2, fit 21. At verò ſi ad 2, quadrato-quadratum ex ℞ Q Q 2; addatur 8; quadrato-quadratum ex ℞ Q Q 8, fit 10; conſtat autem 10, differre à 21 per 11. At verò 10, fieri ductu alterius extremi, &c. patet, ſiquidem ſi ad 2 quadrato-quadratum ex ℞ Q Q 2; addatur 8; ſcilicet quadrato-quadratum ex ℞ Q Q 8, fit ſumma 10, at verò ad 4, numerum, qui eſt quadrato-quadratum ex ℞ Q Q 4, ſi addatur 16, nempe quadrato-quadratum ex 2, fit 20. Manifeſtum eſt autem 10, differre à 20, per 10, hic ſi ducatur in 1, extremum vnum fit 10, &c.

Hactenus tradita numeris explicantur.

Deinde ſi ad 1, addamus 4; fit 5; ſi verò ad 2, addamus 8, fit 10, differt autem 10 à 5, per 5; hic ſi ducatur in 2; extremum alterum, producitur idem numerus 10.

Cæterum ex hactenus traditis, conſtabit apertè, vnde huiuſmodi æquationum ratio proueniat. Interim, & modo iam explicato poteſt quidem oſtendi, vnde conſtet ratio, qua veritates iam traditę fuerint adinuentæ.

Fit reditus ad cubicas æquationes. Si b a^2 + a^3 æquetur z ſolido. Et rurſus b e^2 — e^3 ęquetur z ſolido.

Sunt tres proportionales, quarum alternè ſumptarum differentia eſt b; at verò z ſolidum fit ductu alterius extremæ in quadratum differentię reliquarum alternè ſumptarum. Dumq; prima intelligitur, minor inter extremas, a eſt differentia, alternè ſumpta primarum duarum, & e differentia duarum poſtremarum.

Numeris eadem tractantur, ac explicantur. Sunto quidem proportionales 1, 2, 4, vtique 3 Q + 1 C æquatur 4, fit 1 R, 1. Rurſus 3 Q — 1 C æquatur 4, fit 1 R, 2.

Vel ſunto proportionales 2, 4, 8. Vtique 6 Q + 1 C ęquabitur 32, & fit 1 R, 2. Rurſus 6 Q — 1 C æquabitur 32, & fit 1 R; 4.

Hæ autem ęquationes numeris explicari nullo negotio poſſunt.

Æquatio quadrato-cubica affecta ſub quadrato-quadrato. Si b a^4 + a^5 æquetur z planoſolido, & rurſus b e^4 — e^5 æquetur z planoſolido.

Sunt quinque continuè proportionales, quarum alternè ſumptarum differentra eſt b; at z planoſolidum fit ductu alterius extremę in quadrato-quadratum differentæ reliquarum alternè ſumptarum; Atque dum prima intelligatur minor inter extremas, eſt a differentia quatuor primarum alterne ſumptarum, & e differentia quatuor poſtremarum.

Explicatio per numeros. Sunto proportionales 1, 2, 4, 8, 16; & 11 QQ + 1 QC æquabitur 10000; fitque 1 R 5.

Et rurſus 11 Q Q — 1 Q C æquabitur 10000 fitque 1 R 10.

Si proportionales dentur, 1, 2, 4, 8, 16, certè alterne ſumptorum differentia erit 11; nam ſi ad 1, addatur 4; fit 5, cui addito 16; fit 21. Deinde ad 2; addito 8; fit 10; Conſtat autem 21 differre a 10 per 11; Fieri autem 10000, vt dictum eſt; patet, nam ad 2; addito 8; fit 10, & ad 4, addito 16, fit 20; perſpicuum eſt horum differentiam eſſe 10, cuius quadrato-quadratum eſt 10000; quo ducto in 1 extremum vnum fit 10000. Deinde ſi ad 1, addatur 4; fit 5, & ſi ad 2 addatur 8, fit 10 quorum differentia eſt 5, cuius quadrato-quadratum eſt 625, quo ducto in 16, extremum alterum, fit 10000. Vt ſupra autem poterunt ęquationes, ad examen vocari.

Æquatio quadrato cubica, Si b planum a^3 + a^5 ęquetur z planoſolido. Et rurſus b planum e^3 — e^5 æquetur z palnoſolido.

Sunt ſex continuè proportionales, quarum extremæ ductæ in differentiam quartę, & primæ faciunt b planum. At verò z planoſolidum fit, ſeu componitur ex cubo differentię quartæ, & primæ in b planum, plus quadrato eiuſdem differentiæ. Vel componitur ex cubo differentiæ quintæ, & ſecundæ in b planum, minus quadrato illius differentiæ, inter quintam, & ſecundam.

Cùm autem prima intelligitur minor inter extremas, eſt a, differentia primæ, & quartæ, & e ſit differentia ſecundæ, & quintæ.

Numeris eadem tractantur. Sunto proportionales 1, 2, 4, 8, 16, 32, & 231 C + 1 QC æquabitur 96040, fitque 1 R, 7; Et rurſus 231 C — 1 QC æquabitur 96040 fitque 1 R, 14. Sint ſex proportionales numeri iam dicti; differentia primi, & quarti, dum intelligitur primus minor inter extremas, eſt 7, hæc autem differentia, ſi ducatur in extremorum ſummam, fit 231; fit verò 96040, ex 343 cubo differentiæ quarti, & primi, nempè 7, in 280, hoc eſt 231, plus 49; quadrato eiuſdem differentiæ. Vel ex cubo numeri 14, qui eſt differentia ſecundi, & quinti in 35, differentiam inter 231, & 196 quadratum eiuſdem 14, producitur idem numerus 96040.

Æquatio quadrato-cubica affecta ſub quadrato. Si b ſol. a^2 + a^5 æquetur z planoſolido. Et rurſus b ſol. e^2 — e^5 æquetur z plano ſolido. Sunt ſex continuè proportionales, quarum extremę ductæ in quadratum ex differentia primæ, & tertiæ faciunt b ſolidum. Fit verò z planoſolidum ex b ſolido, plus cubo differentię inter tertiam, & primam, in quadratum eiuſdem differentię. Vel fit z planoſolidum ex b ſolido, minus cubo à differentia inter ſecundam, & quartam, in quadratum illius differentię inter ſecundam, & quartam. Dumque prima intelli-

intelligitur minor inter extremas, ſit a, tertia minus prima, & e, ſit quarta minus ſecunda.

Sint proportionales 1, 2, 4, 8, 16, 32, & 297 Q ✠ 1 QC ęquabitur 2916, & ſit 1 R, 3, & rurſus 297 Q — 1 Q C æquabitur 2916, ſitque 1 R 6. Hec verò ſupradictorum imitatione, & declarari, & demonſtrari poterunt. *Numeris eadem tractantur.*

Iterum ad inuerſas, quod attinet.

Inſuper ſi b pl. a — a^3 æquetur z ſolido, & rurſus e^3 — b pl. e æquetur z ſolido. Sunt tres proportionales, quarum quadrata ſimul iuncta conficiunt b pl.. At verò extremarum ſumma ducta in mediæ quadratum facit z ſolidum. Vel extremarum altera ducta in aggregatum quadratorum à duabus reliquis, facit z ſolidum, ſitque a, alterutra extremarum, & e, earundem ſumma. Vt ſi ſint 1, 2, 4, & 21 R — 1 C æquabitur 20, ſitque 1 R, 1, vel 4. Rurſus 1 C — 21 R æquabitur 20, ſitque 1 R, 5. Vel ſint proportionales 2, 4, 8, & 84 R — 1 C æquabitur 160, ſitque 1 R, 2, vel 8, & rurſus 1 C — 84 R ęquabitur 160, ſitque 1 R, 10. *Inuerſarum alia conſtitutio.*

Si b a^2 — a^3 æquetur z ſolido, & rurſus b e^2 † e^3 æquetur z ſolido.

Sunt tres proportionales, quarum ſumma eſt b, at verò compoſita è duabus primis addita compoſitæ, è duabus reliquis, & hoc aggregatum ductum in mediæ quadratum facit z ſolidum. Vel altera extremarum ducta in quadratum compoſitæ a duabus reliquis facit z ſolidum; & ſit a alterutra prædictarum compoſitarum, & e media inter ipſas extremas. *Æquatio inuerſa cubica affecta ſub quadrato.*

Sint proportionales 1, 2, 4, & 7 Q — 1 C æquabitur 36, ſitque 1 R 3, vel 6, & rurſus 7 Q † 1 C æquabitur 36, ſitque 1 R, 2. *Numeris eadē tractantur.*

Vel ſint proportionales 2, 4, 8, & 14 Q — 1 C æquabitur 288; & ſit 1 R, 6, vel 12, & rurſus 14 Q † 1 C æquabitur 288; ſitque 1 R, 4.

Quæ profecto ſunt manifeſta; Si enim ſint 1, 2, 4, numeri continuè proportionales, ſumma ipſorum eſt 7; compoſitus verò numerus è duobus primis, eſt 3; at ex duobus reliquis eſt 6; quorum ſumma eſt 9, quæ ducta in 4; mediæ quadratum facit 36, eodemque pacto diſcurrendum eſt ſuppoſitis proportionalibus 2, 4, 8.

Quandoquidem cùm fuerint æquationes 14 Q — 1 C ⩵ 288, & 14 Q † 1 C ⩵ 288.

Sunt tres proportionales 2, 4, 8; horum ſumma eſt 14, at verò 288, ſit ſi 6, compoſitus è duobus primis addatur 12, compoſito è duobus reliquis, & prouenit 18; hic autem numerus ſi ducatur in 16 quadratum medij, prouenit 288. Vel ſi 8 alter extremorum numerus ducatur in 36 quadratum cõpoſiti à duobus reliquis, ſit 288. Fit autem in prima æquatione 1 R valor, alteruter prædictorum compoſitorum, nimirum 6, compoſitus ex 2, & 4; vel 12, compoſitus è duobus reliquis. In altera verò ſit 1 R valor 4, medius proportionalis, &c.

Cæterum hæc omnia demonſtrari poſſunt, ad eum quem ſuperiùs explicuimus modum; ſupradictorum enim imitatione, & quæ hactenus in medium attulimus, & quæ deinceps afferemus oſtendi commode poſſunt. *Omnia explicari demonſtrarique poſſunt imitatione ſupradictorum.*

Qua

Qua induſtria Analyſta vitijs laborantes æquationes emendet, & quo pacto εὐμήχανος fiat.

CAPVT XXI.

Præparatione laborantes æquationes emendantur.

PRæparatione curantur æquationes vitijs laborantes, quæ cùm alioquin mechanicen reſpuant, explicabiles fiunt; vel nimirum noua inſtituta Zeteſi, vel Plaſmatis, ſiue etiam Syncriſeos repetitis veſtigijs. Pluribus autem modis præparatio contingit, è quibus quilibet ad æquationis propoſitæ, ſiue re, ſiue numero, felicem explicationem conducit.

Quinque præparandi æquationes modi.

Primò quidem fit quadam tranſmutatione per additionem, vel ſubtractionem. Secundò per immutationem terminorum, vt qui primus, per metamorphoſin poſtremus euadat, & contra. Tertiò per tranſmutationem quarundam æquationum in alias. Quartò per æquam diuiſionem. Quintò per quandam ſpeciem irregularis deſcenſus.

Primus eſt expurgatio per vncias.

Primus quidem præparationis modus valet aduersùs ęquationis vitium; illud Gręci, πολυπαθίαν. Latini autem nimiam, ſeu multiplicem affectionem; appellant hic autem tranſmutationis modus expurgatio per vncias dici conſueuit; propterea quod fit per quaſdam additas, vel ſubtractas coefficientis partes, etenim hoc artificio. Poteſtates affectæ ſub extremo parodico gradu, quem ſuſtinent coefficientes radici homogeneæ regulariter huiuſmodi affectione liberantur, ſalua numerorum ſymmetria, vt ſi fuerit $a^2 + 2\,b\,a = z$ plano, æquatio, atqueadeo poteſtas eſt affecta, & quidem ſub extremo parodico gradu, cuiusmodi eſt a, quem ſuſtinet b coefficiens radici homogenea, hac autem præparandi ratione hæc æquatio, & cæteræ liberantur affectione, ſalua numerorum ſymmetria. Quoniam verò multiplex æquatio eſt, pro multiplici poteſtatum natura; alia ſiquidem eſt quadratica, alia cubica, alia quadrato-quadratica, &c. Hoc obſeruandum, nempe omnium huiuſmodi tranſmutationum ſpeciem, fieri per determinatas coefficientis partes; ſed ratio partium diuerſa, pro æquationum diuerſitate, quod etiam in opere plaſmatico contingere notauimus. In æquationibus igitur quadraticis, pars adhibenda pro huiuſmodi tranſmutatione, eſt coefficientis dimidium. In cubicis eſt tertia pars. In quadrato-quadraticis eſt quarta pars, in quadrato-cubicis eſt quinta pars, in cubo-cubicis eſt ſexta pars; Itaut denominatio ſubmultiplicis proportionis, nimirum partis ad totum, habeatur ab exponente poteſtatis præpoſita particula ſub, vt denominatio rationis multiplicis, ad partem adhibendam, ex ipſomet exponente deſumatur; quare cùm quadrati exponens ſit 2; propterea in hac pragmatia ſumenda eſt pars, ad quam coefficiens rationem habet duplam; in cubis rationem habeat triplam, &c. atque adeo pars erit ſubdupla coefficientis in quadratis; ſubtripla in cubis, & ita deinceps, &c. & quia affectiones ſub eo gradu proficiſcuntur à cremento, vel decremento, quo affecta intelligitur radix, de qua primò quærebatur; Propterea in æquationibus quadraticis coefficiens magnitudo dupla eſt dicti crementi, vel decrementi, in cubicis eſt tripla, & ita deinceps, exempli gratia; Si ſit æquatio $a^2 + 2\,b\,a = z$ plano, quoniam æquatio quadratica eſt, coefficiens magnitudo; puta 2 b, dupla eſt crementi illius, quo radix intelligitur affecta, etenim a, intelligitur affici cremento b.

In æquationibus quadraticis quæ pars ſit adhibenda, quæ in cubicis, quæ in quadrato quadraticis, quæ in quadrato-cubicis, &c.

Deinde

Digitized by Google

Deinde ſi ſit $a^3 + 3\,b\,a^2 = z$ ſolido. Quoniam æquatio cubica eſt, 3 b coefficiens, tripla eſt illius crementi, quo radix a, intelligitur affecta, &c. Proinde ad Plaſma delendum. Illud enim plaſmaticum eſſe neminem latet; contraria via ſunt partes coefficientis conditionariæ, quas vncias appellant, contraria inquam via ſunt accipiendæ huiuſmodi conditionariæ vnciæ coefficientium radici homogenearum. Propterea in quadratis oportet ſumere dimidium, in cubis trientem, &c. & huiuſmodi conditionarijs vncijs (conditionariæ autem ſunt, pro poteſtatis, atque adeo æquationis conditione) afficitur radix; atque hunc in modum fit de qua loquimur traſmutatio; vnde in Quadratis radix eſt affecta coefficientis ſemiſſe, in Cubis, triente.

Æquatio cubica.

Vncia conditionaria qua pro ſingulis Æquationū ſpeciebus

Si poteſtas affecta fuerit, affirmatè, vt a poteſtas affecta ſit adiunctione homogenei ſub a b, coefficiente longitudine, & à parodico extremo gradu; cuiuſmodi eſt $a^2 + a\,b\,a = z$ plano. Cùm itaque ſit æquatio affirmata: radix afficitur affirmatè à conditionarijs vncijs ipſius 2 b, coefficientis, & radix ſic affecta ſtatuatur e; atque adeo e, minus conditionarijs vncijs ipſius coefficientis, æquabitur a; & ſub hac noua ſpecie primò æquatio propoſita dirigetur, ac ordinabitur noua, quod exemplo rem illuſtrabimus.

Quando poteſtas affecta fuerit affirmata.

Si $a^2 + 2\,b\,a$ æquetur z plano. Hæc æqualitas plaſmatica dicenda eſt, cum in ordine climacticarum magnitudinum latus proximè quadrato ſuccedat, & hìc proponitur, quadratum affectum ſub latere, cumque affectio ſit per affirmationem, propterea fuit plaſma per additionem ſemiſſis coefficientis ſub latere; quamobrem ad plaſma delendum, fieri debet expurgatio per ſemiſſem ipſius coefficientis, & vt Græci dicunt, per ἡμιτελίαν.

Exemplo declaratur ſuperior doctrina.

Propterea $a + b$, radix nempe adaucta nota magnitudine b; quæ dimidium eſt coefficientis 2 b; dicatur e; ergo $e - b$, æquabitur a, cum autem æquatio plaſmatica fuerit propoſita a^2 † 2 b a æquale z plano; ob id quadratum abs $e - b$, plus plano ſub b bis in $e - b$, çquabitur z plano, factaque de e, ordinatione ſecundum Artem, reperiemus $e^2 - b^2$ æquari z plano; ac demum per antitheſin e^2 æquabitur z plano † b^2, & ita æquatio primò propoſita exuta eſt affectione ſub gradu extremo.

Explicatio.

Si verò innoteſcat e; nequit a; ignorari.

Sit vnius a, valor 5; & b; 10; z planum verò ſit 125, vtique a † b; valebit 15; & ita e, valebit 15, ſi verò ab e, auferatur b, nempe de 15, ſubtrahatur 10, remanebit 5; nimirum a, at verò quadratum abs $e - b$, hoc eſt a 5; erit 25, huic ſi addatur planum factum ſub 2 b in $e - b$ hoc eſt ſub 20, & 5, quod eſt 100, fiet ſumma 125, æqualis alteri çquationis parti.

Numeris explicantur hactenus tradita.

Si ſit çquatio $a^3 + 3\,b\,a^2 + d$ plano $a = z$ ſolido. Cum in ordine magnitudinum climacticarum proximè cubo ſuccedat quadratum.

Proponitur æquatio cubica

Hçc æqualitas, in qua cubus afficitur ſub quadrato Plaſmatica erit, & aliunde effićta; & quoniam eſt affectio affirmata; ob id Plaſma fuit per additionem; cumque ſit æquatio cubica, fuit per additionem trientis 3 b, coefficientis, prout cubi conditio requirit. Itaque ad tollendum Plaſma, fiat expurgatio diatritemorion, hoc eſt per tertiam partem; atque adeo $a + b$; eſto e; proinde $e - b$ erit a, & ob id cubus abs $e - b$, nimirum $e^3 - 3\,b\,e^2 + 3\,b^2\,e - b^3$ plus ſolido abs 3 b in quadratum ex $e - b$ plus ſolido abs d pl. in $e - b$, æquabitur z ſolido, & ordinata çquatione, $e^3 + \overline{d\ pl. - 3\,b^2}\ e$ æquabitur z ſolido $+$ d pl. $b - 2\,b^3$.

Et hæc noua æquatio pura eſt, ab affectione illa ſub quadrato, qua primùm æquatio propoſita, obruebatur.

Æquatio in quam propoſita per expurgationem tråſformata eſt.

Secundo a poteſtas afficiatur multa homogenei ſub a b coefficiente, & a extremo parodico gradu, cùm affectio ſit negata vtique a, afficietur negate à conditionarijs 2 b, coefficientis vncijs, & ita ſtatuetur e, atque adeo e plus illis conditionarijs vncijs ipſius 2 b coefficientis æquabitur a, & ita çquatio illa primum propoſita, ſub hac noua ſpecie dirigetur, & ordinabitur noua, quç quidem eueniet prorſus immunis ab illa affectione ſub extremo gradu.

Æquatio quadratica negatiuè affecta, cui ineſt plaſma.

Proponatur $a^2 - 2\,b\,a$ çquari z plano. Quoniam æquatio eſt huiuſmodi, vt quadratum

dratum afficiatur ſub latere, & latus quadrato proximè ſuccedat, æquatio plaſmatica eſt aliundeue effecta; cum verò ſit affectio negata, fuit plaſma per ſubtractionem, & quoniam ęquatio eſt quadratica, erit ob id plaſma per ſubtractionem ſemeſſis coefficientis, iuxta conditionem quadrati, quæ eſt poteſtas rationis duplicatę. Itaque $a - b$, ſtatuetur e, ergo $e + b$ erit a; atque adeo quadratum abs $e + b$ æquabitur z plano, at verò ſi à quadrato ex $e + b$, ſubtrahatur planum illud $2be + 2b^2$ remanebit $e^2 - b^2$ proinde $e^2 - b^2$ æquabitur z plano, & per antitheſin e^2 æquabitur z plano $+ b^2$.

Proponitur æquatio cubica.

Proponatur $a^3 - 3ba^2$ æquari z ſolido. Æquatio plaſmatica erit per ſubtractionem trientis coefficientis, ad tollendum itaque plaſma fiat expurgatio per diatritemorion, ſeu per trientem, & $a - b$ ſtatuatur e, & æquatio de ipſa e ordinabitur; ſi itaque $a - b$ ſtatuatur e, ob id $e + b$ erit a, atque adrò cubus ab $e + b$ minus ſolido abs $3b$, in quadratum ex $e + b$ æquabitur z ſolido; itaque $e^3 - 3b^2e - 2b^3$ ęquabitur z ſolido, & per antitheſin $e^3 - 3b^2e$ æquabitur z ſolido $+ 2b^3$.

Generatim propoſita.

Proponatur homogeneum ſub $2b$ coefficiente, & a extremo gradu affici multa a poteſtatis; cùm itaque poteſtas negetur de homogeneo affectionis, & potiùs afficiat, quam afficiatur vncię conditionarię ipſius b coefficientis multabuntur a poteſtate, & ſtatuetur eſſe e; atque adeò vnciæ ipſius b coefficientis, minus radice e æquabuntur a, ſub hac verò noua ſpecie æquario prima propoſita dirigetur, & nona ordinabitur, quæ quidem prorſus immunis erit ab illa affectione ſub extremo gradu.

Proponitur æquatio quadratica ἀμφίβολα.

Proponitur $2ba - a^2$ æquari z plano, hæc æquatio plaſmatica eſt, fuitque plaſma per ſubtractionem radicis, à ſemiſſe coefficientis. Statuatur $b - a$ eſſe e, ergo $b - e$ erit a, proinde quadratum abs $b - e$, nimirum $e^2 - 2be + b^2$ ſi auferatur ab illo plano, quod continetur ſub $b - e$, & $2b$ remanebit $b^2 - e^2$, & hoc reſiduum æquabitur z plano, & per antitheſin fiet $e^2 = b^2 - z$ plano, immunis ab affectione, &c. Numeris autem hæc omnia poſſunt illuſtrari; ex hactenus verò dictus facilè conſtabit quomodo in cæteris æquationibus procedendum ſit.

REDVCTIO QVADRATORVM AFFECTORVM AD PVRA.

Quæ remedium eſt aduerſus æquationum πολυπαθίαν.

Reductio de qua hic diſſeritur, quomodo Græcè dicatur Prima reductio æquationis in qua quadratum afficitur adiunctione plani ſub latere dataque coefficiente longitudine.

OPus quod hìc aggredimur Gręcè diceretur ἐπαναφορὰ; eſtque tantę vtilitatis, in Arte, vt nihil maioris momenti reperire liceat.

Si $a^2 + 2ba$ æquetur z plano. Supponatur $a + b$, eſſe e. Dico e^2 æquari z plano $+ b^2$.

Quandoquidem; Si recta linea bifariam ſecetur, eidemque addatur quædam in directum, quadratum autem adiunctæ, plus rectangulo ſub adiuncta, & diuiſa, æquale ſit plano. Quadratum aggregati ex dimidio diuiſæ, & ex adiuncta, æquale erit eidem plano, plus quadrato dimidij iam dicti.

Ad huius autem veritatis indagationem ſic procedit Analyſta.

Demonſtratio

Sit $a + b$ æquetur e, ergo $e - b$ æquabitur a. Quoniam autem poteſtas in æquatione quadratum erat, & ex $e - b$ quadratum ortum eſt $e^2 - 2be + b^2$; hoc propterea, illius loco ſubſtituatur; cùmque æquatio foret affecta adiunctione plani ſub latere, dataque coefficiente longitudine, etenim $2ba$; afficiebat a^2 per affirmationem; proinde intelligatur $2b$, ductum in $e - b$, cui æquipollet a, & prouenict $2be - 2b^2$, quo addito, ad nouam poteſtatem $e^2 - 2be + b^2$; proueniet $e^2 - b^2$

compa-

comparandum cum eodem z pl., quod erat comparationis homogeneum, vnde erit æquatio $e^2 - b^2 =$ z plano, & per antitheſin fit $e^2 =$ z plano $+ b^2$. Quamobrē æquatio illa affirmatè affecta in ſimplicem, ac puram reducta eſt, quod opus dicitur ἐπαναφορὰ.

Conſpectus Demonſtrationis.

$a^2 + 2\,b\,a$ æquatur z plano.
e æquetur $a + b$.
$e - b$ æquabitur a.
$+$ *$e^2 - 2\,b\,e + b^2$ æquabitur a^2.*
$+$ *$2\,b\,e - 2\,b^2$ æquabitur $2\,b\,a$.*
$e^2 - b^2$ æquabitur z plano.
e^2 æquabitur z plano $+ b^2$.

Itaque $\sqrt{\text{z plano} + b^2} - b$; æquabitur a, de qua primò quærebatur.

Sit 1 Q + 8 R æquale 48, & ℞ 64 — 4 hoc eſt 4 æquabitur 1 R.

Radix explicata ſimplici æquatione.

Si enim æquatio fuerit 1 Q + 8 R = 48, ſumatur 16 quadratum 4 dimidio coefficientis ſublateralis illudque addatur ad 48, comparationis homogeneum, aggregati autem latus, puta 8, multatum eodem dimidio exhibet 4, pro radice ęquationis propoſitę purę enim æquationis radix eſt 8, quæ multari debet, vt dictum, vt pręde at radix æquationis affectæ initio propoſitæ.

Si ſit æquatio $a^2 - 2\,b\,a =$ z plano. Supponatur $a - b$ eſſe, e. Dico e^2, æquari z plano $+ b^2$.

Proponitur æquatio quadratica negatè affecta. Theorema;

Quandoquidem ſi recta quædam diuiſa ſit bifariam, eique in directum alia ſit adiecta, quadratum autem totius, minus rectangulo ſub aggregatò ex adiecta, & diuiſa, & ſub ipſa diuiſa æquale ſit plano. Quadratum differentię inter adiectam, & dimidiam, æquale erit eidem plano, plus quadrato dimidiæ iam dictæ.

Ad huius veritatis indagationem ſic procedit Analyſta. Si $a - b$ ſupponatur e; $e + b$ æquabitur a. Quoniam autem poteſtas quadratum eſt, & ex $e + b$ quadratum ortum eſt $e^2 - 2\,b\,e + b^2$, illius loco, hoc ſubſtituatur; Cumque poteſtas afficeretur negatiuè erat autem æquatio $a^2 - 2\,b\,a =$ z plano, proinde intelligatur ductum $e + b$, quod ęquipollet a intelligatur inquam ductum in $- 2\,b$, & proueniet $- 2\,b\,e - 2\,b^2$, quo addito, ad $e^2 - 2\,b\,e + b^2$, & proueniet $e^2 - b^2 =$ z plano, & per antitheſin $e^2 =$ z plano $+ b^2$ æquatio igitur negatè affecta in puram, ac ſimplicem reducta eſt.

Indagatio Analytica, & propoſiti Theorematis demōſtratio.

Conſpectus Demonſtrationis.

$a^2 - 2\,b\,a$ æquatur z plano.
e æquetur $e - b$.
$e + b$ æquabitur a.
$+$ *$e^2 - 2\,b\,e + b^2$ æquabitur a^2.*
$-$ *$2\,b\,e - 2\,b^2$ æquabitur $2\,b\,a$.*
$e^2 - b^2$ æquabitur z plano.
e^2 æquabitur z plano $+ b^2$.

Itaque $\sqrt{\text{z pl.} + b^2} + b$ æquabitur a, de qua primo quęrebatur.

Sit 1 Q — 8 R æquale 48, & ℞ 64 + 4, hoc eſt 12 æquabitur 1 R.

Si enim æquatio fuerit 1 Q — 8 R = 48. Sumatur 16, quadratum ex 4, dimidio coefficientis ſublateralis illudque addatur ad 48, aggregati autem latus, adauctum prædicto dimidio exhibet 12 pro radice ęquationis propoſitę, purę enim æquationes radix eſt 8, quę augeri debet, vt dictum eſt, vt prodeat radix æquationis affectæ initio propoſitæ.

Numeroſa æquatio negatè affecta, et eiuſdem reductio.

Si $2\,b\,a - a^2$ æquetur z pl. Supponatur autem $b - e$, vel $b + e$, eſſe a.

Proponitur æquatio quadratica amphibola.

A 2 Dico

Digitized by Google

Dico e^2, æquari b^2 — z plano.

Theorema.

Quandoquidem; Si recta linea ſecta ſit bifariam, & non bifariam, rectangulum autem ſub tota, & parte alterutra minus quadrato eiuſdem. æquale ſit plano. Quadratum intermediç ſectionis, æquabitur quadrato dimidij, minus plano iam dicto.

Indagatio Analytica, & ſuperioris Theorematis demonſtratio

Ad huius veritatis indagationem ſic procedit Analyſta.

Si b — a æquetur e; vtique b — e æquabitur a.

Quoniam poteſtas de homogeneo negatur; poteſtas verò eſt quadratum. Quadratum autem ortum ex b — e eſt b^2 — 2 b e ✠ b^2, proinde hoc loco illius ſubſtituatur. Intelligatur autem b — e ductum in 2 b, & proueniet 2 b^2 — 2 b e; cumque de homogeneo negetur poteſtas ex 2 b^2 — 2 b e ſubtrahatur b^2 — 2 b e ✠ e^2, & remanebit b^2 — e^2 = z plano, & per antitheſin erit e^2 ✠ z plano = b^2, & rurſus e^2 = b^2 — z plano.

Secunda hypotheſis æquationis quadraticæ amphibola.

Vel ſi a — b çquetur e vtique b ✠ e çquabitur a.

Quoniam poteſtas eſt quadratum, & quadratum ortum ex b ✠ e eſt b^2 ✠ 2 b e e^2 proinde hoc illius loco ſubſtituatur. Cum autem homogeneum de quo negatur poteſtas eſſet 2 b a; propterea in 2 b. Intelligatur ductum b ✠ e, quod æquipollet a, & proueniet 2 b^2 ✠ 2 b e, ex quo ſubtracto b^2 ✠ 2 b e ✠ e^2, & remanebit b^2 — e^2, quod æquabitur z plano. Et per antitheſin fiet e^2 ✠ z plano = b^2, & rurſus e^2 = b^2 — z plano.

Concluſio.

Æquatio igitur compoſita ad ſimplicem reuocata eſt; cumque anphibola ſit duplicem habet radicem. In priori quidem reductione; ſiquidem b — e æquabatur a ex b ſubducto e, cognito reductione; proueniet radix vna.

Et quoniam in ſecunda reductione b † e æquabatur a; propterea ipſi b addito, e reductione cognito; proueniet radix altera eiuſdem æquationis.

Conſpectus Demonſtrationis,

	2 b a — a^2 æquatur z plano.		*Vel.*
	e æquetur b — a.		*e æquetur a — b.*
	b — e æquabitur a.		*b † e æquabitur a.*
—	*b^2 — 2 b e † e^2 æquabitur a^2.*	—	*b^2 † 2 b e † e^2 æquabitur a^2.*
✠	*2 b^2 — 2 b e æquabitur 2 b a.*	✠	*2 b^2 † 2 b e æquabitur 2 b a.*
	b^2 — e^2 æquabitur z plano.		*b^2 — e^2 æquabitur z plano.*
	e^2 æquabitur b^2 — z plano.		*e^2 æquabitur b^2 — z plano.*

Sit 16 R — 1 Q æquale 48; & 8 — ℞ 16, hoc eſt 8 — 4, hoc eſt 4 æquabitur 1 R.

Vel 8 † ℞ 16, hoc eſt 8 ✠ 4 hoc eſt 12 æquabitur 1 R.

Numeroſa æquatio, eiuſdemq; reductio.

Reductio cuborum ſimpliciter affectorum ſub quadrato ad cubos ſimpliciter affectos ſub latere.

Æquatio cubica in qua cubus afficitur adiunctione ſolidi ſub quadrato, datąq; coefficiente longitudine.

Si a^3 † 3 b a^2, æquetur z ſolido. Supponatur a † b, eſſe e.

Dico e^3 — 3 b^2 e, æquari z ſolido — 2 b^3.

Quandoquidem; Si recta linea diuiſa ſit trifariam, eidemque adiecta ſit alia quçdam linea; Cubus verò ex adiecta, plus ſolido ſub quadrato adiectæ, & ſub recta diuiſa, æquale ſit ſolido. Cubus aggregati ex ad iecta, & triente, minus ſolido ſub triplo quadrato eiuſdem trientis, & ſub aggregato iam dicto, æquale erit comme-

commemorato ſolido, minus duplo cubo trientis iam dicti.

Ad huius veritatis indagationem ſic procedit Analyſta.

Indagatio Analytica, & Theorematis propoſiti demõſtratio.

Quandoquidem $a + b$ ſupponitur æquari e; ergo $e - b$ æquabitur a. Quoniam autem poteſtas erat cubus, & ex $e - b$ ortus cubus eſt $e^3 - 3 b e^2 + 3 b^2 e - b^3$, proinde hoc in noua æquatione, illius loco ſuſtituatur. Cumque æquatio eſſet affirmarè quidem affecta ſub quadrato, nimirum adiunctione ſolidi, ſub longitudine, & radicis quadraro; propterea $e^2 - 2 b e + b^2$ nimirum quadratum ex $e - b$, ducatur in $3 b$ productumque $3 b e^2 - 6 b^2 e + 3 b^3$ addatur ipſi $e^3 - 3 b e^2 + 3 b^2 e - b^3$, & prouenıet $e^3 - 3 b^2 e + 2 b^3$ quod æquabitur z ſolido, & per antitheſin $e^3 - 3 b^2 e$ æquabitur z ſolido $- 2 b^3$.

Æquatio igitur illa propoſita ad ſimpliciorem reducta eſt.

Conſpectus Demonſtrationis.

$a^3 + 3 b a^2$ æquatur z ſolido.
e æquetur $a + b$.
$e - b$ æquabitur a.
$e^2 - 2 b e + b^2$ æquabitur a^2.
$+$ *$e^3 - 3 b e^2 + 3 b^2 e - b^3$ æquabitur a^3.*
$+$ *$3 b e^2 - 6 b^2 e + 3 b^3$ æquabitur $3 b a^2$.*
$e^3 - 3 b^2 e + 2 b^3$ æquabitur z ſolido.
$e^3 - 3 b^2 e$ æquabitur z ſol. $- 2 b^3$.

1 C + 12 Q æquatur 7168, & 1 R eſt 16; 1 C − 48 R æquatur 7040, ſitque 1 R 20.

Æquatio cubica negatiuè affecta ſub quadrato. Theorema.

Si $a^3 - 3 b a^2$, æquetur z ſolido. Supponatur $a - b$ eſſe e;

Dico $e^3 - 3 b^2 e$, æquari z ſolido $+ 2 b^3$.

Quandoquidem. Si recta quædam ſit linea, ac eius pars ſit trifariam diuiſa; cubus autem ipſius lineę, minus ſolido comprehenſo ſub quadraro eiuſdem, & ſub trifariam diuiſa parte, cuidam ſolido fuerit æqualis; cubus differentię inter trientem, & latus cubi iam dicti, minus ſolido ſub triplo quadrato trientis, & ſub prædicta differentia, æquabitur eidem ſolido plus duplo cubo trientis.

Ad huius veritatis indagationem ſic procedit Analyſta.

Indagatio Analytica, & propoſiti Theorematis demõſtratio.

Quandoquidem $a - b$ ſupponitur e; ergo $e + b$ æquabitur a. Quoniam autem poteſtas erat cubus. Cubus autem ortus ex $e + b$, eſt $e^3 + 3 b e^2 + 3 b^2 e + b^3$; propterea, hoc eius loco ſuſtituatur. Cumque æquatio eſſet negatiuè affecta ſub quadrato; propterea $e^2 + 2 b e + b^2$ nimirum quadratum ex $e + b$ ducatur in $3 b$, & prouenıet $3 b e^2 + 6 b^2 e + 3 b^3$ ſubtrahendum, ob affectionem negatam ex $e^3 + 3 b e^2 + 3 b^2 e + b^3$, & remanebit $e^3 - 3 b^2 e - 2 b^3$, quod æquabitur z ſolido; per antitheſin verò $e^3 - 3 b^2 e$ æquabitur z ſolido $+ 2 b^3$. Æquatio igitur illa propoſita, ad ſimpliciorem naturam reducta eſt.

Conſpectus Demonſtrationis.

$a^3 - 3 b a^2$ æquatur z ſolido.
$a - b$ æquetur e.
$e + b$ æquabitur a.
$+$ *$e^3 + 3 b e^2 + 3 b^2 e + b^3$ æquabitur a^3.*
$-$ *$3 b e^2 + 6 b^2 e + 3 b^3$ æquabitur $3 b a^2$.*
$e^3 - 3 b^2 e - 2 b^3$ æquabitur z ſolido.
$e^3 - 3 b^2 e$ æquabitur z ſolido $+ 2 b^3$.

1 C − 12 Q æquatur 1024, & 1 R eſt 16; 1 C − 48 R æquatur 1152 & 1 R eſt 12.

Proponitur æquatio cubica amphibola.

Si $3 b a^2 - a^3$ æquetur z ſolido. Supponatur $a - b$ eſſe e.

Dico $3 b^2 e - e^3$ æquari z ſolido $- 2 b^3$. Vel ſupponatur $b - a$ eſſe e.

Dico $3 b^2 e - e^3$ æquari $2 b^3 -$ z ſolido.

Theorema. Quandoquidem; Si recta linea diuiſa ſit trifariam; & in ea primum aſſumpta ſit pars maior triente, ſub cuius quadrato, & linea ipſa trifariam diuiſa ſolidum contineatur à quo demptus ſit cubus acceptæ partis; reſiduum autem ſit cuidam ſolido æquale; etiam ſolidum contentum ſub triplo quadrato trientis, & differentia qua pars aſſumpta trientem ſuperat, minus cubo eiuſdem differentiæ, erit æquale ſolido iam dicto minus duplo cubo trientis.

I. Theorema. Et ſi fuerit recta trifariam diuiſa, in eaque aſſumpta ſit pars minor triente, ſub cuius quadrato, & ſub trifariam diuiſa contentum ſit ſolidum; ex quo demptus ſit cubus aſſumptæ partis, reſiduum æquale ſit ſolido; etiam ſolidum comprehenſum ſub triplo quadrato trientis, & ſub differentia, qua triens ſuperat partem aſſumptam, minus cubo huiuſmodi differentiæ, erit æquale duplo cubo trientis, minus prædicto ſolido.

Ad huius veritatis indagationem ſic procedit Analyſta.

Indagatio Analytica, & prioris Theorematis demonſtratio. Quandoquidem $a - b$ ſupponitur æquari e, proinde $e + b$ æquabitur a. Quoniam autem poteſtas erat cubus, & cubus ortus ex $e + b$ eſt $e^3 + 3 b e^2 + 3 b^2 e + b^3$ propterea hoc eius loco ſubſtituatur. Quoniam verò ſolidum multatur cubo, & erat ſolidum ſub latere 3 b, & quadrato radicis; proinde $e^2 + 2 b e + b^2$ nempe quadratum ex $e + b$ ducatur in 3 b; proueniet enim $3 b e^2 + 6 b^2 e + 3 b^3$, ex quo ſubtrahi debet $e^3 + 3 b e^2 + 3 b^2 e + b^3$, & remanebit $3 b^2 e - e^3 + 2 b^3$, quod æquabitur z ſolido; per antitheſin vero $3 b^2 e - e^3$ æquabitur z ſolido $- 2 b^3$.

Concluſio. Propoſita igitur æquatio, ad ſimpliciorem naturam redacta eſt.

Indagatio Analytica, & ſecundi Theorematis demonſtratio. Secundò. Quoniam $b - a$ ſupponitur; ergo $b - e$ æquabitur a; quoniam autem poteſtas erat cubus, at verò cubus ortus ex $b - e$ eſt $b^3 - 3 b^2 e + 3 b e^2 - e^3$; proinde hoc eius loco ſubſtituatur; ſolidum autem erat multatum cubo, & erat ſolidum ſub latere 3 b, & ſub quadrato radicis; proinde $b^2 - 2 b e + e^2$ nempe quadratum radicis ducatur in 3 b; proueniet enim $3 b^3 - 6 b^2 e + 3 b e^2$, ex quo ſubtrahi debet $b^3 - 3 b^2 e + 3 b e^2 - e^3$, factaque ſubtractione; remanet $2 b^3 - 3 b^2 e + e^3$, quod æquabitur z ſolido, & per antitheſin repetitam, $3 b^2 e - e^3$ æquabitur $2 b^3 -$ z ſolido.

Conſpectus demonſtrationis.

	$3 b a^2 - a^3$ æquatur z ſolido.		*Vel.*
	e æquetur $a - b$.		*e æquetur $b - a$.*
	$e + b$ æquabitur a.		*$b - e$ æquabitur a.*
$-$	*$e^3 + 3 b e^2 + 3 b^2 e + b^3$ æquabitur a^3.*	$-$	*$b^3 - 3 b^2 e + 3 b e^2 - e^3$ æquabitur a^3.*
$+$	*$3 b e^2 + 6 b^2 e + 3 b^3$ æquabitur $3 b a^2$.*	$+$	*$3 b^3 - 6 b^2 e + 3 b e^2$ æquabitur $3 b a^2$.*
	$3 b^2 e - e^3 + 2 b^3$ æquabitur z ſolido.		*$2 b^3 - 3 b^2 e + e^3$ æquabitur z ſol.*
	$3 b^2 e - e^3$ æquabitur z ſolido $- 2 b^3$.		*$3 b^2 e - e^3$ æquabitur $2 b^3 -$ z ſol.*

12 Q $-$ 1 C æquetur 256, & eſt 1 R, 8.

48 R $-$ 1 C æquabitur 128, & 1 R eſt 4.

Vbi obſerua in primitiua æquatione comparationis homogeneum maius eſſe duplo cubo trientis coefficientis ſubquadraticæ.

24 Q $-$ 1 C æquetur 648, & 1 R, eſt 6.

192 R $-$ 1 C æquabitur 376, & 1 R, eſt 2.

Vbi obſerua in primitiua æquatione duplum cubum trientis coefficientis ſubquadraticæ maius eſſe comparationis homogeneo.

Reductio cuborum affectorum tam ſub quadrato, quàm ſub latere, ad cubos ſimpliciter affectos ſub latere.

Proponitur æquatio cubica &c. Si $a^3 + 3 b a^2 +$ d plano a æquetur z ſolido; ſitque $a + b$ æquale e;

Dico

Dico e^3 ✠ d plano e — 3 b^2 e æquari z ſolido † d plano b — 2 b^3.

Theorema.

Quandoquidem. Si recta linea diuiſa ſit trifariam, eique adiecta ſit recta quæpiam; cubus autem ex adiecta, plus ſolido ſub quadrato adiectæ, & ea, quæ trifariam initio diuiſa eſt, plus ſol. ſub quodam plano, & ſub adiecta ęqualis ſit cuidam ſol. cubus etiam aggregati ex adiecta, & triente, plus ſolido, ſub differentia inter planum dictum, & triplum quadratum trientis, & ſub eo quod diximus aggregato, ęqualis erit eidem ſolido, plus differentia, quę eſt inter ſolidum ſub eodem pl., & triente, & duplum cubum eiuſdem trientis. Hoc Theorema verum eſt, cum interfuerint conditiones poſitæ in prima ſequenti obſeruatione, & ſuo modo pro alijs alia Theoremata condi poſſunt.

Quid ad huius Theorematis veritatem requiratur

Ad cuius veritatis indagationem ſic procedit Analyſta.

Indagatio Analytica, ſiue propoſiti Theorematis demonſtratio.

Si a ✠ b æquetur e; ergo e — b æquabitur a. Quoniam autem poteſtas in ęquatione cubus erat, & ex e — b cubus ortus eſt e^3 — 3 b e^2 † 3 b^2 e — b^3; propterea hoc loco illius ſubſtituatur, & quoniam poteſtas erat affecta affirmatiuè tam ſub quadrato, quàm latere, 3 b a^2 † d plano a afficiebat enim a^3. Intelligatur proinde 3 b ductum in e^2 — 2 b e † b^2, quod æquipollet a^2, & proueniet 3 b e^2 — 6 b^2 e † 3 b^3, quo addito, ob affectionem affirmatam, ad e^3 — 3 b e^2 † 3 b^2 e — b^3, & proueniet e^3 — 3 b^2 e † 2 b^3. Intelligatur deinde ductum d pl. in e — b, & proueniet d pl. e — d pl. b, quo addito ad e^3 — 3 b^2 e † 2 b^3, & proueniet e^3 † $\overline{\text{d pl.} - 3\,b^2}$ e † 2 b^3 — d pl. b; quod ęquabitur z ſolido, & per antitheſin e^3 † $\overline{\text{d pl.} - 3\,b^2}$ e ęquabitur z ſolido † d plano b — 2 b^3.

Concluſio.

Cubus igitur affectus tam ſub quadrato, quàm latere, ad cubum ſimpliciter affectum reductus eſt; atque adeo æquatio in qua cubus erat affectus, vt dictum eſt ad ſimpliciorem eſt redacta.

Conſpectus Demonſtrationis.

a^3 † 3 b a^2 † d plano a æquatur z ſolido.
e æquetur a † b.
e — b æquabitur a.
e^3 — 3 b e^2 † 3 b^2 e — b^3 æquabitur a^3.
3 b e^2 — 6 b^2 e ✠ 3 b^3 æquabitur 3 b a^2.
e^3 — 3 b^2 e ✠ 2 b^3 æquabitur a^3 ✠ 3 b a^2.
d pl. e — d pl. b; æquabitur d pl. a.
e^3 † $\overline{\text{d pl.} - 3\,b^2}$ e † 2 b^3 — d pl. b æquabitur z ſolido.
e^3 † $\overline{\text{d pl.} - 3\,b^2}$ e æquabitur z ſol. † d pl. b — 2 b^3.

1 C † 36 Q ✠ 468 R æquetur 1088, & 1 R 2.
1 C ✠ 36 R æquabitur 3248, fitque 1 R 14.

Obſeruanda quædam.

Vbi obſerua in primitiua æquatione planum ſublaterale maius eſſe triplo quadrato trientis coefficientis longitudinis ſubquadraticę. Et aggregatum, ex comparationis homogeneo, & ſolido facto à triente coefficientis longitudinis ſubquadraticę, in planum ſublaterale maius eſſe duplo cubo eiuſdem trientis.

1 C ✠ 27 Q ✠ 130 R æquetur 376, & 1 R eſt 2.
1 C — 113 R æquabitur 88 fitque 1 R, 11.

Obſeruanda quædam.

Vbi obſerua in primitiua æquatione planus ſublaterale minus eſſe triplo quadrato trientis longitudinis ſubquadraticę; & aggregatum ex comparationis homogeneo, & ſolido a facto à triente coefficientis longitudinis ſub quadraticæ in planum ſublaterale maius eſſe duplo cubo eiuſdem trientis.

1 C ✠ 27 Q ✠ 120 R æquetur 356, & 1 R eſt 2.
123 R — 1 C æquabitur 22 fitque 1 R 11.

Obſeruanda quædam.

Vbi obſerua in primitiua æquatione triplum quadratum trientis coefficientis longitudinis ſubquadraticę, maius eſſe plano coefficiente ſublaterale; & aggregatum ex comparationis homogeneo, & ſolido facto à triente coefficientis longitudinis ſubquadraticę, in coefficiens planum ſublaterale minus eſſe duplo cubo eiuſdem trientis.

Si

Cubica æquatio affecta ſub quadrato, & ſub latere.

Si $a^3 + 3\,b\,a^2 - \overline{d\,pl.}\,a$ æquetur z ſol. At verò $a + b$ ſupponatur e;

Dico $e^3 - 3\,\overline{b^2 - d\,pl.}\,e$ æquari z ſol. $- 2\,b^3 - d$ pl. b.

Theorema.

Quoniã. Si recta linea diuiſa ſit trifariam, & alia quæpiam accepta ſit, ſub cuiusquadrato, & ſub ipſa diuiſa factum ſit ſolidum, illique additus ſit cubus acceptæ lineæ; ex aggregato autem ſubtractum ſit ſolidum aliud contentum ſub quodam plano, acceptaque linea, reſiduum verò cuidam ſolido ſit æquale. Etiam cubus aggregati ex accepta, & triente ipſius diuiſę, minus ſolido ſub differentia inter triplum quadratum trientis, & planum iam dictum, & ſub aggregato, ex accepta, & triente, æqualis erit eidem ſolido, minus duplo cubo trientis, minus ſolido ſub iam dicto plano, & eodem triente.

Quid ad huius Theorematis veritatem requiratur.

Hoc Theorema verum eſt cum interceſſerit conditio, in prima ſequenti obſeruatione habita. Et ſuo modo pro alia Theorema condi poteſt.

Ad cuius veritatis indagationem ſic procedit Analyſta.

Indagatio Analytica, & propoſiti Theorematis demonſtratio.

Quoniam $a + b$ ſupponitur e; ergo $e - b$ æquabitur a. Cum autem poteſtas eſſet cubus, & cubus ortus ex $e - b$ eſt $e^3 - 3\,b\,e^2 + 3\,b^2\,e - b^3$; proinde hoc loco ipſius a^3 ſuſtituatur. Cum autem homogeneum vnum eſſet $3\,b\,a^2$; proinde ducatur $3\,b$ in $e^2 - 2\,b\,e + b^2$; & proueniet $3\,b\,e^2 - 6\,b^2\,e + 3\,b^3$, quod eſt addendum cubo iam ſuſtituto, & proueniet $e^3 - 3\,b^2\,e + 2\,b^3$ ex quo oportet ſubducere d pl. $e -$ d pl. b; productum ſcilicet ex d pl. in $e - b$, erat enim in æquatione ſubductum homogeneum d pl. a, & proueniet $e^3 - 3\,b^2\,e + 2\,b^3 -$ d pl. $e +$ d pl. b, quod æquabitur z ſolido, & per antitheſin proueniet æquatio $e^3 - 3\,b^2\,e -$ d pl. $e =$ z ſol. $- 2\,b^3 -$ d pl. b.

Conſpectus Demonſtrationis.

$a^3 + 3\,b\,a^2 -$ d pl. a æquatur z ſolido.
e æquetur $a + b$.
$e - b$ æquabitur a.
$e^3 - 3\,b\,e^2 + 3\,b^2\,e - b^3$ æquabitur a^3.
$3\,b\,e^2 - 6\,b^2\,e + 3\,b^3$ æquabitur $3\,b\,a^2$.
d pl. $e -$ d pl. b æquabitur d plano a.
$e^3 - 3\,\overline{b^2\,e + 2\,b^3}$ — d pl. e + d pl. b æquabitur z ſol.
$e^3 - 3\,\overline{b^2 - d\,pl.}\,e$ æquabitur z ſol. $- 2\,b^3 -$ d pl. b.

Hic aduerte, & ſi prima fronte ſecus appareat, ſubtrahendum eſſe totum illud, quod conſtat ex $3\,b^2\,e$, & d pl. e.

1 C + 12 Q — 38 R æquetur 420; eſt Q 1 R 6.
1 C — 86 R æquabitur 140, ſitque 1 R 10.

Obſeruanda quędam.

Vbi obſerua in primitiua æquatione comparationis homogeneum, maius eſſe aggregato ex duplo cubo trientis coefficientis longitudinis ſubquadraticæ, & ſolido ab eodem triente in planum ſublaterale.

1 C + 15 Q — 24 R æquatur 208, eſt Q 1 R, 4.
99 R — 1 C æquabitur 162, ſitque 1 R, 9.

Obſeruanda quædam.

Vbi obſerua in primitiua æquatione comparationis homogeneum, minus eſſe ſolidorum aggregato, quorum vnum eſt duplus cubus à triente coefficientis longitudinis ſubquadraticæ. Aliud eſt factum ab eodem triente in planum coefficiens ſublaterale.

Hic aduerte, cum ſumitur triens coefficientis longitudinis ſubquadraticæ ab eo non eſſe ſubtrahendum planum ſublaterale, vt habeatur coefficiens planum ſublaterale pro noua ęquatione, ſed potius additionem fieri debere, vnde caue ne decipiaris.

Proponitur altera æquatio cubica affecta ſub quadrato & latere.

Si $a^3 - 3\,b\,a^2 + \overline{d\,pl.}\,a$ ęquetur z ſolido. Supponatur autem $a - b$ eſſe e.

Dico $e^3 - 3\,\overline{b^2 + d\,pl.}\,e$ æquari z ſol. $+ 2\,b^3 -$ d pl. b.

Quandoquidem ſi recta quædam diuiſa ſit trifariam; ſitque alia quædam accepta ſub cuius quadrato, & ſub trifariam diuiſa factum ſit ſolidum, cui detractum ſit aliud ſub plano quodam, & ſub iam accepta linea, differentia autem ſubducta

ſit

ſit cubo acceptę lineæ; reſiduum autem ęquale ſit ſolido. Etiam cubus differentię inter trientem, & lineam acceptam, minus ſolido, ſub triplo quadrato trientis, & eadem differentia plus ſolido ſub plano iam dicto in rectam, quæ quidem eſt eadem differentia inter acceptam lineam, & eundem trientem, æquabitur ſolido prædicto, plus duplo cubo trientis, minus ſolido ſub commemorato plano, & eodem triente.

Hoc Theorema verum eſt iuxta ea, quæ habentur in prima ſequenti obſeruatione. *Quid ad huius Theorematis veritatem requiratur.*

Ad huius veritatis indagationem ſic procedit Analyſta.

Quoniam igitur $a - b$, ſupponitur æquari e, propterea $e + b$, æquabitur a. Quoniam autem poteſtas in æquatione cubus erat, & ex $e + b$. Cubus ortus eſt $e^3 + 3\,b\,e^2 + 3\,b^2\,e + b^3$. Propterea hoc loco illius ſubſtituatur, & quoniam poteſtas affecta erat negatiuè ſub quadrato; affirmatiuè ſub latere nempe $- 3\,b\,e^2 + d$ plano e, afficiebat enim e^3 hoc eſt $3\,b\,e^2 + d$ plano e negabatur de e^3. Proinde intelligatur $- 3\,b$ ductum in $e^2 + 2\,b\,e + b^2$, & proueniet $3\,b\,e^2 + 6\,b^2\,e + 3\,b^3$; Hoc autem ſubtrahendum eſt ex $e^3 + 3\,b\,e^2 + 3\,b^2\,e + b^3$; & remanebit $e^3 - 3\,b^2\,e - 2\,b^3$. Ducatur verò $e + b$ in d planum, & proueniet d planum $e + d$ pl. b, addendum ſupradicto reſiduo, & fiet $e^3 - 3\,b^2\,e - 2\,b^3 + d$ pl. $e + d$ pl. b, quod æquabitur z ſol., & per antitheſin $e^3 - 3\,b^2 + d$ pl. e æquabitur z ſolido $+ 2\,b^3 - d$ pl. b.

Conſpectus Demonſtrationis.

$a^3 - 3\,b\,a^2 + d$ plano æquatur z ſolido.
e æquetur $a - b$.
$e + b$ æquabitur a.
$+$ *$e^3 + 3\,b\,e^2 + 3\,b^2\,e + b^3$ æquabitur a^3.*
$-$ *$3\,b\,e^2 + 6\,b^2\,e + 3\,b^3$ æquabitur $3\,b\,a^2$.*
$+$ *d pl. $e + d$ pl. b æquabitur d pl. a.*
$e^3 - 3\,b^2\,e - 2\,b^3 + d$ pl. $e + d$ pl. b æquabitur z ſolido.
$e^3 - 3\,b^2 + d$ pl. e æquabitur z ſol. $+ 2\,b^3 - d$ pl. b.

1 C — 30 Q + 330 R æquetur 1575, eſt 1 R 15. 1 C + 30 R æquabitur 275; fitque 1 R 5.
1 C — 15 Q + 70 R æquetur 200 eſt 1 R, 10. 1 C — 5 R æquabitur; 100 fitque 1 R 5.
1 C — 15 Q + 60 R æquetur 32 eſt 1 R 8. 15 R — 1 C æquabitur 18; fitque 1 R 3.

Obſerua in primitiua æquatione primi exempli, triplum quadratum trientis longitudinis ſubquadraticę minus eſſe coefficiente plano ſublaterale. Aggregatum verò ex comparationis homogeneo, & duplo cubo trientis, maius eſſe ſolido, à plano ſublaterale in trientem coefficientis longitudinis ſubquadraticæ. *Obſeruanda quædam.*

In primitiua æquatione ſecundi exempli, triplum quadratum trientis longitudinis ſubquadraticæ maius eſſe coefficiente plano ſublaterali. Aggregatum verò ex comparationis homogeneo, & duplo cubo trientis maius eſſe ſolido à coefficiente plano ſublaterale in trientem coefficientis ſubquadraticæ. *Obſeruanda quædam.*

In primitiua ęquatione tertij exempli triplum quadratum trientis coefficientis longitudinis ſubquadraticæ maius eſſe plano coefficiente ſublaterali. At verò aggregatum ex comparationis homogeneo, & duplo cubo trientis, minus eſſe ſolido à coefficiente plano ſublaterale, in trientem coefficientis longitudinis ſubquadraticę. *Obſeruandam quædam.*

Vel ſi ſupponatur $b - a$ ęquari e; ergo $b - e$ ęquabitur a; Cubus autem ex $b - e$ eſt $b^3 - 3\,b^2\,e + 3\,b\,e^2 - e^3$, hoc igitur ſubrogetur loco ipſius a^3, cui addatur d pl. $b - d$ pl. e, & ex aggregato ſubtrahatur $3\,b^3 - 6\,b^2\,e + 3\,b\,e^2$; nimirum $b^2 - 2\,b\,e + e^2$; quagratum ſcilicet ex $b - e$ ductum in $3\,b$, & proueniet $3\,b^2\,e - 2\,b^3 - e^3 + d$ pl. $b - d$ pl. e, quod æquabitur z ſol., & per antitheſin $3\,b^2 - d$ pl. $e - e^3$ æquabitur z ſolido $+ 2\,b^3 - d$ pl. b. *Secunda hypotheſis.*

1 C — 30 Q + 330 R æquetur 1116 eſt 1 R 6. 1 C + 30 R æquabitur 184; fitque 1 R 4.

1 C — 30 Q ✠ 210 R æquatur 396 eſt 1 R 6. 90 R — 1 C æquabitur 296 ſitque 1 R 4.

1 C — 30 Q † 276 R æquatur 688 eſt 1 R 4. 1 C — 24 R æquabitur 72 ſitque 1 R 6.

Obſeruanda quadam.

Obſerua in primitiua æquatione primi exempli triplum quadratum coefficientis longitudinis ſubquadraticę minus eſſe coefficiente plano ſublaterale. At verò aggregatum ex comparationis homogeneo, & duplo cubo eiuſdem trientis, minus eſſe ſolido ab eodem coefficiente plano ſublaterale in trientem prædictum coefficientis longitudinis ſubquadraticę.

Obſeruanda quadam.

Obſerua in primitiua ęquatione ſecundi exempli triplum quadratum trientis maius eſſe coefficiente plano ſublaterale. At aggregatum ex comparationis homogeneo, & duplo cubo trientis, maius eſſe ſolido ab eodem triente in coefficiens planum ſublaterale.

Obſeruanda quadam.

Obſerua in primitiua tertij exempli: triplum quadratum trientis coefficientis longitudinis ſubquadraticę maius eſſe coefficiente plano ſublaterale. At aggregatum ex comparationis homogeneo, & duplo cubo trientis iam dicti minus eſſe ſolido ab eodem triente in coefficiens planum ſublaterale.

Proponitur æquatio cubica negate affecta tam ſub quadrato quàm latere.

Si fuerit $a^3 - 3\,b\,a^2 -$ d pl. a = z ſolido. Supponatur autem a — b eſſe e. Dico $e^3 - \overline{3\,b^2 - \text{d pl.}}$ e æquari z ſol. ✠ $2\,b^3$ † d pl. b. Suppoſito quod a — b ęquetur e.

Quandoquidem. Si recta quædam diuiſa ſit trifariam, acceptaque ſit quædam alia recta, ſub cuius quadrato factum ſit ſolidum, itemque aliud fiat ſolidum ſub quodam plano, & ſub recta accepta, vtrumque verò ſubtrahatur ex acceptæ cubo; reſiduum verò ęquale ſit cuidam ſolido. Etiam cubus ex differentia inter trientem diuiſæ, & acceptam lineam minus ſolido ſub aggregato ex triplo quadrato trientis, & plano iam dicto, & ſub differentia inter acceptam, & trientem ęqualis eſt prędicto ſolido, plus duplo cubo trientis, plus ſolido ſub plano iam dicto, & triente.

Theorema.

Ad cuius veritatis indagationem ſic procedit Analyſta.

Indagatiò Analytica propoſiti Theorematis, & eiuſdem demonſtratio.

Si a — b æquetur e, ergo b ✠ e æquabitur a. Quoniam autem poteſtas in æquatione eſt cubus. Cubus autem ortus ex b ✠ e eſt b^3 ✠ $3\,b^2$ e, ✠ $3\,b\,e^2$ † e^3. Hoc itaque ſubſtituatur loco ipſius a^3. Quoniam verò homogeneum vnum erat $3\,b\,a^2$ — propterea ducatur 3 b in b^2 † 2 b e † e^2, quadratum ſcilicet ex b † e, & proueniet $3\,b^3$ ✠ $6\,b^2$ c ✠ $3\,b\,e^2$, & quia aliud homogeneum erat d pl. a propterea ducatur b † e in d pl., & proueniet d pl. b † d pl. e. Subtrahatur autem $3\,b^3$ † $6\,b^2$ e ✠ $3\,b\,e^2$, ex b^3 ✠ $3\,b^2$ e † $3\,b\,e^2$ ✠ e^3, & remanebit $e^3 - 3\,b^2\,e - 2\,b^3$ ex quo ſubtrahatur d pl. b — d pl. e, & remanebit $e^3 - 3\,b^2\,e - 2\,b^3$ — d pl. b — d pl. e, quod æquabitur z ſol., & per reiteratam antitheſin fiet $e^3 - \overline{3\,b^2 - \text{d pl.}}$ e = z ſol. ✠ $2\,b^3$ ✠ d pl. b.

Conſpectus Demonſtrationis.

$a^3 - 3\,b\,a^2$ — d pl. a æquatur z ſolido.
e æquetur a — b.
b ✠ e æquabitur a.
✠ *b^3 ✠ $3\,b^2$ e ✠ $3\,b\,e^2$ † e^3 æquabitur a^3.*
— *$3\,b^3$ ✠ $6\,b^2$ e † $3\,b\,e^2$ æquabitur $3\,b\,a^2$.*
— *d pl. b ✠ d pl. e æquabitur d pl. a.*
$e^3 - 3\,b^2\,e - 2\,b^3$ æquabitur $a^3 - 3\,b\,a^2$.
$e^3 - 3\,b^2\,e - 2\,b^3$ — d pl. b — d pl. e æquabitur z ſol.
$e^3 - \overline{3\,b^2 - \text{d pl.}}$ e æquabitur z ſol. † $2\,b^3$ † d pl. b.

Proponitur æquatio cubica amphibola dupliciter affecta.

1 C — 15 Q — 30 R æquatur 68, & eſt 1 R 17. 1 C — 105 R æquabitur 468 ſitq; 1 R 12.

Hic nihil obſeruandum occurrit.

Si d pl. a — $3\,b\,a^2 - a^3$ ęquetur z ſolido. Supponatur autem a ✠ b æquari e.

Dico

Dico $\overline{d\ pl. + 3\ b^2}\ e - e^3$ æquari z ſolido $+\ 2\ b^3 + d\ pl.\ b$.

Proponitur æquatio reducenda.

Quandoquidem. Si recta quæpiam diuiſa ſit trifariam, & quædam accepta ſit ſub cuius quadrato, & ſub diuiſa ſolidum ſubductum ſit a ſolido ſub quodam plano, & ſub accepta, ac ex reſiduo ſubductus ſit cubus acceptę, reſiduum autem æquale ſit cuidam ſol. Etiam ſolidum ſub aggregato, ex plano iam dicto, ac triplo quadrato trientis, & ſub aggregato ex accepta, & triente minus cubo huiuſmodi aggregati, ęquale erit eidem, ſolido plus duplo cubo trientis, plus ſolido ſub iam dicto plano, & triente.

Theorema.

Ad cuius veritatis indagationem. Sic procedit Analyſta.

Quoniam a + b ſupponitur e; ergo e − b æquabitur a quia autem poteſtas erat cubus. At verò cubus ortus ex e − b eſt $e^3 - 3\ b\ e^2 + 3\ b^2 e - b^3$; propterea hoc eius loco ſuſtituatur. Quoniam autem homogeneum primum erat d pl. a; homogeneum alter erat $3\ b\ a^2$ affectum ſigno − quo etiam afficiebatur cubus; proinde ducatur d pl. in e − b, & proueniet d pl. e − d pl. b, ducatur autem $e^2 - 2\ b\ e + b^2$ in 3 b; & proueniet $3\ b\ e^2 - 6\ b^2 e + 3\ b^3$, quod ſubtrahere oportet ex d pl. e − d pl. b, & remanet d pl. e − d pl. b $- 3\ b\ e^2 + 6\ b^2 e - 3\ b^3$ ex quo oportet ſubducere $e^3 - 3\ b\ e^2 + 3\ b^2 e - b^3$, remanebit autem d pl. e − d pl. b $- e^3 + 3\ b^2 e - 2\ b^3$; quod æquabitur z ſolido, & per antitheſin fiet æquatio $\overline{d\ pl. + 3\ b^2}\ e - e^3 = z\ ſol. + 2\ b^3 + d\ pl.\ b$.

Indagatio Analytica, & propoſiti Theorematis propoſiti demonſtratio.

Conſpectus Demonſtrationis.

d pl. a $- 3\ b\ a^2 - a^3$ *æquatur z ſolido.*
e æquetur a + b.
e − b æquabitur a.
− $e^3 - 3\ b\ e^2 + 3\ b^2 e - b^3$ *æquabitur* a^3.
+ *d pl. e − d pl. b æquabitur d plano a.*
− $3\ b\ e^2 - 6\ b^2 e + 3\ b^3$ *æquabitur* $3\ b\ a^2$.
d pl. e − d pl. b $- 3\ b\ e^2 + 6\ b^2 e - 3\ b^3$ *æquabitur d pl. a* $- 3\ b\ a^2$.
d pl. e − d pl. b $- e^3 + 3\ b^2 e - 3\ b^3$ *æquabitur z ſolido.*
$\overline{d\ pl. + 3\ b^2}\ e - e^3$ *æquabitur z ſolido* $+ 2\ b^3 +$ *d pl. b.*

96 R − 27 Q − 1 C æquatur 76, eſt 1 R 2339 R − 1 C quabitur 2398 ſitque 1 R, 12.

Nihil hic obſeruandum occurrit.

Si $3\ b\ \overline{a^2 + d\ pl.}\ a - a^3$ æquetur z ſolido, & a − b ſupponatur e.

Dico $\overline{d\ pl. + 3\ b^2}\ e - e^3$, æquari z ſol. − d pl. b $- 2\ b^3$.

Quandoquidem. Si recta diuiſa ſit trifariam, & alia quępiam accepta ſit, ſub cuius quadrato, & ſub diuiſa factum ſit ſolidum, cui additum ſit ſolidum, ſub quodam plano, & ſub accepta, & ex aggregato ſubductus ſit cubus ex accepta, reſiduum verò æquale ſit cuidam ſolido. Etiam ſolidum ſub aggregato ex plano prędicto & ex triplo quadrato trientis diuiſæ, & ſub differentia inter trientem, & acceptam, minus cubo huiuſmodi differentię æquale eſt eidem ſolido, minus ſolido ſub plano prędicto, & triente, minus duplo cubo eiuſdem trientis.

Theorema.

Ad cuius veritatis indagationem ſic procedit Analyſta.

Quoniam a − b ſupponitur e; ergo e + b æquabitur a, & quoniam in æquatione poteſtas erat cubus, cubus verò ortus ex e + b, eſt $e^3 + 3\ b\ e^2 + 3\ b^2 e + b^3$; Cubus autem negabatur de homogeneo; quorum vnum erat $3\ b\ a^2$, aliud d pl. a; ducatur 3 b in $e^2 + 2\ b\ e + b^2$, & proueniet $3\ b\ e^2 + 6\ b^2 e + 3\ b^3$; nempe productum ex 3 b in quadratum ex e + b ducaturque d pl. in e + b, & proueniet d pl. e + d pl. b horum aggregatum eſt $3\ b\ e^2 + 6\ b^2 e + 3\ b^3$ + d pl. e ex quo ſubtracto cubo iam dicto, remanebit $3\ b\ \overline{e^2 + 3\ b^2}\ e + 2\ b^3$ + d pl. b + d pl. e; quod æquabitur z ſolido, & per antitheſin fiet $\overline{d\ pl. + 3\ b^2}\ e + e^3 = z\ ſol. - d\ pl.\ b - 2\ b^3$.

Indagatio Analytica, & Theorematis demonſtratio.

Vel b − a eſto e, & $\overline{d\ pl. + 3\ b^2}\ e - e^3$ æquabitur $2\ b^3$ + d pl. b − z ſol., &c.

Conſpectus Demonſtrationis.

3 b a^2 † d pl. a — a^3 æquatur z ſolido.
e æquetur a — b.
e ✣ b æquabitur a.
— *e^3 † 3 b e^2 † 3 b^2 e † b^3 æquabitur a^3.*
✣ *3 b e^2 ✣ 6 b^2 e ✣ 3 b^3 æquabitur 3 b a^2.*
✣ *d pl. b ✣ d pl. e æquabitur d pl. a.*
3 b e^2 † 6 b^2 e † 3 b^3 † d pl. b † d pl. e æquabitur 3 b a^2 † d pl. a.
3 b e^2 † 3 b^2 e † 2 b^3 † d pl. b † d pl. e æquabitur z ſol.
d pl. ✣ 3 b^2 e — e^3 æquabitur z ſolido — d pl. b — 2 b^3.

Numeroſa æquationes.
24 Q ✣ 100 R — 1 C æquatur 2400, & eſt 1 R 10.
292 R — 1 C æquabitur 576, ſitque 1 R 2.

Obſeruanda quædam. Hìc obſerua in primitiua æquatione comparationis homogeneum maius eſſe aggregato ex duplo cubo trientis coefficientis longitudinis ſubquadraticæ, & ſolido facto ab eodem triente, in coefficiens planum ſublaterale.

Numeroſa æquationes.
30 Q ✣ 100 R — 1 C æquabitur 1464, & eſt 1 R 6.
400 R — 1 C æquabitur 1536; ſitque 1 R 4.

Obſeruanda quædam. Hìc obſerua in primitiua æquatione comparationis homogeneum minus eſſe aggregato ſolidorum, quorum vnum eſt duplum cubi trientis coefficientis longitudinis ſubquadraticæ; aliud verò eſt ſolidum factum ab eodem triente in coefficiens planum ſublaterale.

Proponitur æquatio quadratocubica. Si 3 b a^2 — d pl. a — a^3 æquetur z ſolido. Supponatur autem a — b eſſe e.
Dico 3 b^2 — d pl. e — e^3 æquari z ſolido ✣ d pl. b — 2 b^3.

Quandoquidem. Si recta quædam diuiſa ſit trifariam, & alia quæpiam accepta ſit; ſub cuius quadrato, & ſub diuiſa factum ſit ſolidum, à quo ſubtrahatur ſolidum, ſub plano quodam, & accepta, & ex reſiduo ſubtrahatur cubus ipſius acceptę. Etiam ſolidum ſub differentia inter triplum quadratum trientis, & planum prædictum, & ſub differentia inter acceptam, & trientem, minus cubo eiuſdem differentię; æquale eſt eidem ſolido, plus ſolido ſub plano prædicto, & ſub triente, minus duplo cubo trientis.

Theorema.

Indagatio Analytica, & propoſiti Theorematis demõſtratio. Ad cuius veritatis indagationem ſic procedit Analyſta.

Quoniam a — b ſupponitur e, ergo b ✣ e ęquabitur a; cùm autem poteſtas in æquatione foret cubus, cubus autem ortus ex b ✣ e eſt b^3 ✣ 3 b^2 e ✣ 3 b e^2 † e^3; proinde loco ipſius a^3 ſuſtituatur. Cùm verò de homogeneis negaretur poteſtas; homogeneum autem vnum erat 3 b a^2; ob id 3 b ducatur in b^2 † 2 b e ✣ e^2, vt fiat 3 b^3 ✣ 6 b^2 e ✣ 3 b e^2. Quoniam verò alterum erat d pl. a affectum ſigno — ducatur d pl. in b † e, vt proueniat d pl. b ✣ d pl. e auferendum ex 3 b^3 ✣ 6 b^2 e † 3 b e^2, & remanebit 3 b^3 † 6 b^2 e † 3 b e^2 — d pl. b — d pl. e, ex quo dematur cubus iam dictus, & remanebit 2 b^3 † 3 b^2 e — d pl. b — d pl. e — e^3, quod æquabitur z ſolido, & per antitheſin 3 b^2 ✣ d pl. e — e^3 æquabitur z ſolido ✣ d pl. b — 2 b^3.

Conſpectus Demonſtrationis.

3 b a^2 — d pl. a — a^3 æquatur z ſolido.
e æquetur a — b.
b † e æquabitur a.
— *b^3 ✣ 3 b^2 e ✣ 3 b e^2 ✣ e^3 æquabitur a^3.*
✣ *3 b^3 ✣ 6 b^2 e ✣ 3 b e^2 æquabitur 3 b a^2.*
— *d pl. b ✣ d pl. e æquabitur d pl. a.*

$3b^3 + 6b^2e + 3be^2 - d$ pl. $b - d$ pl. e æquabitur $3ba^2 - d$ pl. a.
$2b^3 + \overline{3b^2}e - d$ pl. $b - d$ pl. $e - e^3$ æquabitur z ſolido.
$3\overline{b^2} - d$ pl. $e - e^3$ æquabitur z ſol. $+ d$ pl. $b - 2b^3$.

24 Q — 80 R — 1 C æquatur 600, & eſt 1 R 10. 112 R — 1 C æquabitur 216 fitque 1 R 2.
12 Q — 19 R — 1 C æquetur 10, & eſt 1 R 10. 1 C — 29 R æquabitur 42 fitque 1 R 6.

Obſerua in primitiua æquatione prioris exempli aggregatum ex comparationis homogeneo, & ſolido à triente coefficientis longitudinis ſubquadraticæ in coefficiens planum ſublaterale maius eſſe duplo cubo eiuſdem trientis. *Obſeruanda quædam.*

Obſerua in primitiua æquatione ſecundi exempli aggregatum ex comparationis homogeneo, & ſolido a triente coefficientis longitudini ſubquadraticę in coefficiens planum ſublaterale, minus eſſe duplo cubo eiuſdem trientis. *Obſeruanda quædam.*

Vel b — a eſto e $\overline{3b^2 - d \text{ pl.}}$ e — e^3 æquabitur 2 b^3 — d pl. b — z ſolido.

30 Q — 100 R — 1 C æquetur 264, & eſt 1 R 6. 200 R — 1 C æquabitur 736 fitque 1 R 4.

Hìc porrò non pigebit aduertere æquationes canonicas ſecundarias à primarijs, ad ſolinomiam cùm alias eſſet binomia ſic à quibuſdam reduci. Vt ſi fuerit $a^2 \overset{-b}{+c}$ a ⊏ + b c ad hanc reducunt a^2 ⊏ b^2, mutata ſcilicet ſpecie c in ſpeciem b, vt illa euadat $a^2 \overset{-b}{+b}$ a ⊏ + b^2 ſublatiſque ijs, quę ſe mutuo interimunt ob contrarias notas fieri ęquationem a^2 ⊏ b^2, & hæc de ordine quadratico, ad cubicum ordinem, quod attinet, ęquationem trinomiam cuiuſmodi eſt a^3 — b a^2 + b c a. *Quædam reductionis forma, vt à quibuſdam perficitur.*

— c a^2 — b d a
+ d a^2 — c d a ⊏ — b c d

Ad binomiam hanc a^3 — b^2 a
— b c a
— c^2 a ⊏ — b^2 c
— b c^2 reducunt

per ablationem ſecundi termini a^2. Ponunt enim b + c æquari d, & in ęquatione trinomia reducenda mutant d in b + c, & prouenit æquatio, è qua reiectis particularibus ex contraditione redundantibus, prouenit ęquatio binomia iam dicta, & ſit ſuo modo de cæteris, quod animaduertiſſe iuuat.

Æquationes negationis vitio laborantes tranſmutatione quæ *πρωτονεκατον* appellatur, emendantur; hęc autem tranſmutationis ſpecies nomenclatura eſt conſecuta ab eo analogiſmo ad quem primum propoſita æquatio, reuocatur, cùm in eius formula, terminus ille, qui primo quærebatur eſt primus; is, qui poſt metabuphoſin primus, ſit poſtremus, vel contra. Per hanc autem tranſmutationem, vt diximus emendantur æquationes negationis vitio laborantes, in quibus affectionum homogenea validiora, de Poteſtate negantur; ſitque per analogiam rationis implicitæ de qua ſupra verba fecimus, applicando ſcilicet homogeneum, ad radicem ipſam de qua quæritur, vnde quædam alia ſuboritur incerta radix, ſub cuius ſpecie primum propoſitam æquationem dirigere, & nouam ordinare liceat, ita ſit, vt illic affectiones negatæ, tranſeant hìc in affirmatas, & contra ſalua numerorum ſymmetria exemplis hæc autem illuſtriora fient. *Emendatio æquationum negationis vitio laborantium quo pacto fieri debeat. Hæc operatio dicitur Protoneſcaton.*

A^2 — b pl. a æquetur z ſolido. Quoniam poteſtas eſt negatè affecta debet æquatio in explicabilem tranſmutari, & quidem in affirmatè affectam. Propterea $\frac{\text{z ſolidum}}{a}$ eſto e planum, ergo $\frac{\text{z ſol.}}{\text{e pl.}}$ erit a; ex $\frac{\text{z ſol}}{\text{e pl.}}$ fiat cubus, iſq; eſt $\frac{\text{z ſol. ſol. ſolidum}}{\text{e pl. pl. plano}}$. Deinde $\frac{\text{z ſol.}}{\text{e pl.}}$ ducatur in b planum; cum enim homogeneum eſſet b pl. a, hoc eſt b planum ducebatur in a; modo duci debet in id, quod ipſi a æquipollet, & fiet $\frac{\text{b pl. z ſol.}}{\text{e pl.}}$ quod ſi auferatur abs $\frac{\text{z ſol. ſol. ſolido}}{\text{e pl. pl. plano}}$ remanebit $\frac{\text{z ſol. ſol. ſolidum}}{\text{e pl. pl. plano}}$ — $\frac{\text{b pl. z ſol.}}{\text{e pl.}}$, & hoc æquabitur z ſolido; omnibus autem ductis in e pl.pl.planum, & z ſol.ſol.ſolidum — b pl. z ſol. e pl. pl. æquabitur z ſol. e pl.pl.plano. *Proponitur æquatio emendanda.*

Omnibus autem applicatis ad z ſolidum, & z ſolidoſolidum — b pl. e pl.planum æquabitur e pl.pl.plano, & per antitheſin e pl.pl.planum + b pl. e pl.pl. æquabitur z ſolidoſolido, vel e plani cubus + b pl. e pl. quadrato, ęquabitur z ſolidi quadrato. *Æquatio emendata explicatur art. quam Auctor in prima huius operis parte tradidit.*

Hęc autem æquatio explicabilis eſt ea Arte, quam in prima huius operis parte tradidi-

tradidimus ad explicandas cubicas æquationes affirmatè affectas ſub data coefficiente magnitudine.

Obſeruanda buadam. Cum autem innoteſcit e pl. etiam innoteſcet a; nimirum applicatione z ſol. ad e planum cognitum. Analogiſmus verò enunciatiuus de a; erat vt a ad ℞ C z ſol. ita ℞ C z ſol.ſol. ad a^2 — b pl. hoc eſt e planum. Vnde terminus de quo primùm quærebatur eſt primus, &c. Vbi obſerua nouam radicem æquari quadrato veteris radicis, minus coefficiente plano; perinde enim eſt a^2 — b pl. ac eſt e pl. quę vt meliùs intelligas.

Exemplum per numeroſã æquationum. Sit 1 C — 96 R æqualis 40 effictà $\frac{40}{1 R}$ eſſe 1 R ergo 1 C + 96 Q ęquabitur 1600 fitque 1 R 4, vnde applicato 40, comparationis homogeneo ad 4, fit quotiens 10, pro radice ęquationis propoſitæ; eſt autem, vt 10, ad ℞ C 40, ita ℞ C 1600 ad 4, vt conſtat ex opere multiplicationis. Si enim per e planum intelligamus 1 R, & per z ſolidum 40; certè z ſol.ſol.ſolidum valebit 64000, & e pl.pl.planum valebit

Supradictorũ explicatio: 1 C, quare $\frac{z\ sol.\ sol.\ solidum}{e\ pl.\ pl.\ plan.}$ valebit $\frac{64000}{1 C}$. At verò b pl.ſolidum valet 3840, ob id $\frac{b\ pl.\ z\ sol.}{e\ pl.}$ valebit $\frac{3840}{1 R}$. Itaque $\frac{64000}{1 C}$ — $\frac{3840}{1 R}$ ęquabitur 40. Omnibus ductis in 1 C, fiet ęquatio 64000 — 3840 Q ⫬ 40 C. At verò per antitheſin fiet 40 C + 3840 Q ⫬ 64000 omnibus diuiſis per 40, fit 1 C + 96 Q ⫬ 1600. Huius autem æquationis radix eſt 4, applicetur 40 ad 4, fit quotiens 10, radix primùm quæſita, & fit analogiſmus, vt ſupra dictum eſt.

Numeris hoc æquationis genus explicatur Si 1 C — 98 R ęquetur 20, & 1 C + 98 Q æquabitur 400, fitque 1 R 2, applicetur 20 ad 2, & orietur 10.

Si 1 C — 60 R æquetur 32, etiam 1 C + 60 Q æquabitur 1024 huius æquationis radix eſt 4, ob id 32 applicetur ad 4, & orietur 8, radix, de qua primùm quærebatur.

Quando comparationis homogeneum ſuerit irrationale. Quod ſi comparationis homogeneum in ſua ſoliditate ſit irrationale; facultate tamen velut quadratica rationale; in noua enim æquatione euaneſcit aſymmetria, propterea ſufficit homogeneo comparationis auferre characterem irrationalitatis, in reliquis procedere, vt ſupra, nempe loco ſigni — ſubſtituere +, & loco R ſubrogare Q. Itaque.

Numeris eadem tractantur. Si 1 C — 10 R æquetur ℞ 48. Effictà $\frac{48}{1 C}$ eſſe 1 R, & 1 C + 10 Q æquabitur 48, fitque 1 R 2, atque adeo 12 erit radix primùm quæſita. Si enim 1 R valor eſt ℞ 12; cubus erit ℞ 1728, & inſuper 10 R valebunt ℞ 1200; auferamus minorem à maiori, & remanebit ℞ 48; communis enim diuiſor eſt 3, qui diuidens 1728 facit quotientem 576, cuius ℞ eſt 24; & diuidens 1200, facit quotientem 400, cuius ℞ eſt 20; ablato 20 à 24 remanet 4, cuius quadratum eſt 16; quo ducto in 3 communem diuiſorem, fit 48; cuius ℞ eſt ℞ 48, eſtque differentia inter ℞ 1728, & ℞ 1200.

Exemplum alterum ad idẽ Si 1 C — 2 R æquetur ℞ 45, etiam 1 C + 2 Q æquabitur 45; fitque 1 R 3; quamobrem ſi applicetur ℞ 45 ad 3 fiet quotiens ℞ 5; eſtque radix, de qua primum quærebatur.

Sed hæc Analyticè demonſtremus.

Nota. Aduerte poſtpoſito numero ſignificari poteſtatẽ vt z ſol. 2 ſignificat z ſol. quadratum, &c.

Analyticè hæc omnia demonſtrantur. A^3 — b pl. a æquetur z ſolido, & e pl. equetur $\frac{z\ sol.}{a}$ Oſtendendum eſt e pl. 3 † b pl. e pl. 2 æquari z ſol. 2.

Quoniam enim $\frac{z\ sol.}{a}$ ęquatur e pl. omnibus ductis in a, z ſol. ęquabitur e pl. a; Omnibus applicatis ad e pl. ergo $\frac{z\ sol.}{e\ pl.}$ æquabitur a; omnibus ductis in b planum. Ergo $\frac{z\ sol.\ b\ pl.}{e\ pl.}$ æquabitur b pl. a, & quia $\frac{z\ sol.}{e\ pl.}$ erat æquale a; ergo eorum cubi æquales erunt, quare $\frac{z\ sol.\ 3}{e\ pl.\ 3}$ æquabitur a^3, hinc auferatur b pl. a, illinc æquipollens $\frac{z\ sol.\ b\ pl.}{e\ pl.}$, & $\frac{z\ sol.\ 3}{e\ pl.\ 3}$ — $\frac{z\ sol.\ b\ pl.}{e\ pl.}$ æquabitur a^3 — b pl. a. Sed a^3 — b pl. a, æquabatur z ſol., ergo $\frac{z\ sol.\ 3}{e\ pl.\ 3}$ — $\frac{z\ sol.\ b\ pl.}{e\ pl.}$ æquabitur z ſolido. Omnibus ductis in e pl. 3, & z ſol. e pl. 3 æquabitur z ſol. 3 — z ſol. b pl. e pl. 2, omnibus diuiſis per z ſol., & e pl. 3 æquabitur z ſol. 2 — b pl. e pl. 2, & per antitheſin e pl. 3 + b pl. e pl. 2 æquabitur z ſol. 2.

Proponitur æquatio cubica affecta ſubquadrato, & latere. Ita ſi a^3 — b a^2 † d pl. a æquetur z ſol. Ex hypotheſi quod e pl. æquetur $\frac{z\ sol.}{a}$, & e pl. 3 + b z ſol. e — d pl. e pl. 2 æquari z ſol. 2 demonſtrabimus.

Rurſus

Rurſus, $a^3 - b\,a^2 + b$ pl. a æquetur z ſolido, e planum æquetur $\frac{z\ sol.}{a}$ e planicubus † b z ſol. e — d pl. e pl.quadrato ęquabitur z ſolidiquadrato. *Æquatio quadratoquadratica.*

Deinde, $a^4 - b\,a^3 + d$ pl. a^2 ęquetur z pl.plano e ſol. ęquetur $\frac{z\ planoplano}{a}$ ergo e ſol. quadratoquadrato — d pl. z pl.pl. e ſol.quadrato † b z pl.pl.quadrato e ſolido ęquabitur z pl.pl.cubo. *Explicatio.*

Si $a^4 - b\,a^3 - d$ pl. a^2 æquetur z pl.plano. Hæc ęquatio tranſmutanda eſt in explicabilem, cum negatione laboret; ob id explicationi minus idonea ſit. $\frac{z\ pl.\ planum}{a}$ eſto e ſol. ergo $\frac{z\ pl.\ pl.}{e\ sol.}$ erit a. Proinde ex his quæ proponuntur $\frac{z\ pl.\ pl.\ pl.\ pl.\ pl.\ pl.\ pl.\ planum}{e\ sol.\ sol.\ sol.\ sol.}$ — $\frac{b\ z\ pl.\ pl.\ pl.\ pl.\ pl.\ pl.}{e\ sol.\ sol.\ sol.}$ — $\frac{d\ pl.\ z\ pl.\ pl.\ pl.\ pl.}{e\ sol.\ sol.}$ ęquabitur z pl.plano.

Ductis omnibus in e ſol.ſol.ſol.ſol., & z pl.pl.pl.pl.pl.pl.pl.planum — b z pl.pl.pl.pl.pl.pl.e ſol. — d pl. z pl.pl.pl.pl.e ſol.ſol. æquabitur z pl.pl. e ſol.ſol.ſol.ſolido, adhibita congrua antitheſi, omnibuſque diuiſis per z pl.pl., & e ſol. quad.quadratum + d pl. z pl.pl. e ſol. quadrato † b z pl.pl.pl.pl. e ſol. æquabitur z pl.pl. cubo; ſeu e ſol. quadratoquadratum + d pl. z pl.pl. e ſol. quadrato + b z pl.pl. qnadrato e ſol. æquabitur z pl.pl. cubo. *Æquatio quadratoquadratica numeris tractata.*

Æquatio numeroſa ſit 1 QQ — 3 C — 8 Q = 50 effícta $\frac{50}{1R}$ eſſe 1 R, & 1 Q Q + 400 Q + 7500 R ęquabitur 125000, & fiet 1 R 10.

Itaque ſi ad 10, applicetur 50, emerget 5, pro radice primum quæſita; hoc autem ſic intelligendum eſt, vt 8, coefficiens ſub quadrato, ducatur in 50, comparationis homogeneum, & producetur 400; Deinde 3 coefficiens ſub cubo ducatur in 2500, quadratum ex 50, comparationis homogeneo, & producetur 7500. Deinde 50, homogeneum comparationis ducatur in ſe cubice, & fiet 125000. *Quando comparationis homogeneum in huiuſmodi æquationibus fuerit in ſua planoplanitia irrationale.*

Quando verò ęquationis quadratoquadraticæ comparationis homogeneum in ſua pl.planitie fuerit irrationale, facultate tamen veluti cubica rationale, vt ſi 1 QQ — 8 R æquetur ℞ C 80, & 1 Q Q † 8 C æquabitur 80, ſitque 1 R a, quamobrem radix primùm quæſita erit ℞ C 10, prouenìens ex applicatione ℞ C 80 ad ℞ C 8 nempe ad a. Itaque noua æquatione aſymmetria euaneſcit. *Æquatio cubica. Æquatio quadratoquadratica.*

Quod ſi hactenus dicta numeris aptentur, longe faciliùs percipientur.

Æquationes inuerſè negatę minus ſunt explicabiles; ad earum tamen difficultatem tollendam, conducit metamorphoſis qua videlicet in ſuas correlatas tranſmutantur; vtiliſſima quidem eſt ad tollendas vocum amphibolias in correlatis æquationibus ad habendam ex data radice vnius, alteriùs notitiam. Ob eum autem finem inſtituitur, vt quæ æquatio primò propoſita per irregularem climacticum deſcenſum fuit, ea ope ſuæ correlatæ reducatur ad depreſſiorem, ac ob id magis explicabilem; quanto enim depreſſior, tanto etiam explicabilior æquatio eſt. Valet aduerſus amphiboliam, atque diſmechanian in ęquationibus cubicis, quadratocubicis, & ex inde per binos alternos gradus climacticos; non ita tamen proficit reductioni æquationum quadraticarum, quadratoquadraticarum, & ex inde per binos alternos gradus climacticos, ad quarum explicationem Analyſta vtitur climactica paraplerosi. *Quando fuerint æquationes inuerſa negatæ.*

Huius verò tranſmutationis quæ Ἀναστροφὴ dicitur perficiendæ forma, ſic ſe habet. Poteſtati radicis, de qua quęritur adijcienda eſt poteſtas radicis ęquę altę, ſiquidem harũ aggregatũ commodè in prędicto climacticarum ordine diuiſionem ſuſcipit. Secundò homogeneum comparationis, vna cum tranſlatis affectionum homogeneis, & addita poteſtate affectæ magnitudinis comparatur, quæ recipiat eandem diuiſionem; hac enim comparatione inciditur in æqualitatem correlatam, vel affirmatam, vel directè negatam. Cognita autem radice poteſtatis additię comparantur magnitudines ex vna parte oriundæ; magnitudinibus oriundis ex altera. Hęc tamen præcepta difficile ſine exemplorum illuſtratione intelligi poſſunt. *Anaſtrophe qua Arte fiat.*

Decipiuntur autem, qui putant huiuſmodi tranſmutationem abſolui per hoc, quod inuerſè negatę, in ſuas correlatas tranſmutentur, non enim ob eum finem inſtituitur, ſed tranſmutatio in correlatas eſt veluti medium, quo vtitur Artifex ad conſequandum intentum, nempe propoſitam æquationem amphibolam altioris ordinis, ad depreſſiorem reducere. *Quorundam error.*

Proponatur b pl. a — a^3 æquari z ſolido. Hęc eſt æquatio ambigua, ob id minime *Proponitur altera æquatio*

nempe cubici ordinis amphibola emendanda.

me ad reſolutionem idonea. Ad amphiboliam igitur e vitandam. hæc eſt inſtituenda, de qua loquimur, tranſmutatio. Cum igitur b pl. a — a^3 æquetur z ſolido; adhibita tranſpoſitione, a^3 ęquabitur b pl. a — z ſol. Vtrique parti addatur e^3, vt primo enunciatum fuit; Primùm enim poteſtati radicis de qua quæritur, nempe a^3 addi debet poteſtas radicis ęquę altę; videlicet e^3, & fiet a^3 + e^3, & hoc ęquabitur b pl. a + e^3 — z ſolido. Hoc poteſtatum aggregatum a^3 + e^3 diuiſionem commode recipit ab a + e dum enim laterum aggregato applicatur ſumma cuborum, quadratorum aggregatum emergit, minus rectangulo comprehenſo ſub ipſis lateribus, quapropter ex huiuſmodi applicatione orietur a^2 — e a + e^2. Reliquum eſt, vt altera ęqualitatis pars, nimirum b pl. a + e^3 — z ſol. applicata ad a + e; faciat aliquod planum datum, iam ortis reliquis comparandum; nempe a^2 — e a + e^2. Hoc commodiſſimè fiet, ſi in locum ipſius e^3 — z ſol. ſuſtituatur b pl. e, erit enim b pl. a + b pl. e, quod quidem diuiſionem recipiens abs a + e, facit b planum, ex hac enim applicatione, oritur b planum. Cùm verò e^3 — z ſol. æquetur b plano e ergo etiam per metatheſin e^3 — b pl. e ęqeabitur z ſolido. Quoniam autem a^3 + e^3 ęquatur b pl. a + e^3 — z ſolido, & in locum ipſius e^3 — z ſol. ſuſtiruitur b pl. e. Si fiat communis applicatio; hoc eſt vtriuſque partis ad a + e inter orta, erit æqualitas, atque adeo a^2 — e a + e^2 æquabitur b plano. Innoteſcat autem e eſſe d; ex analyſi, adhibita congrua, decentique pręparatione, & a^2 — d a + d^2 æquabitur b plano, & ordinata æquatione d a — a^2 ęquabitur d^2 — b plano. Et ita ęquatio illa inuerſè negata b pl. a — a^3 = z ſolido, tranſmutata eſt in directè negatam, & eiuſdem ordinis e^3 — b pl. e = z ſolido. Itaut, fiat climacticus irregularis deſcenſus in ęquationem depreſſiorem de radice primùm propoſita, explicabilem. Itaque a^2 — d a + d^2 ęquabitur b^2, & ordinatione facta d a — a^2 ęquabitur d^2 — b plano. Vnde

Hæc præparatio paulo ſupra perpretameſcatum explicata eſt.

Demonſtratio Analytica ſupradictorum.

Supponatur b pl. a — a^3 æquari z ſol., ex hypotheſi, quod e^2 — a e ęquetur b pl. — a^2. Oſtendendum eſt e^3 — b pl. e ęquari z ſolido.

Quoniam igitur b pl. a — a^3 ęquatur z ſolido, ergo per antitheſin b pl. a ęquabitur z ſolido + a^3, & rurſus b pl. a — z ſolido ęquabitur a^3 at ex hypotheſi e^2 — a e ęquatur b pl. — a^2 ergo e^2 — a e + a^2 ęquabitur b plano, ſed factum ex e^2 — a e + a^2 in a + e eſt a^3 + e^3, & factum ex b pl. in a + e eſt b pl. a + b pl. e ergo a^3 + e^3 ęquabitur b pl. a + b pl. e. Sed b pl. a — z ſol. ęquatur a^3 ergo e^3 + b pl. a — z ſol. ęquabitur b pl. a + b pl. e; vtrinque ſublato b pl. a & e^3 — z ſol. æquabitur b pl. e ergo e^3 ęquabitur b pl. e + z ſolido, quare e^3 — b pl. e æquabitur z ſolido,

Atque hunc in modum facta eſt tranſmutatio inuerſè negatæ in directè negatam eiuſdem ordinis; Sed hìc non ſiſtit Antificis induſtria; Si igitur innoteſcat e eſſe d, a^2 — d a + d^2 æquabitur b plano, & ordinando d a — a^2 æquabitur d^2 — b plano.

Numeris eadem tractantur.

Numeris hæc eadem tractemus, 19 R — 1 C æquetur 30, ergo 1 C — 19 R ęquabitur 30. Hæc autem ęquatio reducetur ad hanc 5 R — 1 Q = 6 fitque 1 R 2, vel 3. Nam ſi ſit 2, 5 R valebunt 10, à quibus ſubtracto 4, quadrato ex 2, remanet 6. Item ſi ſit 3; 5 R valebunt 15 à quibus ſubtracto 9, quadrato ex 3 remanet 6. Modo, ſi vnius radicis valor eſt 2, 19 R valebunt 38, a quibus ſubtracto 8; cubo ex 2, remanent 30. At ſi 1 R valet 3; 19 R valebunt 57, à quibus ſubtracto 27 cubo ex 3, remanent 30. Cęterum illius æquationis 1 C — 19 R = 30, innoteſcit radix 5; Nam reducitur ad 1 C + 19 Q = 900 cuius radix eſt 6 per quam ſi diuidatur 30, comparationis homogeneum propoſitæ æquationis, fit quotiens 5, ſumendus pro coefficiente nouæ æquationes 5 R — 1 Q = 6, in qua comparationis homogeneum eſt radix illius æquationis 1 C + 1 QQ = 900.

Proponitur altera æquatio cubica, ſic licet amphibola.

Proponitur b a^2 — a^3 æquari z ſolido; facienda ſit tranſmutatio de qua loquimur; cum etiam a^3 æquetur b a^2 — z ſolido; addito e^3 vtrique æquationis parti, & a^3 + e^3 æquabitur b a^2 + e^3 — z ſolido; in locum verò ipſius z ſolidi — e^3 ſuſtitubtur b e^2, vt videlicet diuiſio inſtitui poſſit per a + e, diuiſio inquam vtriuſque partis, cùm itaque ex hypotheſi z ſol. — e^3 æquetur b e^2 fiet per antitheſin e^3 + b e^2 = z ſolido itaque a^3 + e^3 æquabitur b a^2 — b e^2, ſi verò inſtituatur diuiſio per a + e fiet æ-

quatio

quatio $a^2 - e a + e^2 = b a - b e$, hoc eſt b in $a - e$; at verò innoteſcat e eſſe d per doctrinam ſuperiùs traditam, & ordinata æquatione $b a + d a - a^2$ æquabitur $b^2 + b d$, quamobrem æquatio illa inuersè negata, nimirùm $b a^2 - a^3 =$ z ſolido transformata eſt in affirmatam ordinis eiuſdem, nempe $e^3 + b e^2 =$ z ſol. ita vt data radice nouæ æquationis fiat irregularis deſcenſus clymacticus in æquationem depreſſiorem, Itaque.

Si $b a^2 - a^3$ æquatur z ſol. & $b e^2 + e^3$ æquetur z ſol. innoteſcat autem e eſſe d, & $d a + b a - a^2$ æquabitur $b d$ † d^2, vnde. *Proponitur æquatio cubica Numeris eadem tractantur.*

Si $7 Q -$ æquetur 36 ergo $7 Q + 1 C$ æquabitur 36, cuius æquationis radix eſt 2, ergo ex dictis $9 R - 1 Q$ æquabitur 18, & fit $1 R$ 3, vel 6.

Proponatur a pl.pl. $b - a^4$ æquari z pl. ſol. effingatur quadrato-quadratum ex $e - a$ & ſumantur ſingularia planoplana ſimpliciter, nec repetita, & erunt $e^3 - a e^2$ † $a^2 e^2 - a^3 e + a^4$. Ducantur omnia in $e + a$, & fiet $e^5 + a^5$, at verò ex ijs, quæ proponuntur a^5 valet b pl.pl. a — z pl. ſol. ſiquidem cum ſit b pl.pl. $a - a^5 =$ z pl. ſol. erit per antitheſin $a^5 =$ b pl.pl. a — z pl.ſol. vtrique parti addito e^5, & $e^5 + a^5$ æquabitur e^5 † b pl.pl. a — z pl. ſol. applicetur vtraque æquationis pars ad $e + a$, & ex prima parte orietur $e^4 - a e^3 + a^2 e^2 - a^3 e + a^4$, quid autem oriatur ex ſecunda non liquet; comparetur tamen tali planoſolido, vt plano-planum ortiuum nequeat ignorari, itaque b pl.pl. e + b pl.pl. a æquetur alteri eius parti, nempe e^5 † b pl.pl. a — z pl.ſol. proinde vtrinque deleatur affectio ſub a gradu, & fiat antitheſis, nam $e^5 -$ b pl.pl. e æquabitur z pl.ſol. Innoteſcat autem e eſſe d, & $d^4 - d^3 a$ † $d^2 a^2 - d a^3 + a^4$ æquabitur b pl.pl., & ordinata æquatione ſecundùm Artem $d^3 a - d^2 a^2 + d a^3 - a^4$ æquabitur $d^4 -$ b pl.pl. Itaque ſi b pl.pl. $a - a^5$ æquetur z pl.ſol., & $e^5 -$ b pl.pl. e æquetur z pl.ſol. innoteſcat autem e eſſe d, & $d^3 a - d^2 a^2 + d a^3 - a^4$ æquabitur $d^4 -$ b pl.pl. 11 R — 1 QC æquetur 10, ergo 1 QC — 11 R æquabitur 10, ſitque 1 R 2, quamobrem 8 R — 4 Q + 2 C — 1 QQ æquabitur 5, ſitque vna R 1, & radix primùm quæſita; Si ſit æquatio 1 QC — 11 R = 10 radicis valor erit 2, nam 1 QC valebit 32, hinc ablato 22 omnium radicum pretio, remanebit 10.

Proponatur $b a^4 - a^5$ æquari z pl. ſol., & per metatheſin vtrique ſcilicet parti addito e^5, & $a^5 + e^5$ æquabitur $b a^4 -$ z pl. ſol. $+ e^5$, vtraque pars applicetur ad $a + e$, illic oritur $a^4 - a e^3 + a^2 e^2 - a^3 e + a^4$, quod ſi $b a^4 - b e^4$ æquetur alteri parti, ea quoque commodam diuiſionem recipiet ad a † e, & orietur $b a^3 - b a^2 e + b e^2 a - b e^3$ facta, poſitaque æqualitate, vt æquatio ritè ordinetur, ſtatuatur $e^5 + b e^4$ æquari z pl.ſol., & innoteſcat e eſſe d, & $d^4 - d^3 a + d^2 a^2 - d a^3 + a^4$ æquabitur $b a^3 - b a^2 d + b d^2 a - b d^3$, omnibuſque ordinatis $b d^3 a$ † $d^3 a - b d a^2 - d^2 a^2$ † $b a^3 + d a^3 - a^4$ æquabitur $b d^3$ † d^4. *Proponitur æquatio per reducenda.*

11 QQ — 1 QC æquetur 10000. Igitur 11 QQ † 1 QC æquabitur 10000. Fitque 1 R 5. Quapropter 400 R — 80 Q + 16 C — 1 QQ æquabitur 2000, & quæſita radix fit 10. Quoniam autem Anaſtrophe contraria via aliquando vſurpatur, vt cùm in ambigua æquatione, contingit radicem vnam dari ex duabus vel pluribus, de quibus poteſt æquatio explicari; hic repetuntur Anaſtrophes veſtigia ad radicem correlatam aſſequendam; & inde varia proficiſcuntur Theoremata. *Anaſtrophe contraria via perficitur.*

Si $a^3 -$ b pl. a æquetur z ſolido, & rurſus b pl. $e - e^3$ æquetur z ſolido. Innoteſcat autem e eſſe d, & $a^2 - d a$ æquabitur b pl. $- d^2$. Cum enim $a^3 -$ b pl. a æquetur z ſol., & rurſus b pl. $d - d^3$ æquetur z ſol. ergo $a^3 -$ b pl. a æquabitur b pl. $d - d^3$, & per metatheſin a^3 † d^3 æquabitur b pl. a † b pl. d, & vtraque æquationis parte diuiſa per a † d, & a^2 † $d^2 - d a$ æquabitur b pl., qua æquatione ordinata ſecundùm Artem $a^2 - d a$ æquabitur b pl. $- d^2$, vnde *Alia æquatio.*

Si 1 Q — 1 R 1 C — 8 Q æquetur 7, ſequitur 8 R — 1 C æquari 7, cùmque 1 R poſſit eſſe 1; & 1 Q — 1 R æquabitur 7, quapropter radix primò quæſita erit ℞ $\frac{29}{4} + \frac{1}{2}$. *Numeris eadem tractantur.*

B a^2 † a^3 æquabitur z ſol., & rurſus $b e^2 - e^3$ æquetur z ſol. Innoteſcat e eſſe d, & a^2 † $\overline{b - d}\, a$ æquab. $b d - d^2$. Cùm enim $b a^2$ † a^3 æquetur z ſol. inſuper $b d^2 - d^3$ æquetur z ſol. propterea $b a^2$ † a^3 æquabitur $b d^2 - d^3$, & per metatheſin d^3 † a^3 æquabitur b $\overline{d^2 - a^2}$, vtraque æquationis parte ducta per $d + a$, & d^2 † $a^2 - d a$ æquabitur b $\overline{d - a}$, qua æquatione *Alia æquatio.*

tione concepta ſecundum Artem $a^2 + \overline{b - d}\, a$ æquabitur $b\,d - d^2$, itaque.
Si 9 Q ✠ 1 C æquetur 8 ergo 9 Q — 1 C æquatur 8, & quia 1 R poteſt eſſe 1, & 1 Q ✠ 8 R ęquatur 8, ob id radix primùm quæſita erit ℞ 24 — 4.

Altera æquatio.

Si b pl. a — a^3 ęquetur z ſol., & rurſus b pl. e — e^3 æquetur z ſol. Innoteſcate eſſe d, & a^2 ✠ d a ęquabitur b pl. — d^2, cum enim b pl. a — a^3 æquetur z ſolido; ergo b pl. a — a^3 æquabitur b pl. d — d^3, & per antitheſin a^3 — d^3 ęquabitur b pl. a — b pl. d, vtraque æquationis parte diuiſa per a — d, & a^2 ✠ d^2 ✠ d a ęquabitur b pl. ęquatione concepta ſecundum Artem a^2 ✠ d a ęquabitur b pl. — d^2, Vnde.

Numeris eadem explicantur.

Si 8 R — 1 C æquetur 7 poteſt 1 R eſſe 1, & 1 Q ✠ 1 R æquatur 7, ſitque rurſus 1 R, ℞ $\frac{29}{4}$ — $\frac{1}{2}$.

Altera æquatio cubica.

Si b a^2 — a^3 ęquetur z ſol.; Et rurſus b e^2 — e^3 æquetur z ſol. innoteſcat autem e eſſe d, & $a^2 + \overline{d - b}\, a$ æquabitur b d — d^2. Cum enim b a^2 — a^3 æquetur z ſol. & ſurſus b d^2 — d^3 æquetur z ſol. ergo b a^2 — a^3 æquabitur b d^2 — d^3, & per metatheſin a^3 — d^3 æquabitur b $\overline{a^2 - d^2}$, vtraque æquationis parte diuiſa per a — d, & a^2 ✠ d^2 ✠ d a æquabitur b a † b d, qua æquatione concepta ſecundum Artem a^2 ✠ $\overline{d a - b a}$ æquabitur b d — d^2, vndè.

Numeris eadem tractantur.

Si 9 Q — 1 C æquetur 8 poteſt 1 R eſſe 1. Quare 1 Q — 8 R æquabitur 8, & rurſus 1 R erit ℞ 24 — 4.

Iſomœria quid, & qua ratione ipſa perficiatur.

Cùm verò æquationes fractionibus laborant, ex quo capite minus Analyſi ſunt idoneæ oportet; Iſomoeriam adhibere; eſt autem Iſomoeria ſpecies tranſmutationis per multiplicationem ita inſtituta, vt æqualitates à fractionibus, quibus laborant, liberentur.

Reducuntur autem fractiones ad eandem denominationem ex præceptis Logiſtices; ducitur q; communis homogeneorum denominator, vel ortum ab eo graduorum in datas coefficientes, daturaque comparationis homogeneum Radices ducuntur in coefficientes longitudines, quadrata in coefficientes magnitudines; planas homogenea datæ menſuræ plana; cubi in parabolas ſolidas, homogeneaue datæ menſurę ſolida, & ita deinceps eodem ordine ſeruato, quod autem fit ex denominatore communi, & radice æqualitatis propoſitæ, eſt radix æqualitatis pręparatæ, &c.

Sæpe autem, vt hæc tranſmutatio non multiplicatione ſed diuiſione perficiatur.

Plerumque contingit, vt hæc tranſmutatio, non multiplicatione, ſed diuiſione perficitur. Sed exempli omnia facilius intelligentur ſolum id notandum ſupereſt, nem Iſomoeriam perfeciſſe nil aliud eſſe, quàm propoſitæ ęqualitatis poteſtatem, & affectionum, & comparationis homogenea per eunde terminum multiplicaſſe aut diuiſiſſe.

Propo natur a^3 ✠ $\frac{b\ \text{ſol.}\ a}{d}$ æquari z ſolido. Vt igitur à fractionibus ęqualitas, quibus laborat, liberetur, reducendæ ſunt fractiones ad eandem denominationem; ſitque hoc modo, da eſto e planum; ergo $\frac{e\ \text{pl.}}{d}$ erit a; ex ijs verò, quæ proponuntur e pl cubus † $\frac{b\ \text{ſol.}\ d\ e\ \text{pl.}}{d^3}$ æquabitur z ſolido. Cum enim $\frac{e\ \text{pl.}}{d}$ ſit a, fieri debet cubus ex ipſo; ſiquidem a^3 eſt poteſtas æquationis propoſitæ. Deinde $\frac{e\ \text{pl.}}{d}$ duci debet in b ſol. quoniam a ducebatur in b ſol., & productum diuidi debet per d, ſiquidem b ſol. a, erat applicatum magnitudini d; proinde $\frac{e\ \text{pl.}}{d}$ ducatur in $\frac{b\ \text{ſol.}}{d}$, & fiet $\frac{b\ \text{ſol.}\ e\ \text{pl.}}{d^2}$ atque adeo fiet $\frac{b\ \text{ſol.}\ d\ e\ \text{pl.}}{d^3}$, quo addito ad $\frac{e\ \text{pl. cubum}}{d^3}$, nempe cubum ex $\frac{e\ \text{pl.}}{d}$, & fiet $\frac{e\ \text{pl. cub.} + b\ \text{ſol.}\ d\ e\ \text{pl.}}{d^3}$ quod ęquabitur z ſolido.

Ductis omnibus in d^3, & e pl. cubus ✠ b ſol. d e pl. æquabitur z ſolido d^3. Itaque

Exemplum alterum.

Sit a^3 ✠ $\frac{b\ \text{ſol.}\ a}{d}$ æqualis z ſol. Supponatur e planum ęquari a oſtendendum eſt e pl. cubum † b ſol. d e pl æquari z ſol. d^3.

Quoniam e pl. æquatur d a, vtique $\frac{e\ \text{pl.}}{d}$ ęquabitur a ergo $\frac{e\ \text{pl. cubus}}{d^3}$ ęquabitur a^3 quare $\frac{e\ \text{pl. cub.}}{d^3}$ ✠ $\frac{b\ \text{ſol.}\ e\ \text{pl.}}{d^2}$ ęquabitur z ſolido; omnibuſque ductis in d^3, & e pl. 3 † b ſol. e pl. d æquabitur z ſol. d^3.

Numeris eadem tractantur.

Proponatur 1 C † $\frac{1}{2}$ R æquari 225. Hæc æquatio per iſomoeriam ad hanc reuocabitur 1 C ✠ 6 R = 1800, & quidem huius radix eſt 12, illius verò 6. Hęc vt melius intelligantur, ſpeciebus numeros aptabimus. Per b ſol. intellgamus 3 per d verò 2; per z ſol. intelligamus 225, & iuxta ſpecioſam analyſin, 1 C ✠ 6 R æquabitur 1800.

Quo-

Iſomoeria eo pus magis explicatur.

Quoniam igitur eſt æquatio 1 C † $\frac{3}{2}$ R = 225. Ortum propterea duxit à Paraboliſmo, quare neceſſe eſt aliquando fuiſſe 2 C † 3 R = 450. Itaque erit 1 C ✠ $\frac{3}{2}$ R = $\frac{450}{2}$. Cum itaque radix diſtet à cubo per quadratum; propterea quadraticè multiplicetur 2 denominator, & fiet 4, quo multiplicato per 3 numeratorem, fit 12, quo diuiſo per 2 fit 6, radicum numerus pręparatæ æquationis, & quia numerus diſtat à cubo per cubum; ducatur 2 in ſe cubicè, vt fiat 8, quo ducto in 450 fit 3600, quo diuiſo per 2, fit quotiens 1800, & comparationis homegeneum præparatæ, & nouę ęquationis; ergo 1 C † 6 R ęquabitur 1800.

Author hac de re multa ſcripſit in Algebra veteri.

De his autem multa ſcripſimus in Algebra veteri. Huius ęquationis radix eſt 12; Quoniam verò radix pręparatę æquationis ſe habet in hoc exemplo ad primò quęſitam, vt 2 denominator, ad 1, ob id radix primò quęſita erit 6; Diximus autem in Arte veteri de Iſomoeria loquentes, radicem præparatę æquationis diuidendam eſſe per denominatorem.

Explicantur numeris, quæ paulo antea tradita ſunt.

Hęc vt meliùs intelligantur. Sit ęquatio 1 C ✠ $\frac{3}{2}$ R = 225, reſpondens illi a^3 ✠ $\frac{b\ sol.}{d}$ a = z ſolido. Supponamus d a eſſe e pl. ergo $\frac{e\ pl.}{d}$ erit a, itaque e pl. noua ſcilicet radix, diuiſa per denominatorem fractionis exhibet radicem ęquationis propoſitę; noua verò hæc radix tractetur, vt dicebamus, & innoteſcet radix primò quęſita; prouenit enim e pl. 3 ✠ b ſol. d e pl. = z ſol. d^3. Vnde ſi per e planum, intelligamus ſecundam radicem; manifeſtum eſt huius cubum, vna cum homogeneo ſub eadem radice, & producto abs denominatore in numeratorem ęquari dato comparationis homogeneo ducto in cubum denominatoris, vt Analyticè demonſtratum fuit.

Numeris eadem tractantur.

Sit 1 C — $\frac{3}{2}$ R = 5; hoc eſt 1 C — $\frac{3}{2}$ R = $\frac{10}{2}$. Quoniam radix diſtat a cubo per Q; ob id ducatur denominator 2 in ſe quadraticè, & productum 4, ducatur in 3 numeratorem, quod enim prouenit ſi diuidatur per 2 fit quotiens 6, & numerus radicum nouæ ęquationis. Deinde quia numerus diſtat à cubo per C; cubicè ducatur denominator 2 in ſe, vt fiat 8, quo ducto in 10, fit 80, hoc autem diuiſo per 2, fit quotiens 40, & comparationis homogeneum nouę ęquationis, nempe 1 C — 6 R = 40.

Fit reditus ad ſuprapoſitam æquationem

Redeuntes ad æquationem illam, 1 C ✠ $\frac{3}{2}$ R = 225. Iuxta pręſcriptum Specioſæ Logiſtices reduci ad 1 C ✠ 6 R = 1800. Manifeſtè patet, colligitur enim fieri e pl. 3 ✠ b ſol. d e pl. = z ſol. d^3. In allata æquatione b ſol. eſt 3, & z ſol. eſt 225, at verò d eſt 2, igitur, vt ſi ducatur b ſol in d, & fit b ſol. d; quo ducto in e pl. fit b ſol. d e pl. cubus ex e pl. eſt e pl. 3 vnde e^3 b pl. 3 ✠ b ſol. d e pl. facit vnam ęquationis partem; ita ducatur 3 in 2, & fit 6, quo ducto in R fit 6 R, faciet vnam ęquationis partem. Alteram verò conſtituit in ſpecioſa multiplicatio z ſol. in d^3 ita hic ducatur 225 in 8, cubum ex 2, & fit 1800 pro altera æquationis parte.

Concordantia præceptorum cum ſuprapoſitis.

In idem autem recidunt pręcepta tradita. Cum enim fuerit 1 C ✠ $\frac{3}{2}$ R = 225, & per primum modum iſomoeriam perficimus; reducimus numerum abſolutum ad fractionem ſic fit 1 C ✠ $\frac{3}{2}$ R = $\frac{450}{2}$. Deinde ducimus quadraticè 2, denominatorem, & productum 4, multiplicamus per numeratorem, productum verò 12, diuidimus per 2, vt proueniat 6; productum enim eſt $\frac{12}{2}$ hoc autem idem eſt, quod 2 denominatorem ducere in 3 numeratorem; idem enim prouenit, & hoc pręcipit pręceptum Analyticum.

Explicationis continuatio.

Deinde denominatoris cubum 8 ducimus in 450, numeratorem fractionis $\frac{450}{2}$ productum verò 3600, diuidimus per 2, vt fiat 1800 productum enim eſt $\frac{1800}{2}$. Idem eſt autem ducere 225 in 8, cubum ex 2; Quod pręceptum analyticum iubet.

Primus igitur Iſomoerię modus hinc facile demonſtratur, & inde quoque ſecunda methodus oſtendi poteſt.

Proponitur æquatio.

Proponatur 1 C ✠ $\frac{9R}{4}$ ęquari 530, & 1 C ✠ 36 R, ęquabitur 33920.

Ducatur 1 C in 4, fit 4 C huius cubus 64 ſi diuidatur per 64 cubum ex 4, denominatore, prouenit 1 C. Deinde 9 R ducantur in 16, quadratum ex 4 denominatore, & fiunt 144 quibus diuiſis per 4; fit 36, vnde 36 R. Demum 530, comparationis homogeneum ducatur in 64 cubum ex 4 denominatore, & producetur 33920.

Per diuiſionẽ hæc operatio perficitur.

Et quidem per diuiſionem perficitur hęc operatio; ſi inueniatur numerus, qui diuidi poſſit abſque fractione per omnes denominatores æquationis propoſitæ; mox verò multiplicetur per illum, numerus illius gradus, qui proximus eſt ad poteſtatem; per quadratum illius, numerus ſequentis gradus; per cubum numerus tertij gradus, & ita deinceps, donec ad comparationis homogeneum deueniatur; quoniam verò hiſce multiplicationibus valor radicis æquationis propoſitæ augetur: numerus, qui inuenitur pro valore radicis nouæ æquationis diuiſus per numerum illum inuentum, dabit valorem radicis æquationis propoſitæ.

Hoc idem aſſequemur, omnes æquationis partes diſponendo ſecundùm graduum parodicorum ſeriem, additis numeralibus circulis, vbi ſeries interrupta fuerit, collocata autem vnitate ſub poteſtate, communique denominatore ſub proximo inferiori gradu, continuetur ſeries continuè proportionalium vſque ad vltimam partem, quæ homogeneum eſt comparationis, qui quidem numeri ſunt quæſiti multiplicatores ad euitandas fractiones, vel ſunt diuiſores, quibus æquatio in minores numeros redigitur.

Multa de hac methodo ſcripſit Auctor in prima parte.

Sed de hac methodo videnda ſunt, quę ſcripſimus in prima huius Operis parte, dum de Iſomoeria tractaremus, & aliqua exempla paulò infra nos afferemus in medium.

Alia proponitur æquatio emendanda.

Proponatur a^3 ✠ $\frac{b\ ſol.\ a}{d}$ æquari $\frac{z\ pl.pl.}{d}$, certè e plani-cubus ✠ b ſol. d e pl. æquabitur z pl.pl. d^2; proptereaquòd d a eſto e pl., ergo $\frac{e\ pl.}{d}$ erit a, quare e plani-cubus ✠ $\frac{b\ ſol.\ d\ e\ pl.}{d\ d}$ æquabitur $\frac{z\ pl.\ pl.}{d}$. Omnibus autem applicatis ad d^3, proueniet æquatio vt ſupra, e plani cubus ✠ b ſol. d e pl. ⊐ z pl.pl. d^2; Si namque ducatur $\frac{z\ pl.\ pl.}{d}$ per d^3, fiet productum z pl.pl. d^2.

Eadem numeris tractantur

Proponatur 1 C ✠ $\frac{3}{2}$ R æquari $\frac{265}{8}$, per Iſomoeriam 1 C † 6 R æquabitur 1060; fitque 1 R 10, quare prioris æquationis radix erit 5; etenim ſi 1, numerus cuborum ducatur in 2 denominatorem, fit 2, cuius cubus eſt 8, quo diuiſo per 8 cubum denominatoris, proſilit in quotiente 1, & erit 1 C. Deinde 4 denominatoris quadratum ducatur in 3 numeratorem, & producetur 12, quo diuiſo per 2, fit 6; eritque numerus radicum. Demum ſi multiplicetur 265 per 8 cubum denominatoris, producetur 2120, quo diuiſo per 2, fit 1060.

Exemplum alterum.

Proponatur 1 C † $\frac{9}{4}$ R æquari $\frac{545}{64}$; etiam 1 C † 36 R æquabitur 8720; huius autem æquationis radix eſt 20; ob id primùm propoſitæ erit 5; diuidi enim debet hæc per denominatorem fractionis, nempe per 4, & quidem radix diſtat à cubo per Q; quare 4 denominator in ſe quadraticè ducatur, vt fiat 16, quo ducto in 9, numeratorem, fit 144, hoc autem diuiſo per eundem denominatorem 4, fit quotiens 36, & numerus radicum nouæ ęquationis; & 545, ducatur in 64 cubum ex 4, productum 34880 diuidatur per 4, proſilit 8720 pro comparationis homogeneo nouæ æquationis.

Æquatio cubica emendanda.

Proponatur a^3 ✠ $\frac{b\ pl.\ a\ a}{d}$ æquari z ſolido. Sit e pl. æquale d a, & e pl. 3 † b pl. e pl. 2 ęquabitur z ſol. d^3.

Proponatur 1 C † $\frac{3}{2}$ Q æquari 270, ergo 1 C † 3 Q æquabitur 2160.

Huius æquationis radix eſt 12; ergo illius eſt 6. Quadratum diſtat à cubo per radicem, quare ducatur 2, denominator in 3, numeratorem, & productum 6, diuidatur per eundem 2, & prouenit 3, vnde idem numerus quadratorum eſt retinendus, & quia numerus diſtat à cubo per cubum, ob id cubicè multiplicetur 2, & fit 8, numerus autem 270, ad fractionem reductus, vt denominator ſit 2, erit $\frac{540}{2}$, & 540 ducto in 8, fit 4320, quo diuiſo per eundem 2, fit quotiens 2160, & comparationis homogeneum nouæ æquationis.

Idem contingit, cùm varij ſunt denominatores fractionum.

Hinc autem obſerua, idem euenturum, ſi alia ſit denominatio fractionis ipſius comparationis homogenei, vnde ſi foret 1 C ✠ $\frac{3}{2}$ Q ⊐ $\frac{1620}{6}$, conſideremus eodem modo numerum diſtare à cubo per cubum; ob id fractio $\frac{1620}{6}$ reuocetur ad $\frac{540}{2}$, & 2 cubicè multiplicetur, fitque 8, quo ducto in 540, fit 4320, quo diuiſo per 2 fit 2160, ergo 1 C † 3 Q æquabitur 2160; huius radix eſt 12, illius igitur 6.

Exemplum alterum.

Proponatur a^3 ✠ $\frac{b\ pl.\ a\ a}{d}$ æquari $\frac{z\ pl.\ plano}{d}$, & e pl. 3 † b pl. e pl. 2 æquabitur z pl. pl. d^2.

Si 1 C † $\frac{3}{2}$ Q ęquetur $\frac{325}{2}$; per Iſomoeriam 1 C † 3 Q æquabitur 1300. Huius

ęqua-

æquationis radix eſt 10, ergo illius eſt 5, quoniam enim Q diſtat à C per R, propterea, &c.

Proponitur æquatio cubica numeroſa emendanda.

Et ſi 1 C ✣ $\frac{7}{3}$ Q æquetur $\frac{4950}{27}$ etiam 1 C ✣ 7 Q æquabitur 4950. Huius æquationis radix eſt 15; Illius igitur erit 5.

Æquatio cubica ſpecioſa fractionum vitio laborans.

Proponatur a³ ✣ $\frac{b\ sol.\ a}{d}$ æquari $\frac{z\ pl.\ sol.}{h\ pl.}$; d b pl. a eſto e pl.pl. ergo e pl.pl. 3 † b ſol. d h pl.pl. e pl.pl. æquabitur z pl. ſolido d³ h pl.pl. Cum enim d h pl. a æquetur e pl.pl. ergo $\frac{e\ pl.pl.}{d\ h\ pl.}$ æquabitur a; quare e pl.pl. 3 $\frac{+ d\ h\ pl.pl.}{d^3\ h\ pl.}$ $\frac{b\ sol.\ e\ pl.pl.}{pl.pl.}$ æquabitur $\frac{z\ pl.\ sol.}{h\ pl.}$ omnibus ductis in d³ h pl.pl.pl., & e pl.pl. 3 ✣ b ſol. d h pl.pl. e pl. pl. æquabitur z pl.-ſol. d³ h pl.pl.

Numeris eadē æquatio tractantur.

Si 1 C ✣ $\frac{11}{12}$ R æquetur $\frac{19}{4}$ ergo per Iſomoeriam 1 C ✣ 2112 R, æquabitur 525312, huius radix eſt 72, & illius erit 1 $\frac{1}{2}$. Ita Vieta.

Sed hoc per normam ſpecioſam deduxit. Verùm, vt alibi notauimus, iuuat ad primæuam æquationem recurrere; eſt enim hæc oriunda ab illa 12 C ✣ 11 R = 57. Vnde inſtituto parabaliſmo, fit 1 C ✣ $\frac{11}{12}$ R = $\frac{19}{4}$ ſeu quod idem eſt 1 C ✣ $\frac{11}{12}$ R = $\frac{57}{12}$.

Explicatio.

Perpendamus autem radicem à cubo diſtare per quadratum, quare 12 denominator quadraticè in ſe ducatur, proueniet autem 144, quo multiplicato per 11, producitur 1584, quo diuiſo per 12 denominatorem eundem, prouenit 132, pro numero radicum nouæ æquationis. Deinde ducatur 1728, cubus ex 12 in 57, numeratorem comparationis homogenei, & fiet *98496*, quo diuiuiſo per 12, fit quotiens 8208, comparationis homogeneum nouæ æquationis 1 C ✣ 132 R = 8208. Huius æquationis radix eſt 18, quo diuiſo per 12, denominatorem, fit quotiens 1 $\frac{1}{2}$ pro radice æquationis propoſitæ.

Alia methodus explicatur.

Alia autem methodo, hunc in modum. Communis diuiduus numerus, ſit 24, qui nempe ſine fractionibus diuidi poteſt per denominatores fractionum æquationis propoſitæ, fiat autem 1, primus terminus, ſintque continuè proportionales 1. 24. *576.* 13824. diſpoſiti ſub æquationis membris, vt a latere cernitur; ducantur autem numeri graduum parodicorum, in ſibi ſubditos, ac reſpondentes numeros, nempe $\frac{11}{12}$ per *576*, fit 528, inſuper $\frac{19}{4}$ per 13824, fitque *65664*.

1 C ✣ o Q	✣	$\frac{11}{12}$ R	= $\frac{19}{4}$.
1.	24.	*576*	13824.
		528	*65664.*

Itaque erit æquatio 1 C ✣ 528 R = *65664*; productum enim ex numero radicum, in ſibi numerum reſpondentem è quatuor proportionalibus, eſt numerus radicum nouæ, præparatæque æquationis, & productum ex comparationis homogeneo in ſibi reſpondentem, è quatuor proportionalibus, eſt comparationis homogeneum nouæ æquationis. Huius verò æquationis præparatæ radix eſt *36*, quæ ſi diuidatur per 24 communem diuiduum fit quotiens, 1 $\frac{1}{2}$, & radix æquationis propoſitæ.

Quando ſecundus terminus deeſt.

Obſerua, cum ſecundus æquationis terminus deſit, hoc eſt terminus, Q qui proximè cubo ſuccedit, deſſideratur, ſuppleri per cifram, &c.

Quando in æquatione ſunt magnitudines aſymmetriæ qua via procedendum.

Si verò contingat, vt in æquatione ſint magnitudines aſymmetræ. Ita procedendum.

Sit æquatio 14 R — 1 C = 1288; fieri debet metatheſis vt proueniat — 1 C ✣ o Q ✣ 14 R = ℞ 288, & ſub ſingulis membris diſponantur numeri continuè proportionales, & ad euitandam aſymmetriam comparationis homogenei, puta ℞ 288, multiplicari, vel diuidi debet per aliquem numerum, qui reddat rationalem; huiuſmodi eſſe poteſt ℞ 8; nam diuidens ℞ 288 dat ℞ *36*, hoc eſt *6*; erunt igitur proportionales 1; ℞ 2; 2; ℞ 8 per quos diuiſis numeris æquationis, prouenient 7, & *6*.

— 1 C ✣	o Q †	14 R	= ℞ 288.
1.	℞ 2.	2.	℞ 8.
	7.		*6.*

Si enim 14, diuidatur per 2 fit

quotiens 7, ſi diuidatur ℞ 288 per ℞ 8, fit quotiens ℞ 36, vt dixi, hoc eſt 6. Vnde proueniet ęquatio — 1 C † 7 R = 6, ſeu 7 R — 1 C = 6. Huius radix eſt 1; vel 2; qui multiplicati per numerum aſſumptum ℞ 2, dabunt ℞ 2, & ℞ 8; propoſitę igitur æquationis radices ſunt ℞ 2, & ℞ 8.

Quando operatio diuiſione perficitur.

Cùm autem diuiſione operatio perficitur, coefficientes longitudines applicantur ad radices coefficientis planę, & homogeneę datę menſuræ, ſolidæ ad cubos, & ita deinceps; quod verò ab huiuſmodi oritur applicatione radicis ad ipſum communem diuiſorem, eſt radix æqualitatis præparatæ, nouęque æquationis.

Exemplum.

Proponatur e pl. 3 † d g e pl. 2 † b pl. d^2 e pl. æquari z ſol. d^3. $\frac{e\ pl.}{d}$ eſto a; ergo d a erit e pl., quod facilè ex ſupradictis deducitur. Cùm igitur d a ſit e planum; certè $d^3\ a^3$ † g d $d^2\ a^2$ † b pl. d^2 d a, æquabitur z ſol. d^3. Omnibus verò diuiſis per d^3, hoc eſt vtraque æquationis parte diuiſa per d^3, & a^3 † g a^2 ✠ b pl. a æquabitur z ſolido.

Numeris eadem exhibentur.

Si 1 C † 12 Q † 8 R ęquetur 2280; huius æquationis radix eſt 10; Omnibus diuiſis per 2; & 1 C † $\frac{12}{2}$ Q † $\frac{8}{4}$ R ęquabitur $\frac{2280}{8}$; ſitque 1 R $\frac{10}{2}$, hoc eſt 5, ſublatis fractionibus, ad hanc reuocabitur 1 C † 6 Q † 2 R = 285.

Rurſus eadem numeris tractantur.

Si 1 C † 12 Q ✠ 8 R æquetur 696, & 1 C † 6 Q † 2 R æquabitur 87. Illius ęquationis radix eſt 6, huius verò eſt 3.

Quando poteſtates non ſunt affectæ.

Si verò poteſtates non ſint affectæ. Vt ſi 1 C æquetur 1728, radix cubica eſt 12, & 1 C æquabitur $\frac{1728}{216}$, & radix eſt $\frac{12}{6}$, hoc eſt 1 C æquabitur 8; ſitque 1 R; 2. Numeri enim 1728, & radix cubica eſt 12, numeri 216 eſt 6.

Si 1 C æquetur 512, fit 1 R, 8, & 1 C æquabitur $\frac{512}{64}$; ſitque 1 R $\frac{8}{4}$, hoc eſt 1 C æquabitur 8, ſitque 1 R 2.

Symmetricus climactiſmus qua Arte perficiatur.

Quando aſymmetria fuerit in planitie.

Plurimùm vexat animum operantis numerorum aſymmetria, quam is tamen euitare ſtudet beneficio ſymmetricæ climactiſmi; eſt autem hæc operatio ſpecies quædam aſcenſus climactici; eſt autem regularis, cùm vtraque pars æquationis ducatur quadraticè, vel cubicè, hoc eſt climacticè attollitur; quadratica, cùm quadraticè, cubica cùm cubicè, &c. eoque ordine deinceps, ſecundùm poteſtatum gradus. Quod in hac pragmatia contingit.

Æquatio proponitur aſymmetria vitio laborans, & qua arte ſit liberanda

Proponatur a^3 — b pl. a æquari ℞ z ſol.ſolido. Si hanc æquationem ab aſymmetria, qua laborat, liberare velimus; quandoquidem aſymmetria eſt in planitie; propterea ſunt omnia quadraticè multiplicanda. Quadratum autem ab a^3 — b pl. a, eſt a^6 ✠ b pl.pl. a^2 — 2 b pl. a^4. Sed quadratum ex ℞ z ſol.ſol., eſt z ſol.ſol., ergo erit æquatio huiuſmodi a^6 † b pl.pl. a^2 — 2 b pl. a^4 = z ſol.ſolido.

Numeris eadē tractantur.

Hæc verò numeris perſpicua fient, 1 C — 2 R æquetur ℞ 1200. Quadrentur omnia, & fiet æquatio huiuſmodi 1 C ✠ 4 Q — 4 Q Q = 1200; quæ reducetur ad hanc 1 C C ✠ 4 R — 4 Q Q = 1200.

Huius ęquationis radix eſt 12, quadratum, radicis, de qua quæritur.

Supradictorū declaratio.

Hæc declarari poſſunt hoc pacto. Si 1 R valor eſt ℞ 12, cubus valebit ℞ 1728; & 2 R valebunt ℞ 48. Si à ℞ 1728 auferamus ℞ 48, remanebit 1200. Etenim communis diuiſor eſt 12, qui diuidens 1728, facit quotientem 144; diuidens 48, facit quotientem 4, horum latera ſunt 12, & 2, quorum differentia eſt 10, cuius quadratum eſt 100, quo ducto in 12, communem diuiſorem, producitur 1200, cuius radix eſt ℞ 1200, quæ eſt differentia inter ℞ 1728, & ℞ 48.

Exemplum.

Si 1 C — 2 R æquetur ℞ 3. Quadrentur omnia, & fiet 1 C † 4 R — 4 Q = 3. Huius æquationis radix eſt 3, nimirum quadratum quæſitæ radicis; ſit ob id quęſita radix ℞ 3, & ita eſt; ſiquidem ſi 1 R, valet ℞ 3; vtique 1 C valebit ℞ 27, & 2 R, valebunt ℞ 12, differentia inter ℞ 27, & ℞ 12, eſt ℞ 3, & hoc quantùm ad primam æquationem. Ad aliam, quod attinet. Si 1 R valet 3, 1 C valebit 27, & 4 R, valebunt 12; quorum ſumma eſt 39, & 4 Q valebunt 36; differentia verò inter 39, & 36 eſt 3.

Rurſus eadem tractantur, aſymmetria cū fuerit in ſoliditate.

Proponatur a^4 — ℞ C b ſol.ſol. a, æquari z ſolido, & ſit æqualitas expurganda ab aſymmetria, qua ipſa laborat, eſt hęc autem nempe aſymmetria in ſoliditate; per ea, quę proponuntur, adhibita metatheſi, factoque paraboliſmo; $\frac{a\ z - z\ ſol.}{a}$ æquabitur ℞ C b ſol.ſolido. Omnia cubicè ducantur; $\frac{a\ 9 - 3\ z\ ſol.\ a\ 6 + 3\ a\ ſol.ſol.\ a\ 3 - z\ ſol.ſol.ſol.}{a\ 3}$ æquabitur b ſolido

ſolidoſolido; Omnibus ductis in a^3, & ſecundùm Artem ordinatis a^9 — 3 z ſol. a^6 † 3 z ſol.ſol. — b ſol.ſol. a^3 æquabitur z ſol.ſol.ſolido.

Si 1 C — ℞ C 18 R æquetur 6, & 1 C — 18 Q ✠ 90 R æquabitur 216; ſitque 1 R 12, cubus radicis quæſitæ. Etenim ſi 1 R valor eſt 12; certè 1 C valebit 1728, & 18 Q valebunt 2592. Demum 90 R valebunt 1080, at verò ad 1728, addito 1080, fiet ſumma 2808, à qua ſi auferatur 2592; & remanebit 216.

Exemplum ad idem.

Si 1 C — ℞ C 18 R æquetur 6, adhibita metatheſi $\frac{1C - 6}{18}$ æquabitur ℞ C 18, vtraque æquationis pars cubicè ducatur, & quidem illa $\frac{1C - 6}{18}$ cubicè ducta facit hoc productum $\frac{1CCC - 18CC + 108C - 216}{1C}$; ſi verò cubicè ducatur ℞ C 18, fiet 18; vtraque pars ducatur in 1 C, & fiet 1 C C C — 18 C C † 108 C — 216 = 18 C; quæ ſi ordinetur, ad hanc reuocabitur 1 C C C — 18 C C † 90 C = 216, atque demum 1 C — 18 Q ✠ 90 R æquabitur 216.

Rurſus eadē explicantur exemplis.

Cæterùm oportet cautum eſſe Artificem in hac pragmatia, quando ſcilicet æquationes ad altiſſimos gradus aſcendunt, non enim ſine magno errandi periculo perfici poteſt; quod etiam in prima huius Operis parte, nos adnotauimus.

Artificis cautela in operando.

Quoniam verò plurimùm obeſt reſolutioni nimia elatio poteſtatis; opportunum propterea videbatur difficultati aliquo præſidio occurrere, huiuſmodi quidem eſt climactica parapleroſis, nempe ſcalare ſupplementum, eſtque ſpecies quædam irregularis deſcenſus; hac autem induſtria quadratoquadraticas æquationes ad quadraticas per medium cubicarum à radice plana, imò etiam cubocubicas, & exinde per binos alternos gradus climacticos, deprimere licet.

Climactica parapleroſis qua arte ſit inſtituenda.

Quo verò pacto hæc perficienda ſint, paucis aperiemus.

Proponatur a^4 ✠ b ſol. a æquari z planoplano. Oporteat autem hanc per medium cubicæ æquationis à radice plana ad quadraticam deprimere.

Proponitur æquatio emendanda per climacticā parapleroſin.

Quoniam igitur a^4 ✠ b ſol. a æquatur z planoplano; per antitheſin a^4 æquabitur z planoplano — b ſol. a, vtrique parti æquationis addatur $a^2 e^2$ † $\frac{1}{4}$ e^4, & hoc eſt illud ſupplementum, quod climactica parapleroſis importat; ergo a^4 ✠ $a^2 e^2$ † $\frac{1}{4}$ e^4 æquabitur z pl.pl. — b ſol. a ✠ $a^2 e^2$ ✠ $\frac{1}{4}$ e^4. Diuidantur omnia ſubquadraticè; & illic orietur a^2 ✠ $\frac{1}{2}$ e^2, ſi enim a^2 † $\frac{1}{2}$ e^2, ducatur in ſe quadraticè, producetur a^4 † $a^2 e^2$ † $\frac{1}{4}$ e^4. At verò ad a^4, fuerunt addita in ſupplementum, duo illa planoplana $a^2 e^2$, & $\frac{1}{4}$ e^4, quæ alioquin deficiebat à canonica quadrati geneſi inſtituta à duabus radicibus planis. Quod ſi altera æqualitatis pars, nempe z pl.pl. — b ſol. a † $a^2 e^2$ † $\frac{1}{4}$ e^4 ſubquadraticè diuidi poſſet, quotiens emergens æquaretur a^2 † $\frac{1}{2}$ e^2.* Propterea opus eſt effingere quadratum à radice plana, cui altera illa æqualitatis pars commodè poſſit comparari, vt ei denique radici planę æquetur a^2 † $\frac{1}{2}$ e^2. Quod ergo quadratum effingimus eſto abs $\frac{b\,ſol.}{2e}$ — e a, cuius quadratum eſt $\frac{b\,ſol.ſol.}{4e^2}$ † $e^2 a^2$ — b ſol. a ęquandum z pl.pl. — b ſol. a † $e^2 a^2$ † $\frac{1}{4}$ e^4. Deletis porro affectionibus vtrinque, $e^2 a^2$ — b ſol. a, omnibuſque in 4 e^2 ductis, & e^6 † 4 z pl.pl. e^2 æquabitur b ſol.ſol. Innoteſcat autem e^2 eſſe d^2, & $\frac{b\,ſol.}{2d}$ — d a æquabitur a^2 ✠ $\frac{1}{2}$ d^2, & ordinata ęqualitate ſecundùm Artem; a^2 ✠ d a æquabitur $\frac{b\,ſol.}{2d}$ — $\frac{1}{2}$ d^2.

** Si enim quadrata ſunt æqualia, etiam latera æqualia erunt.*

Hucuſque de ęquatione cataphatica; ſi verò extiterit apophatica; vt ſi a^4 — b ſol. a ęquetur z planoplano. Radix plana effingendi quadrati ſtatuetur $\frac{b\,ſol.}{2e}$ ✠ e a comparanda ipſi a^2 ✠ $\frac{1}{2}$ e^2.

Quod in æqualitate negata inuersè conuertendo, & ſub contraria affectionis nota arguendo, contingit.

Cum æquatio fuerit negata inuerſa, &c.

A^4 † bſol. a ęquetur z pl.pl., & $\frac{b\,ſol.}{2e}$ — e a æquetur a^2 † $\frac{1}{2}$ e^2. Oſtendendum eſt e^6 ✠ 4 z pl.pl. e^2 ęquari b ſol. 2. Quoniam enim a^4 ✠ b ſol. a ęquatur z pl. pl., ergo a^4 æquabitur z pl.pl. — b ſol. a; commune addatur $a^2 e^2$ † $\frac{1}{4}$ e^4, & a^4 † $a^2 e^2$ ✠ $\frac{1}{4}$ e^4 æquabitur z pl.pl. — b ſol. a † $a^2 e^2$ ✠ $\frac{1}{4}$ e^4. At quadratum ex a^2 ✠ $\frac{1}{2}$ e^2 eſt a^4 ✠ $a^2 e^2$ ✠ $\frac{1}{4}$ e^4, & quadratum ex $\frac{b\,ſol.}{2e}$ — e a, eſt $\frac{b\,ſol.\,2}{4e^2}$ ✠ $e^2 a^2$ — b ſol. a, eſt verò ex hypotheſi $\frac{b\,ſol.}{2e}$ — e a ęquale a^2 ✠ $\frac{1}{2}$ e^2;* quare $\frac{b\,ſol.}{4e^2}$ ✠ $e^2 a^2$ — b ſol. a ęquabitur z pl.pl. — b ſol. a ✠ $a^2 e^2$ ✠ $\frac{1}{4}$ e^4, & $\frac{b\,ſol.\,2}{4e^2}$ æquabitur z pl.pl. † $\frac{1}{4}$ e^4; quamobrem b ſol. 2 æquabitur 4 z pl.pl. e^2 † e^6.

Demonſtratio ſupradictorum

** Si enim latera etiam quadrata ſunt æqualia; & quę vni æquantur inter ſe æqualia ſunt.*

Si a^4 — b ſol. a æquetur z pl.plano ex hypotheſi, quod $\frac{b\,ſol.}{2e}$ — $\frac{1}{2}$ e^2 ęquetur

tur a^2 — e a, & e^4 ✠ 4 z pl.pl. e^2 æquætur b ſol. a Innoteſcat autem e eſſe d; & a^2 † d a æquabitur $\frac{b\ ſol.}{2\ d}$ — $\frac{1}{2}$ d^2.

Æquatio quadratoquadratica emendanda.

Si b ſol. a — a^4 æquetur z pl.pl. ex hypotheſi, quod $\frac{1}{2}$ e^2 — $\frac{b\ ſol.}{2\ e}$ æquetur e a — a^2, & e^6 — 4 z pl.pl. e^2 æquetur b ſol. a. Innoteſcat e eſſe d, & d a — a^2 æquabitur $\frac{1}{2}$ d^2 — $\frac{b\ ſol.}{2\ d}$.

Ita etiam hoc artificio æqualitatem quadratoquadrati affecti ſub cubo per medium cubicæ radicem habentis planam, ad quadraticam deprimere licet. Vt ſi a^4 ✠ z b a^3 æquetur z planoplano.

Inſuper æqualitas quadratoquadrati affecti tam ſub latere quam quadrato per medium cubicę radicem habentis planam, ad quadraticam deprimitur. Vt ſi a^4 † 2 g pl. a^2 ✠ b ſol. a ęquetur z pl.plano, de quibus conſulendus Vieta; multa enim dicenda hac in re, vt & in cæteris ſupereſſent; ſed opus nimium excreſceret quare breuitati ſtudentes ea cogimur ſilentio prætererie.

De duplicata hypoſtaſi ſuſcipitur tractandum.

Supereſt differendum de methodo, qua æquationes cubicæ deprimuntur ad quadraticas à radice ſolida, vt initio monuimus; diciturque duplicata hypoſtaſis.

Quomodo trāſmutetur cubus affectus ſub latere.

Si itaque hac tranſmutatione cubum affectum ſub latere affirmatè ad quadratum, radicem ſolidam habens, idemque affectum reducere ſit iniunctum, ſic procedendum.

Proponatur a^3 ✠ 3 b pl. a æquari 2 z ſol. ſitque propoſitum facere, quod iniungitur, e^2 ✠ a e æquetur b pl., igitur b pl. ex huiuſmodi conſtitutione intelligendum eſt rectangulum ſubduobus lateribus, quorum minus eſt e, maius autem a. Quoniam verò e^2 ✠ a e ſupponitur æquari b pl. propterea a e æquabitur b plano — e^2, atque adeo $\frac{b\ pl. - e^2}{e}$ equabitur a; propterea [illegible] æquabitur 2 z ſol. Omnibus verò ductis per e^3, & ſecundùm Artem diſpoſitis, e cubiquadratum ✠ 2 z ſol. e^3 ęquabitur b planicubo. Sic autem hęc demonſtrabimus, ſupponamus a^3 ✠ 3 b pl. a ęquari 2 z ſol., & e^2 ✠ a e ęquari b pl. Si autem iniunctum oſtendere e^6 † 2 z ſol. e^3 æquari b plano 3. Quoniam igitur e^2 ✠ a e æquatur b plano, propterea a e æquabitur b pl. — e^2; atque adeo a ęquabitur $\frac{b\ pl. - e^2}{e}$; ergo, & eorum cubi æquales erunt, quare a^3 æquabitur [illegible]; ac proinde a^3 ✠ 3 b pl. a æquabitur [illegible] ✠ [illegible]. Nam [illegible] æquiualet 3 b pl. a, æqualia verò ſi æqualibus addantur, orta ſunt æqulia. Atque adeo 2 z ſol. æquabitur [illegible] ✠ [illegible]. Nam a^3 ✠ 3 b pl. a æquabatur 2 z ſolido. Omnibus ductis in e^3, & 2 z ſol. e^3 æquabitur b pl. 3 — 3 b^2 e^2 ✠ 3 b pl. e^4 — e^6 ✠ 3 b pl. 2 e^2 — 3 b pl. e^4; ac proinde e^6 ✠ 2 z ſol. e^3 æquabitur b pl. 3; eadem enim homogenea affecta ſignis †, & — ſe mutuò interimunt.

Proponitur æquatio cubica.

Quòd ſi a^3 ✠ 3 b pl. a æquetur 2 z ſol. ex hypotheſi, quòd e^2 — a e æquetur b pl., & e^6 — 2 z ſol. e^3 æquabitur b pl. 3.

Præterea ſi a^3 — 3 b pl. a æquetur 2 z ſol. ex hypotheſi, quod a e — e^2 æquetur b pl., cedat autem b pl. 3, cedat inquam z ſol. 2, & 2 z ſol. e^3 — e^6 æquabitur b pl. 3.

Alia æquatio proponitur trāſmutanda hac eodem artificio.

Licet etiam hac eadem tranſmutationis ſpecie illud abſoluere, nimirum cubum affectum ſub latere negatè ad quadratum ſub radice ſolida negatum de plano reducere; ſi tamen cubus è triente coefficientis affectionis cedat ſolidi comparationis ſubquadruploquadrato; quamobrem.

Si a^3 — 3 b pl. a ęquetur 2 z ſol., ſitque perficiendum, quod iniungitur, & a e — e^2 æquetur b pl., tunc enim b pl. iuxta huiuſmodi ęquationis conſtitutionem intelligitur rectangulum ſub duobus lateribus, quorum ſiue maius, ſiue minus eſt e; ſumma verò eſt a; itaque $\frac{b\ pl. + e^2}{e}$ æquabitur a. Nec diſſimili ratiocinatione ab ea, qua ſuperiùs vſi ſumus, concludemus [illegible] — [illegible] æquabitur 2 z ſol. Omnibus verò ductis in e^3, & 2 z ſol. e^3 — e cubiquadrato ęquabitur b planicubo.

De his conſulēdus Vieta. Auctor multa cauſa breuitatis ommittit.

De his conſulendus Vieta, multa quidem ſupereſſent dicenda, ſed ſtudio breuitatis præſtabit ommittere.

Quomodo æquationes præparentur, vt coefficientes, & comparationis homogenea, ſint quæ praſcribuntur.

Non raró expedit ſic æquationes præparare, vt ſubgraduales coefficientes, vel comparationum homogenea ſint, quæ præſcribuntur; propterea iuuabit nonnulla ſubijcere; vnde hæc pragmatia innoteſcat. Propo-

Proponitur exemplum quo coefficiens ſubgradualis debet eſſe, qua præſcribitur.

Proponatur $a^3 + b\,a^2$ æquari z ſol. Oporteat verò æquationem ita tranſmutare, vt affectio ſit ſub eodem gradu parodico, nempe quadrato, eademque retineatur affirmationis nota, coefficiens tamen ſubquadratica varietur ad libitum, eaque ſit d, ſit autem vt b ad d; ita a ad e; ergo $\frac{be}{d}$ æquabitur a, & ſecundùm ea, quæ proponuntur $\frac{b^3e^3}{d^3} + \frac{b^3e^2}{d^2}$ æquabitur z ſol. Omnibus verò ductis in d^3, & applicatis ad b^3, neceſſariò $e^3 + d\,e^2$ æquabitur $\frac{d^3 z\, ſol}{b^3}$; vnde demonſtrandum eſt: Si fuerit $a^3 + b\,a^2 = z$ ſol., & ad arbitrium accepta ſit d pro coefficiente; ſitque vt b ad d, ita a ad e; Oſtendendum eſt inquam $e^3 + d\,e^2$ æquari $\frac{z\,ſol\; d^3}{b^3}$.

Explicatio.

Quoniam igitur eſt vt b ad d, ita a ad e; propterea b e æquabitur d a; ergo $\frac{be}{d}$ æquabitur a; quamobrem & eorum quadrata æqualia erunt; propterea $\frac{b^2e^2}{d^2}$ æquabitur a^2; & eorum cubi æquales erunt; ob id $\frac{b^3e^3}{d^3}$ æquabitur a^3. Quoniam verò a^2 æquabatur $\frac{b^2e^2}{d^2}$; afficiens homogeneum erat b a^2, ducatur b in $\frac{b^2e^2}{d^2}$, vt fiat $\frac{b^3e^2}{d^2}$: erat autem $a^3 + b\,a^2 = z$ ſol., propterea $\frac{b^3e^3}{d^3} + \frac{b^3e^2}{d^2}$ æquabitur z ſol. Omnibus verò ductis in d^3, & $b^3 e^3 + b^3 . d\,e^2$ æquabitur z ſol. d^3. Omnibus autem applicatis ad b^3, & $e^3 + d\,e^2$ æquabitur $\frac{z\,ſol.\,d^3}{b^3}$.

Numeris eadem tractantur.

Numeris autem hæc facilè aptari poſſunt. Supponamus 1 C + 6 Q æquari 896, cuius radix eſt 8. Vt autem eſt 6, numerus quadratorum, ad 12, arbitrarium, ita 8, radicis pretium ad 16, erit propterea 1 C + 12 Q $=$ $\frac{1548288}{216}$, cuius radix eſt 16, numerus quartus proportionalis, in ſuprapoſito analogiſmo.

Exemplum alterum.

Proponatur $a^3 - b^2 a$ ęquari z ſolido. Sitque tranſmutanda æquatio, vt eodem gradu parodico retento, ęademque affectionis nota ſeruata, varietur coefficiens planum ſublaterale, itaut illud ſit d^2; ſit igitur vt b^2 ad d^2, ita a^2 ad e^2; atque adeo vt b ad d, ita a, ad e; ergo $\frac{be}{d}$ æquabitur a.

Quamobrem ſecundùm ea, quæ proponuntur $\frac{b^3e^3}{d^3} - \frac{b^3e}{d}$ æquabitur z ſolido. Omnibus autem ductis in d^3, & per b^3 diuiſis $e^3 - d^2\,e$ æquabitur $\frac{d^3 z\,ſol.}{b^3}$.

Numeris eadem explicantur.

1 C — 4 R æquetur 480, cuius radix eſt 8, vt 2, numeri radicum radix, ad 3, arbitrarium; ita 8, radix propoſitæ æquationis ad 12; propterea 1 C — 9 R æquabitur 1620, cuius radix eſt 12, numerus quartus proportionalis in ſuprapoſito analogiſmo; eſt autem 9, quadratum ex 3; &c.

Cautela obſeruanda.

Cautè procedendum tamen, quia ſæpe accidit ſubductionem fieri non poſſe; vnde Problema determinatione eget.

Exemplum quando comparationis homogeneum debet eſſe quod præſcribitur.

Proponatur $a^3 + b$ pl. a æquari z^3, & oporteat retento eodem gradu parodico, & eadem affectionis nota, comparationis homogeneum variare, itaut illud ſit d^3. Fiat igitur, vt z ad d; ita a ad e. Nam $\frac{ze}{d}$ æquabitur a, quamobrem $\frac{z^3e^3}{d^3} + \frac{b\,pl.\,z\,e}{d}$ æquabitur z^3, omnibus autem in d^3 ductis, & per z^3 diuiſis, & $e^3 + \frac{b\,pl.\,d^2\,e}{z^2}$ æquabitur d^3.

Numeris eadem explicantur.

Si 1 C + 38 R ęquetur 216, cuius radix eſt 4; fiat autem vt 6, latus cubicum numeri 216, ad 12, arbitrarium, ita 4, radix æquationis propoſitæ, ad 8, erit 1 C + $\frac{5472}{36}$ R ſeu 152 R æqualis 1728, cuius æquationis radix eſt 8, quartus proportionalis in ſuprapoſito analogiſmos. De hac autem tranſmutationis ſpecie paulò infra ſermo redibit.

Numeri quo pacto in numeros decimarum tranſmutentur.

Numeros decimarum plerumque nos in æquationibus deſideramus, vt ſcilicet illi, quos in his adhibemus, in decimarum numeros tranſmutentur. Et quia de numeris agitur; liberum eſt ſpeciem adhibere, cui aliæ comparatæ homogeneæ non ſint, propterea quod numeri vel actu, vel potentia homogenei ſunt; cùm vnitas naturæ ſimilitudinem largiatur.

Exemplum.

Proponatur $a^2 + a\,b$ æquari z. Supponamus d ęquari 10, vel 100, &c. Supponamus deinde e ęquari a d: oſtendendum eſt $e^2 + e\,b\,d$ æquari z d^2. Quoniam enim a d æquatur e, ergo $\frac{e}{d}$ ęquabitur a; quare eorum quadrata ęqualia erunt: ob id $\frac{e^2}{d^2}$ æquabitur a^2; ergo $\frac{eb}{d}$ æquabitur a b; propterea $a^2 + a\,b$ æquabitur $\frac{e^2}{d^2} + \frac{eb}{d}$; ergo cùm $a^2 + a\,b$ æquaretur z, ſequitur $\frac{e^2}{d^2} + \frac{eb}{d}$ æquari z, ac ob id omnibus ductis in d^2, & $e^2 + e\,b\,d$ æquabitur z d^2.

Numeris eadem explicantur.

Proponatur 1 Q + 12 R $=$ 64, cuius radix eſt 4. Supponamus 1 A æquari 10 R, & 1 A Q + 120 A ęquabitur 6400. Et ita res ſe habet, nam cùm 1 R valeat 4, propterea 10 R valebunt 40, cùmque 1 A, æquetur 40, vtique 1 A Q æquabitur

bitur 1600, at ſi 1 A æquatur 40, certè 120 A, valebunt 4800, quo addito ad 1600, fit 6400, nempe numerus alter cum quo inſtituitur comparatio.

Nec diſſimiliter. Si $a^3 - a^2 b + a f$, æquetur z. Supponamus e ęquari a d, & concludemus $e^3 - e^2 b d + e f d^2$ æquari $z d^3$.

Et quia Plurimæ ſunt ęquationes, quarum reductio minus benè præceptis continetur, quoniam earum obeſt anomalia, quæ euſque porrigitur quo ſolertis Artificis induſtria; pręcipuas tamen perpendere haud mediocriter prodeſt, quas apud Vietam videndas relinquimus. Vt

Si $a^3 - 2 b^2 a$ ęquetur b^3, & $a^2 - b a$ æquabitur b^2. Inſuper ſi $2 b^2 a - a^3$ æquetur b^3, & $a^2 + b a$ æquabitur b^2, & ita de reliquis, quas cuique apud pręcitatum Auctorem cernere licet.

Inſtituitur ſpeciatim reductio æquationū

Cum autem hìc de æquationum reductione diſſeratur, magnique momenti ſit, pręſertim in Geometricis ęquationes altioris ordinis ad cubicas, in quibus ſecundus terminus deeſt, reuocare; non pigeb it propterea hìc nonnihil immorari, modumque tradere, quo huiuſmodi æquationum reductio perficiatur, præcipuè ad eum, quem explicuit modum ingenioſiſſimus Carteſius; adiectis ijs, quæ nox vberioris, & clarioris quoque doctrinæ ratio poſcere videbatur.

Primùm autem diſſerendum occurrit de multiplici æquationum radice.

In æquatione quacunque tot ſunt radices, quot dimenſiones ſunt poteſtatis.

Illud eſt igitur animaduerſione ſummopere dignum in ęquatione quacunque tot diuerſas radices dari poſſe, quot ipſa dimenſiones habet, quamobrem ſi nos ſupponamus a, ęquari duabus vnitatibus, atque adeo quod idem eſt $a - 2 = 0$, hoc autem multiplicemus per $a - 3 = 0$, productum verò ducamus in $a - 4 = 0$, cum productum ex illa priori multiplicatione ſit $a^2 - 5 a + 6 = 0$, fit vt ſi hoc multiplicetur per $a - 4$, producatur $a^3 - 9 a^2 + 26 a - 24 = 0$, quod ſi multiplicetur per $a - 5 = 0$ producetur quidem $a^4 - 14 a^3 + 71 a^2 - 154 a + 120 = 0$. Et quidem ſi $a^2 - 5 a + 6 = 0$, ducatur in $a - 4$, producetur, vt diximus $a^3 - 9 a^2 + 26 a - 24 = 0$, huius porrò æquationis radices ſunt 2, 3, 4.

Explicatio.

Si verò $a^3 - 9 a^2 + 26 a - 24 = 0$, ducatur in $a - 5$, æquatio fit vt diximus $a^4 - 14 a^3 + 71 a^2 - 154 a + 120 = 0$. Huius verò æquationis radices erunt 2, 3, 4, 5. Prior autem illa æquatio producta $a^2 - 5 a + 6 = 0$, propterea quod duas dimenſiones habet, ob id duplicem radicem ſortitur; quoniam autem iſta $a^3 - 9 a^2 + 26 a - 24 = 0$, tres habet dimenſiones, tres quoque radices obtinet, ita quia $a^4 - 14 a^3 + 71 a^2 - 154 a + 120 = 0$, quatuor obtinet dimenſiones, quatuor etiam radices habet. Itaque æquationis iſtius $a^2 - 5 a + 6 = 0$, duæ erunt radices, nimirum 2, & 3; deinde iſtius $a^3 - 9 a^2 + 26 a - 24 = 0$, tres radices erunt videlicet 2, 3, 4; huius autem $a^4 - 14 a^3 + 71 a^2 - 164 a + 120 = 0$, quatuor hę radices erunt 2, 3, 4, 5.

Explicationis continuatio.

Quod ſi deinde $a^4 - 14 a^3 + 71 a^2 - 154 a + 120 = 0$ nos multiplicemus per $a - 6$, producetur $a^5 - 20 a^4 + 155 a^3 - 580 a^2 + 10440 a - 720 = 0$, cuius ęquationis quinque ſunt radices 2, 3, 4, 5, 6, pro numero ſilicet dimenſionum eiuſdem; Vt autem quę hactenus à nobis dicta ſunt luculentiùs appareant, non erit abs re vnum, vel alterum exemplum numeris explicare. Dicebamus æquationis illius $a^2 - 5 a + 6 = 0$, eſſe quidem radices 2, & 3. Quoniam igitur radix eſt 2, quadratum ipſius erit 4, cui ſi addatur 6, fit 10; at verò ſi radix eſt 2, 5 a, valebunt 10; quamobrem ſi 10, ſubtrahatur a 10, remanebit 0. Item ſi radix eſt 3 eius quadratum erit 9, cui ſi addideris 6, fiet 15; at verò ſi radix eſt 3, 5 a, valebunt 15, quo dempto ex 15, remenet 0. Deinde alterius æquationis $a^3 - 9 a^2 + 26 a - 24 = 0$, dicebamus eſſe tres radices, puta 2, 3, 5.

Si radix eſt 2, eius cubus eſt 8, & 26 a, valebunt 52, quo addito ad 8, fit 60; at verò 9 a^2, valebunt 36, quo ſubtracto ex 60, remanebit 24, à quo ſi ſubduxeris 24, remanebit 0; & ita de duabus alijs radicibus 3, & 4; neque diſſimili modo in reliquis æquationibus periculum fieri poterit ad maiorem veritatis illuſtrationem.

Æquatio Amphibola proponitur.

Et ita hæc æquatio amphibola $40 a - a^2 = 204$, ſeu quod idem eſt $a^2 - 40 a + 204$

$+ 204 = 0$, omniſque conſimilis, duplicem habens radicem, per multiplicationem ſimilem pręcedentibus generatur. Huius porrò æquationis radices ſunt 6, & 34. Si itaque ſupponamus $a - 34$, æquari o, & $a - 6$, itidem æquari o, & inter hæc inſtituatur multiplicatio, producetur $a^2 - 40a + 204 = 0$.

Proponitur æquatio altera, & unde originem trahat inquiritur.

Item ſi ſit æquatio $50a - a^2 = 336$, ſeu quod idem eſt $a^2 - 50a + 336 = 0$, genita erit ex multiplicatione $a - 42$, per $a - 8$, ſunt enim huius æquationis radices 8, & 42. Si igitur ſupponamus $a - 42$, æquari o, quemadmodum $a - 8$, ęquari itidem o, inſtituta multiplicatione, producetur $a^2 - 50a + 336 = 0$. Et ita de alijs conſimilibus huius generis æquationibus intelligendum eſt.

De falſis radicibus diſquiritur.

Non eſt parui facienda falſæ radicis indagatio; propterea quod eius cognitio plurimùm inſeruit ad radices veras inueniendas; ſiquidem falſis radicibus cognitis æquationes, diuiſionis ope, citra difficultatem ad pauciores dimenſiones reuocari poſſunt; ex quibus deinde radices veræ iuxtà Artis præcepta eruuntur. Hæ porrò falſæ radices ſunt nihilo minores; quod eueniet, cùm nos verbi gratia ſupponimus a, deſignare defectum quantitatis alicuius à nihilo; adeò vt inter a, & nihilum æquatio non contingat, niſi a ſibi aliquam quantitatem adſciſcat. Supponamus igitur a, talem eſſe defectum, & vt æquetur o, requirat 4. Si itaque multiplicemus $a^2 - 5a + 6 = 0$, per $a + 4$, producetur $a^3 - 1a^2 - 14a + 24 = 0$. Huius porrò ęquationis, iuxtà numerum dimenſionũ ipſius, erunt quidem tres radices, ex quibus nimirum 2, & 3, hoc eſt duæ ex tribus, veræ erunt, vna autem falſa, videlicet 4; & ità eſt, vt quiſque poterit experiri. Si verò nos ſupponamus $a^2 - 5a + 6 = 0$, hanc verò æquationem ducamus in $a + 5$, producetur $a^3 - 19a + 30 = 0$, & quidem huius æquationis tres erunt radices, nimirum 2, 3, & 5, duæ ſcilicet veræ, vna autem falſa. Veræ autem ſunt 2, & 3, falſa autem 5. Quòd ſi ſit æquatio $a^3 - 9a^2 + 26a - 24 = 0$, & hanc multiplicemus per $a + 5$, fiet æquatio $a^4 - 4a^3 - 19a^2 + 106a - 120 = 0$; huius autem æquationis, vt quatuor eſt dimenſionum, ita quatuor radices exiſtunt, nimirum 2, 3, 4, 5, quarum tres, ſcilicet 2, 3, & 4, veræ ſunt, alia verò, puta 5, falſa eſt; quoniam autem idem de reliquis intelligi poteſt; non erit, cur alia exempla nos afferamus in medium. At verò quoniam æquatio plures radices admittens, per ipſarum multiplicationem conſtituitur; quemadmodum ex hactenus explicatis cuique facilè eſt intelligere; indè fit, vt æquationes huiuſmodi per illas radices diuiſionem ſubeant.

Quomodo æquationum parabolismus inſtituatur.

Si quidpiam enim eſt per aliqua duo inuicem multiplicata conſtitutum; illud idem per alterutrum diuidi poterit; factaque diuiſione neceſſariò alterum emerget; quod enim multiplicatione componitur, diuiſione reſoluitur. Quoniam autem huiuſmodi diuiſio ad æquationis dimenſiones minuendas conducit; præſtabit hac de re ſermonem inſtituere.

Paraboliſmus, ſiue diuiſio ęquationis plures radices continentis per binomium inſtituitur, quod nimirum compoſitum eſt ex incognita quantitate, minus valore, ſeu pretio alicuius ex veris radicibus, quæcunque ſit illa: vel plus valore alicuius ex falſis. Huiuſmodi autem diuiſione dimenſiones eius diminuuntur; atque adeo innoteſcit æquatio ſimplex; vt ad extremum incognita quantitas, cognita euadat. Ad huius autem doctrinæ explicationem, ſupponamus æquationem illam ſuperius allatam, nimirum $a^4 - 4a^3 - 19a^2 + 106a - 120 = 0$; hæc æquatio diuidi poteſt per $a - 2$, per $a - 3$, per $a - 4$, & per $a + 5$. Ita etiam ſi ſit æquatio.

$$\begin{array}{llll} a^3 & - b\,a^2 & + bc\,a & - bcd = 0. \\ & - c & + cd. & \\ & - d & + bd, & \end{array}$$

Explicatio.

Hoc eſt a cubus minus b, minus c, minus d,) in a quadratum plus b in c, plus c in d, plus b in d) in a, minus b in c in d, æqualis o. Diuiſio poterit inſtitui per $a - b = 0$, per $a - c = 0$, per $a - d = 0$. Vides igitur, quo pacto diuiſionem ſubeat æquatio.

Quãdo æquatio diuiſionem non patitur.

At verò ſi ex aduerſo æquatio diuiſionem non patiatur per binomium, conſtans ex quantitate incognita plus, vel minus certa alia quadam quantitate; id planè argumento eſt, quantitatem hanc non eſſe realem alicuius è radicibus æquationis pro-

Poſitæ. Quamobrem ſi foret æquatio vt ſuprà; illa quidem diuidi poſſet per $a - 2$ per $a - 3$, per $a - 4$; atque demum per $a + 5$. At verò nullo modo per a, Plus, vel minus alia quantitate quacunque. Cùm igitur res ſic ſe habeat; inferendum erit huius æquationis non alias eſſe radices præter illas quatuor recenſitas 2, 3, 4, & 5, quarum tres priores 2, 3, & 4, veræ ſunt, poſterior autem 5, nimirum falſa.

Altera æquatio ſuperius poſita diuidi poteſt. Sic etiam, & alia ordinis biquadratici.

Ità quoque æquatio altera ſuperiùs allata diuidi quidem poteſt per $a - b = 0$, per $a - c = 0$, per $a - d = 0$, ſed non per a plus, vel minus aliqua alia quantitate, vnde propterea conſtat huius æquationis radices eſſe tantummodo b, c, d.

Item ſi ſit, æquatio $a^4 - 14 a^3 + 71 a^2 - 154 a + 120 = 0$, quatuor erunt radices veræ, puta 2, 3, 4, 5, & rurſus ſi ſit æquatio $a^5 - 20 a^4 + 155 a^3 - 580 a^2 + 1044 a - 720 = 0$, erunt radices veræ 2, 3, 4, 5, & 6. Itaque ſi $a^3 - 9 a^2 + 26 a - 24 = 0$, multiplicetur per $a - 5 = 0$, fit æquatio $a^4 - 14 a^3 + 7^1 a^2 - 154 a + 120 =$, cuius radices veræ ſunt 2, 3, 4, 5; quod ſi rurſus productum iſtud multiplicetur per $a - 6 = 0$, fiet æquatio huiuſmodi $a^5 - 20 a^4 + 155 a^3 - 580 a^2 + 1044 a - 720 = 0$, cuius radices veræ ſunt 2, 3, 4, 5, & 6, vt dicebamus. Illud autem eſt obſeruandum quod ſi ſuperior; dicta æquatio $a^4 - 4 a^3 - 19 a^2 + 106 a - 120 = 0$, multiplicata fuiſſet per $a - 6 = 0$, proueniſſet æquatio iſta $a^5 - 10 a^4 + 5 a^3 - 220 a^2 - 756 a + 720 = 0$; cuius æquationis radix, non eſſet 6; Si igitur æquatio aliqua, qualis illa, nimirum $a^3 - 9 a^2 + 26 a - 24 = 0$, multiplicetur per quantitatem ignotam plus quantitate aliqua; deinde productum quidem ducatur in quantitatem ignotam minus aliqua alia quantitate; hæc alia quantitas non erit vera illius æquationis radix, quæ per talem multiplicationem producitur.

Superior æquatio cubica rurſus multiplicatur per binomium ex incognita, & cognita quantitate.

Si verò eadem illa ſuperior æquatio

$$a^3 \begin{array}{l} -b \\ -c \\ -d \end{array} a^2 \begin{array}{l} +bc \\ +cd \\ +bd \end{array} a - bcd = 0,$$

multiplicaretur per $a + f = 0$, fieret æquatio

$$a^4 \begin{array}{l} -b \\ -c \\ -d \\ +f \end{array} a^3 \begin{array}{l} +bc \\ +cd \\ +bd \\ -bf \\ -cf \\ -df \end{array} a^2 \begin{array}{l} -bcd \\ +bcf \\ +cdf \\ +bdf \end{array} a - bcdf = 0.$$

Hæc æquatio producta multas ſubit diuiſiones.

Hæc autem æquatio ex ſupradicta multiplicatione producta diuidi poteſt per $a - b = 0$, per $a - c = 0$, per $a - d = 0$, & per $a + f = 0$. At non per a, plus, vel minus aliqua alia quantitate.

Rebus autem ſic ſe habentibus illud perſpicuum eſt, per huiuſmodi diuiſiones ipſas dimenſiones diminui; atque adeò poſtremùm innoteſcere ſimplicem æquationem; vt indè cognoſcatur incognita quantitas. Proindè ſi ſit æquatio huiuſmodi $a^4 - 4 a^3 - 19 a^2 + 106 a - 120 = 0$; eaque diuidatur per $a - 5$, orietur æquatio $a^3, - 9 a^2 + 26 a - 24 = 0$, quæ ſi rurſus diuidatur per $a - 4$, proueniet æquatio $a^2 - 5 a + 6 = 0$, quę ſi rurſus diuidatur per $a - 3 = 0$ fit $a - 2$. Quod enim ſupereſſicit multiplicatio; illud idem reſoluit diuiſio. Huius autem æquationis poſtremæ radices ſunt 2, 3, 4, 5, quatuor nimirum, quia quatuor dimenſiones habet; illa verò $a^3 - 9 a^2 + 2\,b\,a - 24 = 0$, tres dimenſiones habet; propterea tres quoque radices obtinet, nimirum 2, 3, 4; ſicut illius ſuperioris, quatuor erant 2, 3, 4, 5; & quoniam $a^2 - 5 a + 6 = 0$, duas dimenſiones habet, duas quoque continet radices 2, & 3. Diminuuntur itaque dimenſiones, vt ſuprà dictum eſt, beneficio diuiſionis.

$a - 2$

$$
\begin{array}{r}
a - 2 = 0 \\
a - 3 = 0 \\
\hline
- 3a + 6 \\
a^2 - 2a \qquad \\
\hline
a^2 - 5a + 6 = 0 \\
a - 4 \quad\; \\
\hline
- 4a^2 + 20a - 24 \quad\; \\
a^3 - 5a^2 + 6a \qquad\qquad \\
\hline
a^3 - 9a^2 + 26a - 24 = 0 \\
a - 5 \quad\; \\
\hline
- 5a^3 + 45a^2 - 130a + 120 \quad\; \\
a^4 - 9a^3 + 26a^2 - 24a \qquad\qquad \\
\hline
a^4 - 14a^3 + 71a^2 - 154a + 120 = 0 \\
a - 6 \quad\; \\
\hline
- 6a^4 + 84a^3 - 426a^2 + 924a - 720 \quad\; \\
a^5 - 14a^4 + 71a^3 - 154a^2 + 120a \qquad\qquad \\
\hline
a^5 - 20a^4 + 155a^3 - 580a^2 + 1044a - 720 = 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
a - b = 0 \\
a - c = 0 \\
\hline
- ca + bc \\
a^2 - ba \qquad \\
\hline
a^2 - ba - ca + bc = 0 \\
a - d \quad\; \\
\hline
- da^2 + bda + cda - bcd \\
a^3 - ba^2 - ca^2 + bca \qquad\quad \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
a^3 & - b a^2 & + bc a & - bcd = 0 \\
 & - c & + cd & \\
 & - d & + bd & \\
\end{array}
\qquad a + f
$$

$$
\begin{array}{lllll}
a^4 & - b a^3 & + bc a^2 & - bcd a & - bcdf = 0 \\
 & - c & + cd & + bcf & \\
 & - d & + bd & + cdf & \\
 & + f & - bf & + bdf & \\
 & & - cf & & \\
 & & - df & & \\
\end{array}
$$

 Quamo-

Explicatur diuiſio ſuperioris æquationis.

Quamobrem æquatio illa ſuperiùs allata, & quam hic iterum repetimus diuidi poteſt per $a + f$, per $a - d$, per $a - c$, & per $a - b$; Si diuidatur per $a + f$, fiet æquatio trium dimenſionum tantummodo; nimirum

$$\begin{array}{llll} a^3 - b\,a^2 & + bc\,a & - bcd & = 0 \\ - c & + cd & & \\ - d & + bd & & \end{array}$$

Si verò hæc diuidatur per $a - d$ orietur $a^2 - b\,a - c\,a + bc = 0$, quæ quidem æquatio duarum eſt dimenſionum. Hæc porrò ſi rurſus diuidatur per $a - c$, fiet æquatio $a - b = 0$, vel ſi diuidatur per $a - b$, fiet $a - c = 0$. Hoc itaque diuiſionis præſidio æquationes habentes plures, ac plures dimenſiones diminuuntur, efficiunturque poteſtatis depreſſioris, vnà cùm ſuis parodicis gradibus. Et quidem æquatio illa $a^3 - 9a^2 + 26a - 24 = 0$, ſi diuidatur per $a - 4$, reducetur ad illam $a^2 - 5a + 6 = 0$; quæ ſi diuidatur per $a - 3$, reducetur ad hanc $a - 2 = 0$.

Alio æquationis exemplo ſuperiora explicantur.

Ita quoque æquatio illa

$$\begin{array}{lllll} a^4 - b\,a^3 & + bc\,a^2 & - bcd\,a & - bcdf & = 0 \\ - c & + cd & + bcf & & \\ - d & + bd & + cdf & & \\ + f & - bf & + bdf & & \\ & - cf & & & \\ & - df & & & \end{array}$$

quæ, quatuor dimenſiones habet; ſi diuidatur per $a + f = 0$, reuocabitur ad hanc

$$\begin{array}{llll} a^3 - b\,a^2 & + bc\,a & - bcd & = 0 \\ - c & + cd & & \\ - d & + bd & & \end{array}$$

quæ nimirum trium eſt dimenſionum, qua rurſus diuiſa per $a - d = 0$ prodibit

$$\begin{array}{lll} a^2 - b\,a & + bc & = 0 \\ - c & & \end{array}$$

quæ duarum eſt dimenſionum; qua quidem diuiſa poſtremùm per $a - c = 0$, oritur $a - b = 0$.

Quomodo ſe habeant æquationes, quarum plures ſunt radices.

His autem obſeruatis facilè deprehendemus in æquatione habente plures radices, ſecundi termimini quantitatem æqualem eſſe ſummæ omnium radicum; atque etiam quantitatem cognitam tertij termini æquari aggregato productorum ex ſingulis binis, quemadmodum quantitatem cognitam quarti termini æquari aggregato productorum ex ſingulis terminis; atque demum quantitatem vltimi termini æquari producto ex omnibus illis.

Explicantur. Æquationis termini.

Ità quidem perſpicuum eſt in adiuncta æquatione trium dimenſionum, ac proinde habente tres radices, quæ ſuum ortum habuit ex multiplicatione $a - b$, per $a - c$, & eius producti $a^2 - c\,a - b\,a + bc = 0$, per $a - d$; ſunt enim iſtius æquationis, quæ prouenit tres radices, nimirum b, c, d, ex quibus componitur ſecundus æquationis terminus, ſiuè quantitas ſecundi termini; eſt enim hæc, ſcilicet

$$\begin{array}{l} - b; \\ - c \\ - d \end{array}$$

Explicationis continuatio.

Ita etiam quantitas tertij termini æqualis eſt aggregato productorum ex ſingulis binis; eſt enim tertij termini quantitas $+ bc$;

$$\begin{array}{r} a - b = 0 \\ a - c = 0 \\ \hline - c\,a + bc \\ a^2 - b\,a \\ \hline a^2 - c\,a - b\,a + bc = 0 \\ a - d \\ \hline - d\,a^2 + cd\,a + bd\,a - bcd \\ a^3 - c\,a^2 - b\,a^2 + bc\,a \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} a^3 - b\,a^2 & + bc\,a & - bcd & = 0 \\ - c & + cd & & \\ - d & + bd & & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a - 2 = 0 \\ a - 3 = 0 \\ \hline - 3a + 6 \\ a^2 - 2a \\ \hline a^2 - 5a + 6 = 0 \\ a - 4 = 0 \\ \hline - 4a^2 + 20a - 24 = 0 \\ a^3 - 5a^2 + 6a \\ \hline a^3 - 9a^2 + 26a - 24 = 0 \end{array}$$

$+ bc$; conſtat autem hoc eſſe aggregatum productorum ex ſingulis binis radici-
$+ cd$
$+ bd$
bus; At verò quartus terminus, ſeu ipſa quantitas cognita quarti termini eſt b c d d, ac proindè ęqualis aggregato productorum ex ſingulis ternis.

Alio æquationis exempla ſuperiora explicantur.

Ità pariter in æquatione illa $a^3 - 9a^2 + 26a - 24 = 0$; cernere licet huius enim æquationis tres ſunt radices 2, 3, & 4, liquet autem ſecundi termini quantitatem eſſe 9; numerum ęqualem aggregato trium radicum 2, 3. & 4; conſtat præpterea ſi ducatur 2, in 3,, fieri 6, ſi verò 3, in 4, fieri 12, ſi demum 2, in 4, fieri 8, at verò 6, 12, & 8, ſi ſimul addantur fit 26, quantitas tertij termini; quæ proinde fit ex ſingulis binis radicibus. At verò ſi ducatur 2, in 3, fit 6, quo ducto in 4, fit 24, quantitas quarti termini facta quidem ex ſingulis ternis radicibus.

Propterea ſit æquatio $a^3 - 15a^2 + 74a - 120 = 0$, cuius tres ſunt radices 4, 5, 6, quarum ſumma eſt 15, nimirum quantitas ſecundi termini, at verò ſi ducatur 4, in 5. fit 20, & ſi ducatur 5, in 6, ſit 30, ſi demum 4, in 6, fit 24, horum autem ſumma eſt 74, nimirum quantitas tertij termini. Præterea ſi ducatur 4, in 5, fit 20, ſi 20 multiplicetur per 6, fit 120, quantitas nimirùm quatti termini, quæ facta eſt ex ſingulis ternis, vt patet, radicibus.

Proponitur æquatio trium dimenſionũ cuius ſunt tres radices.

Inſuper ſit æquatio $a^3 - 48a^2 + 752a - 3840 = 0$; Huius æquationis tres ſunt radices, 12, 16, & 20. Manifeſtum eſt autem quantitatem, ſecundi termini nimirum 48, eſſe aggregatum trium ſupradictarum radicum; deinde numerum 752, quantitatem ſilicet tertij termini fieri ex ſingulis binis radicibus, vt conſtat; ſi enim ducatur 12, in 16, fit numerus 192, ſi verò 16, ducatur in 20, fit numerus 320, ſi 12, ducatur in 20, fit 240; ex his porrò ſimul additis conſurgit numerus 752; Demum numerus 3840, hoc eſt quantitas quarti termini fit ex ſingulis ternis ſi enim multiplicetur 20, per 12, fit 240, hoc verò productum ſi multiplicetur per 16, fit 3840, vt perſpicuum eſt.

Proponitur æquatio quatuor dimenſionum.

Supponamus iterum $a^4 - 4a^3 - 19a^2 + 106a - 120 = 0$. Huius æquationis radices ſunt 2, 3, 4, & — 5, quę quidem ęquatio ſic ordinari debet, quemadmodum hic cernere licet $a^4 - 19a^2 - 120 = 4a^3 - 106a$.

Quod ſi placet per ſpecies ęquationem exhibere, illud quidem facillimum eſt, erit autem hoc modo

$$a^4 \begin{array}{l} + bc \\ + cd \\ + bd \\ - bf \\ - cf \\ - df \end{array} a^2 - bcdf = \begin{array}{l} + b \\ + c \\ + d \\ - f \end{array} a^3 \begin{array}{l} + bcd \\ - bcf \\ - cdf \\ - bdf \end{array} a$$

. Illius enim æquationis radices videlicet 2, 3, 4, & — 5, deſignatę intelligentur per + b, † c, † d, & — f. Vbi quantitas ignota a, pares habens dimenſiones, vnam conſtituit æquationis partem reliquæ autem aliam.

Concluſio ex ſupradictis.

Concludendum eſt igitur, vt ſupra dicebamus in ęquatione plures radices habente; quantitatem cognitam ſecundi termini, æqualem eſſe ſummæ omnium radicum, & quantitatem cognitam tertij termini, æqualem eſſe ſummæ productorum ex ſingulis binis, & quantitatem cognitam quarti termini eſſe æqualem ſummæ productorum ex ſingulis ternis, at verò quantitatem cognitam vltimi termini, ſiuè vltimum terminum ipſum, æqualem eſſe producto ex omnibus.

Radicum numerus inquiritur.

De numero radicum reliquum eſt, vt verba faciamus. & inquiramus quot veræ, & quot falſæ radices in æquatione ipſa reperiantur. Illud igitur præ oculis diligenter habendum eſt, tot nimirum radices veras in æquatione haberi poſſe quot ſignorum †, & —, variationes contingunt. Tot verò falſas exiſtere qnot vicibus ibidem deprehenduntur duo ſigna +, vel duo ſigna — ſe mutuò conſequentia. Hæc tamen intelligi debent de æquationibus illis, quæ ex ſuis radicibus inter ſe multiplicatis deducuntur; alioquin optimè fieri poterit, vt in æquatione non ſint tot radices, quot incognita quantitas dimenſiones habet, neque tot veræ, quot in æquatione ipſa variationes ſignorum †, & —, contingunt, aut tot falſæ, quot vicibus deprehendere

Explicatur diuiſio ſuperioris æquationis.

Quamobrem æquatio illa ſuperiùs allata, & quam hìc iterum repetimus diuidi poteſt per $a + f$, per $a - d$, per $a - c$, & per $a - b$; Si diuidatur per $a + f$, fiet æquatio trium dimenſionum tantummodo; nimirum

$$\begin{array}{llll} a^3 - b\,a^2 & + bc\,a & - bcd & = 0 \\ - c & + cd & & \\ - d & + bd & & \end{array}$$

Si verò hæc diuidatur per $a - d$ orietur $a^2 - b\,a - c\,a + bc = 0$, quæ quidem æquatio duarum eſt dimenſionum. Hæc porrò ſi rurſus diuidatur per $a - c$, fiet æquatio $a - b = 0$, vel ſi diuidatur per $a - b$, fiet $a - c = 0$. Hoc itaque diuiſionis præſidio æquationes habentes plures, ac plures dimenſiones diminuuntur, efficiunturque poteſtatis depreſſioris, vnà cùm ſuis parodicis gradibus. Et quidem æquatio illa $a^3 - 9\,a^2 + 26\,a - 24 = 0$, ſi diuidatur per $a - 4$, reducetur ad illam $a^2 - 5\,a + 6 = 0$; quæ ſi diuidatur per $a - 3$, reducetur ad hanc $a - 2 = 0$.

Aliæ æquationis exemplo ſuperiora explicantur.

Ita quoque æquatio illa

$$\begin{array}{lllll} a^4 - b\,a^3 & + bc\,a^2 & - bcd\,a & - bcdf & = 0, \\ - c & + cd & + bcf & & \\ - d & + bd & + cdf & & \\ + f & - bf & + bdf & & \\ & - cf & & & \\ & - df & & & \end{array}$$

quæ, quatuor dimenſiones habet; ſi diuidatur per $a + f = 0$, reuocabitur ad hanc quæ nimirum trium eſt dimenſionum,

$$\begin{array}{llll} a^3 - b\,a^2 & + bc\,a & - bcd & = 0 \\ - c & + cd & & \\ - d & + bd & & \end{array}$$

qua rurſus diuiſa per $a - d = 0$ prodibit $\begin{array}{l} a^2 - b\,a \\ - c \end{array} + bc = 0$, quæ duarum eſt dimenſionum; qua quidem diuiſa poſtremùm per $a - c = 0$, oritur $a - b = 0$.

Quomodo ſe habeant æquationes, quando plures ſunt radices.

His autem obſeruatis facilè deprehendemus in æquatione habente plures radices, ſecundi termimini quantitatem æqualem eſſe ſummæ omnium radicum; atque etiam quantitatem cognitam tertij termini æquari aggregato productorum ex ſingulis binis, quemadmodum quantitatem cognitam quarti termini æquari aggregato productorum ex ſingulis terminis; atque demum quantitatem vltimi termini æquari producto ex omnibus illis. Ità quidem perſpicuum eſt in adiuncta æquatione trium dimenſionum, ac proinde habente tres radices, quæ ſuum ortum habuit ex multiplicatione $a - b$, per $a - c$, & eius producti $a^2 - c\,a - b\,a + bc = 0$, per $a - d$; ſunt enim iſtius æquationis, quæ prouenit tres radices, nimirum b, c, d, ex quibus componitur ſecundus æquationis terminus, ſiuè quantitas ſecundi termini; eſt enim hæc, ſcilicet $\begin{array}{l} -b; \\ -c \\ -d \end{array}$

Explicantur. Æquationis termini.

$$\begin{array}{r} a - b = 0 \\ a - c = 0 \\ \hline - c\,a + bc \\ a^2 - b\,a \\ \hline a^2 - c\,a - b\,a + bc = 0 \\ a - d \\ \hline - d\,a^2 + cd\,a + bd\,a - bcd \\ a^3 - c\,a^2 - b\,a^2 + bc\,a \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} a^3 - b\,a^2 & + bc\,a & - bcd & = 0 \\ - c & + cd & & \\ - d & + bd & & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a - 2 = 0 \\ a - 3 = 0 \\ \hline - 3\,a + 6 \\ a^2 - 2\,a \\ \hline a^2 - 5\,a + 6 = 0 \\ a - 4 = 0 \\ \hline - 4\,a^2 + 20\,a - 24 = 0 \\ a^3 - 5\,a^2 + 6\,a \\ \hline a^3 - 9\,a^2 + 26\,a - 24 = 0 \end{array}$$

Explicationis continuatio.

Ita etiam quantitas tertij termini æqualis eſt aggregato productorum ex ſingulis binis; eſt enim tertij termini quantitas $+ bc$;

$$\begin{array}{l} + bc \\ + cd \\ + bd \end{array}$$; conſtat autem hoc eſſe aggregatum productorum ex ſingulis binis radicibus; At verò quartus terminus, ſeu ipſa quantitas cognita quarti termini eſt bcd, ac proindè ęqualis aggregato productorum ex ſingulis ternis.

Alia æquationis exempla ſuperiora explicantur.

Ità pariter in æquatione illa $a^3 - 9a^2 + 26a - 24 = 0$; cernere licet huius enim æquationis tres ſunt radices 2, 3, & 4, liquet autem ſecundi termini quantitatem eſſe 9; numerum ęqualem aggregato trium radicum 2, 3. & 4; conſtat prætereà ſi ducatur 2, in 3,, fieri 6, ſi verò 3, in 4, fieri 12, ſi demum 2, in 4, fieri 8, at verò 6, 12, & 8, ſi ſimul addantur fit 26, quantitas tertij termini; quæ proinde fit ex ſingulis binis radicibus. At verò ſi ducatur 2, in 3, fit 6, quo ducto in 4, fit 24, quantitas quarti termini facta quidem ex ſingulis ternis radicibus.

Propterea ſit æquatio $a^3 - 15a^2 + 74a - 120 = 0$, cuius tres ſunt radices 4, 5, 6, quarum ſumma eſt 15, nimirum quantitas ſecundi termini, at verò ſi ducatur 4, in 5. fit 20, & ſi ducatur 5, in 6, ſit 30, ſi demum 4, in 6, fit 24, horum autem ſumma eſt 74, nimirum quantitas tertij termini. Præterea ſi ducatur 4, in 5, fit 20, ſi 20 multiplicetur per 6, fit 120, quantitas nimirùm quarti termini, quæ facta eſt ex ſingulis ternis, vt patet, radicibus.

Proponitur æquatio trium dimenſionū cuius ſunt tres radices.

Inſuper ſit æquatio $a^3 - 48a^2 + 752a - 3840 = 0$; Huius æquationis tres ſunt radices, 12, 16, & 20. Manifeſtum eſt autem quantitatem, ſecundi termini nimirum 48, eſſe aggregatum trium ſupradictarum radicum; deinde numerum 752, quantitatem ſilicet tertij termini fieri ex ſingulis binis radicibus, vt conſtat; ſi enim ducatur 12, in 16, fit numerus 192, ſi verò 16, ducatur in 20, fit numerus 320, ſi 12, ducatur in 20, fit 240; ex his porrò ſimul additis conſurgit numerus 752; Demum numerus 3840, hoc eſt quantitas quarti termini fit ex ſingulis ternis ſi enim multiplicetur 20, per 12, fit 240, hoc verò productum ſi multiplicetur per 16, fit 3840, vt perſpicuum eſt.

Proponitur æquatio quatuor dimenſionum.

Supponamus iterum $a^4 - 4a^3 - 19a^2 + 106a - 120 = 0$. Huius æquationis radices ſunt 2, 3, 4, & − 5, quę quidem ęquatio ſic ordinari debet, quemadmodum hic cernere licet $a^4 - 19a^2 - 120 = 4a^3 - 106a$.

Quod ſi placet per ſpecies ęquationem exhibere, illud quidem facillimum eſt, erit autem hoc modo

$$a^4 \begin{array}{l} + bc \\ + cd \\ + bd \\ - bf \\ - cf \\ - df \end{array} a^2 - bcdf = \begin{array}{l} + b \\ + c \\ + d \\ - f \end{array} a^3 \begin{array}{l} + bcd \\ - bcf \\ - cdf \\ - bdf \end{array} a.$$

Illius enim æquationis radices videlicet 2, 3, 4, & − 5, deſignatę intelligentur per + b, † c, † d, & − f. Vbi quantitas ignota a, pares habens dimenſiones, vnam conſtituit æquationis partem reliquæ autem aliam.

Concluſio ex ſupradictis.

Concludendum eſt igitur, vt ſupra dicebamus in ęquatione plures radices habente; quantitatem cognitam ſecundi termini, æqualem eſſe ſummæ omnium radicum, & quantitatem cognitam tertij termini, æqualem eſſe ſummæ productorum ex ſingulis binis, & quantitatem cognitam quarti termini eſſe æqualem ſummæ productorum ex ſingulis ternis, at verò quantitatem cognitam vltimi termini, ſiuè vltimum terminum ipſum, æqualem eſſe producto ex omnibus.

Radicum numerus inquiritur.

De numero radicum reliquum eſt, vt verba faciamus. & inquiramus quot veræ, & quot falſæ radices in æquatione ipſa reperiantur. Illud igitur præ oculis diligenter habendum eſt, tot nimirum radices veras in æquatione haberi poſſe quot ſignorum †, & —, variationes contingunt. Tot verò falſas exiſtere qnot vicibus ibidem deprehenduntur duo ſigna +, vel duo ſigna — ſe mutuò conſequentia. Hæc tamen intelligi debent de æquationibus illis, quæ ex ſuis radicibus inter ſe multiplicatis deducuntur; alioquin optimè fieri poterit, vt in æquatione non ſint tot radices, quot incognita quantitas dimenſiones habet, neque tot veræ, quot in æquatione ipſa variationes ſignorum †, & —, contingunt, aut tot falſæ, quot vicibus deprehendere

hendere

[illegible] Superiora iterum conſideranda.

hendere licet duo illa ſigna † vel duo ſigna — ſe inuicem ſequentia. Ita planè ſi hæc impoſſibilis æquatio a^2 — ,4 a † 5 ⊐ o, multiplicetur per a — 2 ⊐ o, producetur æquatio a^3 — 6 a^2 † 13 a — 10 ⊐ o. Hęc certè producta non erit ex multiplicatione trium radicum; quantumuis igitur in ea tres radices veræ concipiantur; nihilominus vna tantùm ex illis realis eſt, nimirum 2, reliquæ autem imaginarię, ſeu tales quarum valor mente comprehendi non poteſt,

Redeamus vndè diſceſſimus. Erat æquatio ſuperiùs allata † a^4 — 4 a^3 — 19 a^2 † 106 a — 120 ⊐ o. Quoniam igitur poſt † a^4, ſequitur — 4 a^3, quæ eſt vna variatio ſigni ✠, in ſignum —, & inſuper poſt — 19 a^2, ſequitur † 106 a quemadmodum poſt † 106 a, ſubſequitur — 120, ac proindè duæ aliæ variationes contingunt ſignorum †, & —; proindè tres eſſe radices admittendas veras in ſupradicta æquatione colligimus; vnam autem eſſe falſam, eo quod duo ſigna — terminorum 4 a^3, & 19 a^2, ſe inuicem ſequuntur.

Superioris æquationis radices.

Sunt porrò ſupradictæ æquationis radices veræ 2, 3, & 4. Si ſupponamus enim radicem eſſe 2, æquatio ſtabit, vt vides a^4 — 4 a^3 — 19 a^2 ✠ 106 a — 120 ⊐ o 16 — 32 — 76 ✠ 212 — 120 ⊐ o.

Si ſupponamus eſſe 3, ſtabit hoc modo a^4 — 4 a^3 — 19 a^2 † 106 a — 120 ⊐ o, 81 — 108 — 171 ✠ 318 — 120 ⊐ o. Si verò ſupponamus eſſe 4, ſtabit hoc pacto a^4 — 4 a^3 — 19 a^2 † 106 a — 120 ⊐ o. 256 — 256 — 304 † 424 — 120 ⊐ o.

Ex ijs, quæ ſupra.

Vna verò radix erit falſa puta 5. Quæ autem hactenus diximus intelligenda ſunt tam de æquationibus in quibus nullus terminus deeſt, ſed completæ ſunt; quàm de illis, quæ incompletę dici poſſunt, eo quod in ipſis aliquis terminus deſideretur. Supponamus itaq; c † R — N ⊐ o, intelligi debet in hac æquatione eſſe Q, vel affectum ſigno †, vel ſigno —, ſi fuerit affectum ſigno †, erunt duæ falſæ radices, & vna vera; ſi autem affectum fuerit ſigno —, erunt tres radices veræ.

Earundem verum conſideratio.

In prima æquatione quoniam c, & Q, ſupponuntur affici ſigno †, proindè erit radix vna falſa. Quia verò Q & R, ſupponuntur eodem affici ſigno, erit alia radix falſa; Hoc autem conſtat ex pręceptis hac de re ſupra traditis. Quia demùm R, & N, ſupponuntur affici diuerſimodè, nempè R, ſigno †, & N ſigno —, proindè erit radix vna vera. Si verò Q afficiatur ſigno —, quoniam c, affectus ſupponitur ſigno † at Q ſigno — proindè erit radix vna vera.

Quia verò Q, & R, afficiuntur; illud quidem ſigno —, hæc autem ſigno †, erit altera radix vera. Quia demum R, affici ſupponitur ſigno †, & N, ſigno — proindè erit tertia radix vera; quamobrem in hac ſuppoſita æquatione tres radices verę erunt.

Proponitur æquatio cubici ordinis.

** Perinde eſt ſiue ſigno ✤ ſiue ſigno — intelligatur affici.*

Supponamus e^3 æquari c — b e, ſeù vt alij faciunt e^3 ⊐ — b e † c. Oportet autem æquationem hunc in modum concipere e^3 ⁓ o e^2 ✠ b e — c ⊐ o. At verò ſupponamus primo o e^2, affici ſigno ✤,* & erit e^3 ✤ o e^2 ✤ b e — c ⊐ o, & ità propter terminos † e^3, & o e^2, eodem ſigno affectos, erit vna radix falſa; & ità ob terminos ✤ o e^2, & † b e, eodem affectos ſigno vna erit falſa radix. Demum propter terminos † b e, & — c, diuerſis notis affectos, vna erit radix vera. Si verò nos ſupponàm o e^2, ſecundum terminum affectum eſſe ſigno —, erit propter terminos ✠ e^3, & — o e^2, varijs ſignis affectos, erit inquam radix vna vera; & propter terminos — o e^2, & ✤ b e, qui varijs ſignis afficiuntur, erit etiam alia radix vera. Poſtremo, propter † b e, & — c, erit alia vera.

Quoniam autem ſupponendo ſecundum terminum affectum ſigno alterutro ✤, aut —, certi ſumus nihil in propoſita æquatione mutari poſſe. Vt cognoſcamus multiplicationem, qua propoſita æquatio producta fuit oportet earum radices inter ſe conferre.

Quomodo ſe habeant radices veræ, & falſæ in æquatione.

Supponamus o e^2, terminum eſſe affectum ſigno ✤, & erunt duæ radices falſæ vna autem vera. Supponamus deinde terminum illum eſſe affectum ſigno — radices tres veræ erunt. Quare in illa falſa, ſumpta verę iſtius reſpondet: quemadmodum iterum accepta falſa verę reſpondet; vera demum veræ conſentit. Inde fit vt hęc ęquatio vnicam radicem habeat veram, atque realem, quæquidem poſſit explicari. Alias autem radices immaginarias eſſe: ac proindè æquationem producentam originem non ducere à multiplicatione trium radicum, vt ſuprà de alijs dictum fuit;

fuit; ſed potiùs per multiplicationem alicuius æquationis impoſſibilis.

Prima æquatio dicatur illa, in qua o e^3 afficitur nota †; deinde altera intelligatur eſſe, in qua o e^3 afficitur nota —, Hæc autem, quæ dicta ſunt locum etiam habent in radicibus falſis.

Ità pariter ſupponamus $e^3 =$ * — b e — c, vel e^3 ⌒; o e^3 † b e † c = o. Priori facta ſuppoſitione tres erunt radices falſę: facta autem ſecunda, erit vna falſa, & duę veræ. Quamobrem concludendum erit, æquationem hanc vnam tantùm radicem admittere, nempe falſam, duas reliquas eſſe imaginarias, ac ob id æquationem procreari non poſſe multiplicatione trium radicum.

Altera æquatio cubica proponitur. ⌒, Significat plus vel minus.

Eodem pacto ſi fuerit ęquatio $e^3 =$ * ✠ b c ✣ c; ſeu quod idem eſt e^3 ⌒; o e^3 — b c — c = o.

Cɒnſtat æquationem propoſitam oriri ex multiplicatione trium radicum; quarum duę ſint falſæ, vna autem vera; propterea quod è priori illa hypotheſi duæ inueniuntur radices falſę, & vna vera: è ſecunda itidem duæ falſæ, & vna vera.

Vnde æquatio propoſita ſuũ ortum ducat.

Si ſit $e^3 =$ * † b e — c, ſeù e^3 ⌒; o e^3 — b e † c = o. In priori ſuppoſitione duę ſunt verę radices, cum vna falſa, & in poſteriori ſimiliter duæ veræ, & vna falſa, itaut huiuſmodi æquatio procreari poſſit è multiplicatione trium radicum, quarum duę ſint verę, & vna falſa.

Fit autem iſtarum radicum metamorphoſis; adeò vt in vna, & eadem æquatione radices omnes, quæ falſæ ſunt euadant verę. Nec artificio diſſimili quæ veræ erant, euadant falſæ. Id autem fit mutando ſigna omnia ✣, & —, quę nimirum in ſecundo, quarto, & ſexto loco; & alijs quoque locis deſignatis per numeros pares reperiuntur: Non mutatis reliquis primi, & tertij, & quinti loci, aliorumque per impares numeros deſignatorum. Quamobrem ſi nos ſupponamus ęquationem eſſe, vt ſupra † a^4 — 4 a^3 — 19 a^2 ✠ 106 — 120 = o, quę quidem æquatio tres radices habet veras, nimirùm 2, 3, & 4, atque vnam falſam, nempè 5, vt ſuperiùs dictum fuit. Mutatis ſignis vt hic, fit æquatio huiuſmodi † a^4 ✣ 4 a^3 — 19 a^2 — 106 a — 120 = o, vnicam radicem veram habens; puta 5, quæ in ſuperiori æquatione falſa erat; reliquę autem, nimirum 2, 3, 4, quę verę erant, falſæ euadunt. At verò illius æquationis, nimirùm † a^4 — 4 a^3 — 19 a^2 ✣ 106 a — 120 = o tres eſſe radices veras, ſcilicet 2, 3, & 4, liquidò conſtat, vt hic cernere licet ✣ a^4 — 4 a^3 — 19 a^2 † 106 a — 120 = 0

Metamorphoſis radicum, qua Arte perficiatur.

† 16 — 32 — 76 † 212 — 120 = 0
† 81 — 108 — 171 † 318 — 120 = 0
† 256 — 256 — 304 † 424 — 120 = o.

Conſtat autem æquationem hanc produci ex illis tribus radicibus veris, & altera falſa, vt manifeſtè conſtat ex adiuncto paradigmate.

Quemadmodum etiam perſpicuum eſt, æquationem hanc † a^4 † 4 a^3 — 19 a^2 — 106 a — 120 = o produci ex radice vna vera, nimirum 5, & tribus falſis 2, 3, & 4, mulriplicatis ad inuicem, hoc eſt quemadmodum ſuperior æquatio producebatur ex quatuor radicibus inter ſe multiplicatis, quarum tres ſunt verę; puta 2, 3, & 4, altera autem falſa, nimirùm 5. Ità etiam & hæc producitur ex quatuor radicibus, multiplicatis ad inui-

a — 2
a — 3
————
— 3 a ✣ 6
a^2 — 2 a
————
a^2 — 5 a ✣ 6
a — 4
————
— 4 a^2 ✣ 20 a — 24
a^3 — 5 a^2 ✣ 6 a
————
a^3 — 9 a^2 ✠ 26 a — 24
a ✠ 5
————
5 a^3 — 45 a^2 ✣ 130 a — 120
a^4 — 9 a^3 ✠ 26 a^2 — 24 a
————
a^4 — 4 a^3 — 19 a^2 ✣ 106 a — 120 = 0

Superior æquatio producitur ex illis tribus radicibus veris, & altera falſa.

cem

cem, quarum vna eſt vera, videlicet 5.

Quæ traduntur nedum locum habent in æquationibus completis, ſed etiam in incompletis.

Aliæ autem tres ſunt falſæ; puta 2, 3, & 4, quæ in ſuperiori æquatione veræ erant.

Hæc porrò nedum locum habent in æquationibus completis; ſed etiam in incompletis, in quibus nimirùm aliquis terminus, deeſt, atque deſideratur exijs, qui in imparibus locis exiſtunt. Quamobrem ſi fuerit æquatio $a^3 = * - 8a - 24$. Seù quod idem eſt a^3 ⌒;o $a^2 \dagger 8a \dagger 24 = 0$. Mutando ſigna †, & — ſecundi, & quarti loci in contraria, fiet æquatio a^3 ⌒;o $a^2 \dagger 8a - 24 = 0$. Siue $a^3 = * - 8a \dagger 24$. Illius autem ęquationis radix eſt $a = -2$, iſtius verò eſt $a = 2$. Et quidem res ita ſe habet; propterea quòd ſi nos ſupponamus $a^3 = * - 8a - 24$, certè huius ęquationis radix erit -2. Si verò ſupponamus eſſe $a^3 = * - 8a + 24$, huius æquationis radix erit 2.

$$
\begin{array}{r}
a - 5 \\
a + 2 \\
\hline
+ 2a - 10 \\
a^2 - 5a \\
\hline
a^2 - 3a - 10 \\
a + 3 \\
\hline
3a^2 - 9a - 30. \\
a^3 - 3a^2 - 10a \\
\hline
a^3 - 19a - 30 = 0 \\
a + 4 = 0 \\
\hline
4a^3 - 76a - 120 \\
a^4 - 19a^2 - 30a \\
\hline
a^4 \dagger 4a^3 - 19a^2 - 106a - 120 = 0
\end{array}
$$

Proponitur alia æquatio.

Præterea ſit æquatio $a^3 = * - 10a - 276$. Seù quod idem eſt a^3 ⌒;o $a^2 \dagger 10a \dagger 276 = 0$, mutando ſigna †, & —, ſecundi, & quarti loci in ſua contraria. Fiet æquatio a^3 ⌒;o $a^2 \dagger 10a - 276 = 0$; ſeu $a^3 = * - 10a \dagger 276$. Iſtius autem radix eſt $a = 6$; illius verò $a = -6$. Et ita eſt; namque cubus ex 6 eſt 216, at verò ſi a, valet 6, vtique 10 a, valebunt 60, quare cùm afficiantur ſigno —; eſt enim ęquatio $a^3 = * - 10a \dagger 276$; proindè erit $216 \dagger 60 = 276$. Idem eſt enim dicere $a^3 = * - 10a \dagger 276$, ac dicere $a^3 \dagger 10a = 276$. Huic porrò reſpondet illa $216 \dagger 60 = 276$.

Explicationis continuatio.

At verò ſi præſupponamus cubum ex -6, is erit -216; modò ſi 10, numerum radicum nos multiplicemus per -6, radicis valorem, fiet productum -60, quo addito ipſi numero -216, fiet aggregatum -276, à quo ſi demantur -60, fit reſiduum -216. Si enim eſt æquatio, vt ſupra $a^3 = * - 10a - 276$, & conſideremus valorem, ſiue pretium terminorum, ſuppoſita radice -6, comperiemus rem ſe habere, quemadmodum dicebamus.

Incognitæ radices poſſunt aliqua nota quantitate augeri, & minui

Radices incognitas æquationis propoſitæ poſſumus cognita quantitate aliqua augere, vel minuere, idque etiam ſuperiùs explicare tentauimus. Perficitur verò; ſi in locum incogniti termini alter ſubſtituatur, qui quidem hac eadem quantitate maior ſit, vel minor, & is loco primi vbique ſubrogetur. Quamobrem ſi foret æquatio iſta $a^4 - 8a^3 - 31a^2 \dagger 298a - 840 = 0$, quæ tres radices habet veras, videlicet 4, 5, & 6, falſam verò vnam, nempè 7. Si fiat ſignorum tranſmutatio; tres illæ radices euadent falſæ, vna autem vera erit, nimirum 7; reuocabitur igitur ad hanc $\dagger a^4 \dagger 8a^3 - 31a^2 - 398a - 840 = 0$. Huius æquationis radix vera eſt 7. Oporteat autem radicem prædictam incognitam tamen, denotatam per a, oporteat inquam augere numero quinario. Subſtituatur e, loco ipſius a, intelligere autem oportet quantitatem hanc deſignatam per e, quinario excedere quantitatem denotatam per a, proinde $e - 5$, æquabitur a, erit itaque illa quantitas hæc, nimirum $e - 5$, atque tractanda eſt quemadmodum tractabatur a.

a — 4

$$
\begin{array}{r}
a - 4 = 0 \\
a - 5 = 0 \\
\hline
-5a + 20 \\
a^2 - 4a \qquad \\
\hline
a^2 - 9a + 20 = 0 \\
a - 6 \\
\hline
-6a^2 + 54a - 120 \\
a^3 - 9a^2 + 20a \qquad \\
\hline
a^3 - 15a^2 + 74a - 120 = 0 \\
a + 7 \\
\hline
7a^3 - 105a^2 + 518a - 840 \\
a^4 - 15a^3 + 74a^2 - 120a \qquad \\
\hline
a^4 - 8a^3 - 31a^2 + 398a - 840 = 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
c - 5 \\
c - 5 \\
\hline
-5c + 25 \\
c^2 - 5c \qquad \\
\hline
c^2 - 10c + 25 \\
c - 5 \\
\hline
-5c^2 + 50c - 125 \\
c^3 - 10c^2 + 25c \qquad \\
\hline
c^3 - 15c^2 + 75c - 125 \\
c - 5 \\
\hline
-5c^3 + 75c^2 - 375c + 625 \\
c^4 - 15c^3 + 75c^2 - 125c \qquad \\
\hline
c^4 - 20c^3 + 150c^2 - 500c + 625
\end{array}
$$

Quemadmodum loco ipſius a, ſuſtituitur $c - 5$, ita loco a^2, ſuſtitui debet $c^2 - 10c + 25$, ſic etiam loco a^3, debet ſuſtitui $c^3 - 15c^2 + 75c - 125$, atque demum loco ipſius a^4 opotertet ſuſtituere $c^4 - 20c^3 + 150c^2 - 500c + 625$ &c.

$$
\begin{array}{r}
c^4 - 20c^3 + 150c^2 - 500c + 625 \\
+ 8c^3 - 120c^2 + 600c - 1000 \\
- 31c^2 + 310c - 775 \\
- 398c + 1990 \\
- 840 \\
\hline
c^4 - 12c^3 - 1c^2 + 12c \; * = 0
\end{array}
$$

 Huius

Huius autem æquationis radix eſt 12, cum prius eſſet 7, euaſit verò 12, ob additionem numeri quinarij. Cæterum radicem eſſe 12 perſpicuum eſt, quandoquidem quadratoquadratum ex 12, eſt 20736, huic ſi addas 144, valorem duodecim radicum fiet ſumma 20880, à qua ſi dempſeris 20736, pretium duodecim cuborum, fiet reſiduum 144, à quo ſi ſubtraxeris 144, pretium vnius quadrati, nihil remanet.

Quæ de augenda radice dicta ſunt de diminuenda intelligi quoque debent.

Quæ de augenda radice diximus, de diminuenda quoque poſſunt intelligi. Quamobrem ſi radicem eiuſdem æquationis diminuere vellemus eodem numero quinario hunc in modum procedendum eſſet. Fiat $e + 5 = a$.

Cum autem ſuperior æquatio eſſet huiuſmodi $a^4 + 8a^3 - 31a^2 - 398a - 840 = 0$, Oportet loco a^4; ſubrogare $e^4 + 20e^3 + 150e^2 + 500e + 625$. Vlteris procedendo oportet loco $8a^3$, ſuſtituere $8e^3 + 120e^2 + 600e + 1000$, nempe $e^3 + 15e^2 + 75e + 125$, ductum in $+8$. Deinde loco $31a^2$, ſuſtitui debet $31e^2 + 310e - 775$, nempè $e^2 + 10e + 25$, ductum in -31. Poſteà loco $398a$, ſubrogari debet $398e + 1990$, nimirum $e + 5$, ductum in -398; facta autem ſuſtitutione, vt vides fiet, vt infrà,

$$
\begin{array}{r}
e + 5 \\
e + 5 \\
\hline
5e + 25 \\
e^2 + 5e \\
\hline
e^2 + 10e + 25 \\
e + 5 \\
\hline
5e^2 + 50e + 125 \\
e^3 + 10e^2 + 25e \\
\hline
e^3 + 15e^2 + 75e + 125 \\
e + 5 \\
\hline
5e^3 + 75e^2 + 375e + 625 \\
e^4 + 15e^3 + 75e^2 + 125e \\
\hline
e^4 + 20e^3 + 150e^2 + 500e + 625 = 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
e^4 + 20e^3 + 150e^2 + 500e + 625 \\
8e^3 + 120e^2 + 600e + 1000 \\
- 31e^2 - 310e - 775 \\
- 398e - 1990 \\
- 840 \\
\hline
e^4 + 28e^3 + 239e^2 + 392e - 1980 = 0
\end{array}
$$

Huius autem æquationis radix eſt 2, vt quilibet poterit experiri.

Æquatio ſuperior unde collecta eſt.

Cæterùm æquatio iſta collecta eſt ope multiplicationis, & quatuor habet radices veras; nempe 2, 4, 6, & 10, loquor de æquatione hac; nimirum $a^4 - 22a^3 + 164a^2 - 488a + 480 = 0$, hęc enim colligitur ſi multiplicetur $a - 2$ per $a - 4$, deinde productum $a^2 - 6a + 8$, multiplicetur per $a - 6$, poſtea productum $a^3 - 12a^2 + 44a - 48$, multiplicetur per $a - 10$, ex his enim multiplicationibus oritur æquatio illa $a^4 - 22a^3 + 164a^2 - 488a + 480 = 0$. Rurſus ſi multiplicetur $a + 2 = 0$, per $a + 3$, fit $a^2 + 5a + 6$, quod ſi multiplicetur per $a - 4$, fit productum $a^3 + 1a^2 - 14a - 24 = 0$, quod ſi multiplicetur per $a + 6$, producetur hoc nimirum $a^4 + 7a^3 - 8a^2 - 108a - 144 = 0$.

Hæc autem æquatio tres habet radices falſas puta 2, 3, & 6, vnam autem veram nimirum 4 quam poſſumus arte ſuperiùs explicata numero quocumque augere.

a — 2

$$\begin{array}{r}
a - 2 = 0 \\
a - 4 = 0 \\
\hline
-4a + 8 \\
a^2 - 2a \\
\hline
a^2 - 6a + 8 = 0 \\
a - 6 \\
\hline
-6a^2 + 36a - 48 \\
a^3 - 6a^2 + 8a \\
\hline
a^3 - 12a^2 + 44a - 48 = 0 \\
a - 10 \\
\hline
-10a^3 + 120a^2 - 440a + 480 \\
a^4 - 12a^3 + 44a^2 - 48a \\
\hline
a^4 - 22a^3 + 164a^2 - 488a + 480 = 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
a + 2 = 0 \\
a + 3 = 0 \\
\hline
3a + 6 \\
a^2 + 2a \\
\hline
a^2 + 5a + 6 \\
a - 4 \\
\hline
-4a^2 - 20a - 24 \\
a^3 + 5a^2 + 6a \\
\hline
a^3 + 1a^2 - 14a - 24 = 0 \\
a + 6 \\
\hline
6a^3 + 6a^2 - 84a - 144 \\
a^4 + 1a^3 - 14a^2 - 24a \\
\hline
a^4 + 7a^3 - 8a^2 - 108a - 144 = 0
\end{array}$$

Illud autem ſilentio prætereundum non eſt ſcilicet falſas radices alicuius ęquationis quantitate diminui, ea nimirùm, qua radices veræ eiuſdem æquationis augentur: & contrà falſas augeri eà quantitate, qua veræ diminuuntur. Inſuper tam veras, quàm falſas prorſus euaneſcere ſi quantitate ipſis æquali diminuantur. Quod ſi prędicta quantitas illas ſuperauerit exueris falſæ, vt ex falſis veræ euadent.

Falſæ radices alicuius æquationis quantitate diminuũtur, qua radices veræ eiuſdem augentur

Supponamus æquationem eſſe $a^4 - 5a^3 - 52a^2$ † $356a - 480 = 0$, quæ quidem æquatio tres habet radices veras, nempè 2, 5, & 6, vnam autem falſam nimirùm 8. Factà verò permutatione ſignorum erit æquatio $a^4 + 5a^3 - 52a^2 - 356a - 480 = 0$. Huius autem ęquationis radix vera eſt 8, cum alię 2, 3, & 4, ſint falſæ.

Digitized by Google

Exempli explicatio

Hanc autem ſi binario numero nos augere velimus; ſumi debet e, loco ipſius a, atque debemus intelligere, quantitatem a, exceſſu 2, ſuperari ab e, adeo vt $e - 2$ æquetur a. Suſtituatur itaque $e - 2$, loco ipſius a, quemadmodum loco a^2 ſubrogetur $e^2 - 4e + 4$, quod eſt quadratum ex $e - 2$; deinde loco a^3 ſuſtituatur $e^3 - 6e^2 + 12e - 8$, cubus nimirùm ex $e - 2$; demum loco ipſius a^4 ſuſtituatur $e^4 - 8e^3 + 24e^2 - 32e + 16$

$$
\begin{array}{r}
e^4 - 8e^3 + 24e^2 - 32e + 16 \\
5e^3 - 30e^2 + 60e - 40 \\
- 52e^2 + 208e - 208 \\
- 356e + 712 \\
- 480 \\
\hline
e^4 - 3e^3 - 58e^2 - 120e\ * = 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
e - 2 \\
e - 2 \\
\hline
- 2e + 4 \\
e^2 - 2e \\
\hline
e^2 - 4e + 4 \\
e - 2 \\
\hline
- 2e^2 + 8e - 8 \\
e^3 - 4e^2 + 4e \\
\hline
e^3 - 6e^2 + 12e - 8 \\
e - 2 \\
\hline
- 2e^3 + 12e^2 - 24e + 16 \\
e^4 - 6e^3 + 12e^2 - 8e \\
\hline
e^4 - 8e^3 + 24e^2 - 32e + 16
\end{array}
$$

Explicationis continuatio

Huius æquationis radix eſt 10; & ità aucta eſt numero binario radix illa 8; eodemque binario numero diminuuntur radices illę falſæ 2, 5, 6; adeò vt 2, euaneſcat, & fiat 0, & 5, euadat 3; & 6, euadat 4. Dum igitur augetur binario radix vera: binario quoque diminuitur quęlibet ex falſis; ac proindè radix vera huius æquationis erit 10; falſæ autem erunt 3, & 4.

$$
\begin{array}{r}
e - 10 \\
e + 3 \\
\hline
3e - 30 \\
e^2 - 10e \\
\hline
e^2 - 7e - 30 \\
e + 4 \\
\hline
4e^2 - 28e - 120 \\
e^3 - 7e^2 - 30e \\
\hline
e^3 - 3e^2 - 58e - 120 \\
e + 0 \\
\hline
e^4 - 3e^3 - 58e^2 - 120e\ * = 0
\end{array}
$$

Idque euidenter colligitur ex adiuncto paradigmate. Opere enim multiplicationis cognoſcimus radices illas 3, 4, 0, falſas eſſe; vnàm autem veram, nimirùm 10. Quod de additione diximus; nempè dum vera radix augetur, falſas diminui: illud etiam de diminutione intelligendum eſt; adeò vt dum vera diminuitur; falſæ augeantur. Quamobrem æquatio illa $e^4 + 28e^3 + 239e^2 + 392e - 1980 = 0$, radicem habet veram 2; dumque fuit 7 radix illius æquationis $a^4 + 8a^3 - 31a^2 - 398a - 840 = 0$; diminuta numero quinario, habita eſt radix 2, pro $e^4 + 28e^3 + 239e^2 + 392e - 1980 = 0$; & interim eiuſdem æquationis $a^4 + 8a^3 - 31a^2 - 398a - 840 = 0$, radices falſæ, quales ſunt 4, 5, 6, augentur eodem quinario; adeò vt ſint 9, 10, 11, huius æquationis $e^4 + 28e^3 + 239e^2 + 392e - 1980 = 0$, radices falſæ idque cernere licet in adiuncto paradigmate.

$$e - 2 = 0$$
$$e + 9$$
$$9e - 18$$
$$e^2 - 2e$$
$$e^2 + 7e - 18$$
$$e + 10$$
$$10e^2 + 70e - 180$$
$$e^3 + 7e^2 - 18e$$
$$e^3 + 17e^2 + 52e - 180$$
$$e + 11$$
$$11e^2 + 187e^2 + 572e - 1980$$
$$e^4 + 17e^3 + 52e^2 - 180e$$
$$e^4 + 28e^3 + 239e^2 + 392e - 1980 = 0$$

Ita quoque ſi huius æquationis, puta $+ a^4 - 4a^3 - 19a^2 + 106a - 120 = 0$, ſigna mutentur; fit æquatio $+ a^4 + 4a^3 - 19a^2 - 106a - 120 = 0$. In hac autem vna tantum eſt radix, & quidem vera nimirum 5, falſæ verò ſunt 2, 3, & 4, Si veram radicem 5, ternario diminuamus, faciendo $e + 3 = a$, & $e^2 + 6e + 9 = a^2$, ſuſtituendo hanc loco illius æquationis $a^4 + 4a^3 - 19a^2 - 106a - 120 = 0$, ſuſtituendo inquam hanc, quæ colligitur, vt patet ex adiuncto paradigmate.

Perpenditur æquatio propoſita.

$$e^4 + 12e^3 + 54e^2 + 108e + 81$$
$$+ 4a^3 + 36e^2 + 108e + 108$$
$$- 19e^2 - 114e - 171$$
$$- 106e - 318$$
$$- 120$$
$$e^4 + 16e^3 + 71e^2 - 4e - 420 = 0$$

Et huius æquationis radix vera erit 2. Dum autem ternario illa radix vera 5 diminuta fuit; interim falſæ 2, 3, & 4, ſunt eodem ternario auctæ; adeò vt huius æquationis falſæ radices ſint 5, 6, & 7, vt patet ex adiuncto paradigmate.

Explicatio ſu. prædictorum

$$e - 2 = 0$$
$$e + 5$$
$$5e - 10$$
$$e^2 - 2e$$
$$e^2 + 3e - 10$$
$$e + 6$$
$$6e^2 + 18e - 60$$
$$e^3 + 3e^2 - 10e$$
$$e^3 + 9e^2 + 8e - 60$$
$$e + 7$$
$$7e^3 + 63e^2 + 56e - 420$$
$$e^4 + 9e^3 + 8e^2 - 60e$$
$$e^4 + 16e^3 + 71e^2 - 4e - 420 = 0$$

Modus

Modus mutā-di valorem radicum ad quid conducat.

Modus iam explicatus mutandi valorem radicum ipſis non cognitis nobis ſuppeditabit viam per quam incedere debeamus ad tollendum de medio ſecundum terminum æquationis propoſitæ. Si igitur ſit æquatio $e^4 + 28\,e^3 + 239\,e^2 + 392\,e - 1980 = 0$. Oporteat huius æquationis ſecundum terminum de medio tollere. Iſtius æquationis vera radix eſt 2. Diuidantur 28 per 4, propter quatuor dimenſiones termini e^4, fit quotiens 7, fiat proinde $u - 7 = e$, & procedatur, vt infrà; reperietur enim vera radix 9, cum vera iam eſſet 2. Debent igitur diminui veræ radices, quantitate cognita ſecundi termini, diuiſa per numerum dimenſionum primi; ſi vnus ex hiſce duobus terminis affectus ſit ſigno + alter autem ſigno —. Vel etiam augendo illam quantitate eadem, ſi nimirùm vterque terminus eodem ſigno affectus extiterit.

$$
\begin{array}{rrrrrl}
 & & & & u - 7 & \text{R} \\
 & & & & u - 7 & \\
\hline
 & & & -7 & u + 49 & \\
 & & & u^2 - 7 & u & \\
\hline
 & & & u^2 - 14 & u + 49 & \text{Q} \\
 & & & & u - 7 & \\
\hline
 & & -7 & u^2 + 98 & u - 343 & \\
 & & u^3 - 14 & u^2 + 49 & u & \\
\hline
 & & u^3 - 21 & u^2 + 147 & u - 343 & \text{C} \\
 & & & & u - 7 & \\
\hline
 & -7 & u^3 + 147 & u^2 - 1029 & u + 2401 & \\
 & u^4 - 21 & u^3 + 147 & u^2 - 343 & u & \\
\hline
 & u^4 - 28 & u^3 + 294 & u^2 - 1372 & u + 2401 & \text{QQ}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrrr}
u^4 - 28\,u^3 & + 294\,u^2 & - 1372\,u & + 2401 \\
28\,u^3 & - 588\,u^2 & + 4116\,u & - 9604 \\
 & 239\,u^2 & - 3346\,u & + 11711 \\
 & & 392\,u & - 2744 \\
 & & & - 1980 \\
\hline
u^4 * & - 55\,u^2 & - 210\,u & - 216 = 0
\end{array}
$$

Huius autem æquationis radix eſt 9. Erat enim vera illius æquationis radix 2, & aucta eſt uumero 7, vndè fit, vt vera huius radix ſit 9, erant autem radices falſæ 9, 10, 11; falſæ modo ſunt 2, 3, 4, vt ex adiuncto paradigmate colligere licet.

u — 9

$$
\begin{array}{r}
u - 9 \\
u + 2 \\
\hline
2u - 18 \\
u^2 - 9u \\
\hline
u^2 - 7u - 18 \\
u + 3 \\
\hline
3u^2 - 21u - 54 \\
u^3 - 7u^2 - 18u \\
\hline
u^3 - 4u^2 - 39u - 54 \\
u + 4 \\
\hline
4u^3 - 16u^2 - 156u - 216 \\
u^4 - 4u^3 - 39u^2 - 54u \\
\hline
u^4 * - 55u^2 - 210u - 216 = 0
\end{array}
$$

Ità quoque ſi foret æquatio $e^4 + 16e^3 + 71e^2 - 4e - 420 = 0$. Diuiſis 16, per 4, propter quatuor dimenſiones huius termini e^4, prouenit quotiens 4. Si itaque fiat $u - 4 = e$; ita procedendum erit, *Explicatur æquatio altera.*

$$
\begin{array}{r}
u^4 - 16u^3 + 96u^2 - 256u + 256 \\
+ 16u^3 - 192u^2 + 768u - 1024 \\
+ 71u^2 - 568u + 1136 \\
- 4u + 16 \\
- 420 \\
\hline
u^4 * - 25u^2 - 60u - 36 = 0
\end{array}
$$

Erat autem illius ſuperioris æquationis, ſilicet $e^4 + 16e^3 + 71e^2 - 4e - 420 = 0$, erat inquam vera radix 2, Modo eſt, 6 quandoquidem illa quaternario eſt aucta.

Falſæ autem erant radices 5, 6, 7; Modo erunt 1, 2, 3, ſiquidem illæ ſunt ſingulæ quaternario diminutæ.

Hoc totum cernere licet in adiuncto paradigmate, *Supradictorũ comparatio.*

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & & & u & -\ 6 \\
 & & & u & +\ 1 \\
\hline
 & & & u & -\ 6 \\
 & & u^2 & -\ 6\,u & \\
\hline
 & & u^2 & -\ 5\,u & -\ 6 \\
 & & & u & +\ 2 \\
\hline
 & & 2\,u^2 & -\ 10\,u & -\ 12 \\
 & u^3 & -\ 5\,u^2 & -\ 6\,u & \\
\hline
 & u^3 & -\ 3\,u^2 & -\ 16\,u & -\ 12 \\
 & & & u & +\ 3 \\
\hline
 & 3\,u^3 & -\ 9\,u^2 & -\ 48\,u & -\ 36 \\
u^4 & -\ 3\,u^3 & -\ 16\,u^2 & -\ 12\,u & \\
\hline
u^4 & * & -\ 25\,u^2 & -\ 60\,u & -\ 36 = 0
\end{array}
$$

Alia proponitur æquatio. Ita quoque ſi foret æquatio $a^4 - 2\,b\,a^3 \begin{smallmatrix} +\,2\,b^2 \\ -\,c^2 \end{smallmatrix} a^2 - 2\,b^3\,a + b^4 = 0$. Tolleremus ſecundum æquationis terminum non diſſimili artificio; ſiquidem diuiſis $2\,b$ per 4, fiet quotiens $\frac{1}{2}\,b$. Modo ſupponendum eſt $u + \frac{1}{2}\,b = a$, & ita procedendum eſt.

$$
\begin{array}{lllll l}
u^4 + 2\,b\,u^3 & + \frac{3}{2}\,b^2\,u^2 & + \frac{1}{2}\,b^3\,u & + \frac{1}{16}\,b^4 & & \text{Pro } a^4 \\
\quad - 2\,b\,u^3 & - 3\,b^2\,u^2 & - \frac{3}{2}\,b^3\,u & - \frac{1}{4}\,b^4 & & \text{Pro } -2\,b\,a^3 \\
 & + 2\,b^2\,u^2 & + 2\,b^3\,u & + \frac{1}{2}\,b^4 & & \text{Pro } +2\,b^2\,a^2 \\
 & - c^2\,u^2 & - b\,c^2\,u & - \frac{1}{4}\,b^2\,c^2 & & \text{Pro } -c^2\,a^2 \\
 & & - 2\,b^3\,u & - b^4 & & \text{Pro } -2\,b^3\,a \\
 & & & + b^4 & & \text{Pro } +b^4 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
u^4 * + \frac{1}{2}\,b^2\,u^2 - b^3\,u + \frac{5}{16}\,b^4 = 0 \\
\quad - c^2 \quad - b\,c^2 \quad - \frac{1}{4}\,b^2\,c^2
\end{array}
$$

Quomodo innoteſcat valor primæ radicis. Cognito autem valore ipſius u, per additionem iſtius $\frac{1}{2}\,b$, innoteſcet valor radicis a.

$u + \frac{1}{2}\,b$

$$\begin{array}{r}
u + \frac{1}{2} b \\
u + \frac{1}{2} b \\
\hline
\frac{1}{2} b u + \frac{1}{4} b^2 \\
u^2 + \frac{1}{2} b u \qquad \\
\hline
u^2 + b u + \frac{1}{4} b^2 \\
u + \frac{1}{2} b \\
\hline
\frac{1}{2} b u^2 + \frac{1}{2} b^2 u + \frac{1}{8} b^3 \\
u^3 + b u^2 + \frac{1}{4} b^2 u \qquad \\
\hline
u^3 + 1 \frac{1}{2} b u^2 + \frac{3}{4} b^2 u + \frac{1}{8} b^3 \\
u + \frac{1}{2} b \\
\hline
\frac{1}{2} b u^3 + \frac{3}{4} b^2 u^2 + \frac{3}{8} b^3 u + \frac{1}{16} b^4 \\
u^4 + 1 \frac{1}{2} b u^3 + \frac{3}{4} b^2 u^2 + \frac{1}{8} b^3 u \qquad \\
\hline
u^4 + 2 b u^3 + \frac{6}{4} b^2 u^2 + \frac{4}{8} b^3 u + \frac{1}{16} b^4 \\
\text{Seù } u^4 + 2 b u^3 + \frac{3}{2} b^2 u^2 + \frac{1}{2} b^3 u + \frac{1}{16} b^4
\end{array}$$

Primò igitur ſcribere oportet hoc plurinomium; deindè quia ſecundus illius æquationis terminus erat $2\ b\ a^3$, oportet ducere $2\ b$ in ipſum $u^3 + 1 \frac{1}{2} b\ u^2 + \frac{3}{4} b^2\ u + \frac{1}{8} b^3$, nempè cubum ex $u + \frac{1}{2} b$. Quia verò tertius terminus erat $2\ b^2 a^2 - c^2 a^2$; proindè $2\ b^2 - c^2$ oportet multiplicare per $u^2 + b\ u + \frac{1}{4} b^2$. Quartus autem terminus erat $2\ b^3\ a$, proindè multiplicari debet $2\ b^3$ per $u + \frac{1}{2} b$; & quidem per primam multiplicationem fit $- 2 b u^3 - 3\ b^2 u^2 - \frac{3}{2} b^3 u - \frac{1}{4} b^4$. Per ſecundam verò producitur $+ 2\ b^2 u^2 + 2\ b^3\ u + \frac{1}{2} b^4$. Per tertiam autem producitur $- c^2 u^2 - b\ c^2\ u - \frac{1}{4} b^2 c^2$. Per quartam demum habetur $-2\ b^3\ u - b^4$.

Quomodo procedendū in huiuſmodi pragmatia.

Ità quoque ſi foret æquatio $a^4 - 12\ b\ a^3 \begin{array}{l} + b^2 \\ - c^2 \end{array} a^2 - b^3\ a + b^4 = 0$

Diuidatur numerus 12 per 4, numerum dimenſionum huius termini a^4, & fiet quotiens 3. Modo fiat $u + 3 = a$, & ſubſtituantur ea, quæ ſubſtituenda ſunt; reperiemus enim æquationem huiuſmodi.

Proponitur alia æquatio, et ea explicatur.

$$\begin{array}{l}
u^4 * - 55\ b^2\ u^2 - 211\ b^3\ u - 238\ b^4 = 0 \\
\qquad - c^2\ u^2 - c^2\, 6\ b\ u - c^2\, 9\ b^2
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
u^4 + 12\ b\ u^3 + 54\ b^2\ u^2 + 108\ b^3 u + 81\ b^4 & \text{Pro } a^4 \\
- 12\ b\ u^3 - 108 b^2\ u^2 - 324\ b^3\ u - 324\ b^4 & \text{Pro } - 12\ b\ a^3 \\
+ b\ u^2 + 6\ b^3\ u + 9\ b^4 & \text{Pro } + b^2\ a^2 \\
- c^2\ u^2 - c^2\, 6\ b\ u - c^2\, 9\ b^2 & \text{Pro } - c^2\ a^2 \\
- b^3\ u - 3\ b^4 & \text{Pro } - b^3\ a \\
+ b^4 & \text{Pro } + b^4 \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
u^4 * - 55 b^2 u^2 - 211 b^3 u - 238 b^4 = 0 \\
\qquad - c^2\ u^2 - c^2\, 6\, b u - c^2\, 9 b^2
\end{array}$$

Tollitur ſecũdus æquationis terminus.

Vel etiam eiuſdem ęquationis ſecundum terminum de medio tollemus diminuendo quantitatem cognitam ſecundi termini diuiſam per numerum dimenſionum primi vnaquaque radicum verarnm ſi vnus ex hiſce duobus terminis notatus fuerit ſigno + alter autem ſigno —.

Operationis inſtitutio.

Diuidatur itaque 2 b per 4, vt habeatur qnotiens $\frac{1}{2}$ b. Faciendo igitur $\frac{1}{2}$ b — a = u. ſeu $\frac{1}{2}$ b — u = a, ita eſt ordinanda æquatio.

$+\frac{1}{16}b^4 - \frac{1}{2}b^3u + \frac{3}{2}b^2u^2 - 2bu^3 + u^4$	Pro $+a^4$
$-\frac{1}{4}b^4 + \frac{3}{2}b^3u - 3b^2u^2 + 2bu^3$	Pro $-2ba^3$
$+\frac{1}{2}b^4 - 2b^3u + 2b^2u^2$	Pro $+2b^2u^2$
$-\frac{1}{4}b^2c^2 + bc^2u - c^2u^2$	Pro $-c^2a^2$
$-b^4 + 2b^3u$	Pro $-2b^3a$
$+b^4$	

$$+\frac{5}{16}b^4 + b^3u + \frac{1}{2}b^2u^2 \; * \; u^4 = 0$$
$$-\frac{1}{4}b^2c^2 + bc^2 - c^2$$

Proponitur æquatio altera cuius ſecũdus terminus tollendus ſit.

Ita quoque ſi fuerit æqnatio $a^4 - 6a^3 + 2a^2 - 54a + 81 = 0$. Tolleretur ſecundus terminus ſupponendo a, æquari u + 1 $\frac{1}{2}$. Hoc enim pacto, vt ſupra diximus fieret æquatio operando iuxtà præcepta iam tradita, & æquatio foret huiuſmodi $u^4 * - 11\frac{1}{2}u^2 - 75u - 10\frac{11}{16} = 0$.

Si etiam foret ęquatio $a^4 - 14a^3 - 478a^2 - 686a + 2401 = 0$. Tolleretur ſecundus terminus ſupponendo a = u + 3 $\frac{1}{2}$. Et operando ſecundum Artem fieret æquatio huiuſmodi $u^4 * - 551\frac{1}{2}u^2 - 4375u - 6305\frac{11}{16} = 0$.

Ad quid conducat ablatio ſecundi termini.

Ablatione ſecundi termini poſſunt ęquationes ſimplieiores non tranſcendentes quadratum, facili negotio explicari adeò, vt earum radices ſtatim innoteſeant. Ità plenè ſi foret æquatio $u^2 - bu = c^2$; Vel $u^2 - bu - c^2 = 0$. Diuidatur b per 2, & fiet $\frac{1}{2}$ b; ponatur autem u — $\frac{1}{2}$ b = a, ſeu u = a + $\frac{1}{2}$ b. Fiat autem operatio hunc in modum vt vides. Quoniam igitur erat æquatio $u^2 - bu - c^2 = 0$; proindè loco ipſius u^2, ſubſtituatur + $a^2 + ba + \frac{1}{4}b^2$, & pro — b u, ſubrogetur — b a — $\frac{1}{2}$ a^2, & pro — c^2, retineatur idem. Et quidem ſic operando reſultabit æquatio quemadmodum hic cernere licet; nimirum fiet æquatio huiuſmodi $a^2 * - \frac{1}{4}b^2 - c^2 = 0$; Vel $a^2 = \frac{1}{4}b^2 + c^2$; Cuius radix eſt iſta ℞ ($\frac{1}{4}b^2 + c^2$) = a. Vel a = — ℞ ($\frac{1}{4}b^2 + c^2$). Quamobrem prioris æquationis $u^2 - bu = c^2$, radix erit u = $\frac{1}{2}$ b + ℞ ($\frac{1}{4}b^2 + c^2$); Siuè u = $\frac{1}{2}$ b — ℞ ($\frac{1}{4}b^2 + c^2$).

$$a + \frac{1}{2}b$$
$$a + \frac{1}{2}b$$
$$\frac{1}{2}ba + \frac{1}{4}b^2$$
$$a^2 + \frac{1}{2}ba$$
$$a^2 + ba + \frac{1}{4}b^2$$

$$a + \frac{1}{2}b$$
$$-b$$
$$-ba - \frac{1}{2}b^2$$

$$a^2 + ba + \frac{1}{4}b^2$$
$$-ba - \frac{1}{2}b^2$$
$$-c^2$$
$$a^2 * - \frac{1}{4}b^2 - c^2 = 0$$

Explicatio ſupradictorum. Superiora declarantur.

Supponamus ad ſupradictorum maiorem deelarationem æquationem eſſe huiuſmodi 1 Q — 12 R = 160. Seù quod idem eſt 1 Q — 12 R — 160 = 0. Et quidem 1 R, eſto æqualis A + 6, hoc eſt vna prima radix æqualis ſe-

cunde

cundæ plus 6, numero emergente ex diuiſione 12, numeri radicum per 2 numerum dimenſionum illius termini 1 Q; & fiat ſubſtitutio, vt vides, adeo, vt + A Q + 12 A + 36, ſubſtituatur loco ipſius + 1 Q; deinde pro — 12 R ſubſtituatur — 12 A — 72; demum retineatur idem — 160, & fiet æquatio inter A, & 14. Cumque poneremus A + 6, æquari 1 R; proindè ipſius 1 R pretium erit 20; quamobrem illius æquationis 1 Q — 12 R — 160 = 0, radix erit 20. Vel erit A = — 14; ac proindè R = 6 + 14, vel R = 6 — 14, vt dicebamus.

$$\begin{array}{r} A + 6 \\ A + 6 \\ \hline 6\,A + 36 \\ A\,Q + 6\,A \\ \hline A\,Q + 12\,A + 36 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} A + 6 \\ -12 \\ \hline -12\,A - 72 \end{array}$$

Tollitur etiam ſecundus æquationis terminus hunc in modum. Sit æquatio vt ſuprà $u^2 - b\,u - c^2 = 0$. Diuidatur b, per 2, & fit $\frac{1}{2}\,b$; Quamobrem fiat $\frac{1}{2}\,b - a = u$, & eius quadratum puta $\frac{1}{4}\,b^2 - b\,a + a^2$, ſubſtituatur loco ipſius u^2, propterea pro $- b\,u$ ſubrogetur $- \frac{1}{2}\,b^2 + b\,a$, ac demum conſtituatur in eadem æquatione idem terminus $- c^2$, & fiet æquatio $- \frac{1}{4}\,b^2 - c^2 * + a^2 = 0$.

Qua arte etiam aliter ſecundus æquationis terminus tollatur.

$$\begin{array}{r} A\,Q + 12\,A + 36 \\ -12\,A - 72 \\ -160 \\ \hline A\,Q - 196 = 0 \\ A\,Q = 196 \\ A = 14 \\ +6 \\ \hline 20 \end{array}$$

Siuè $a^2 = \frac{1}{4}\,b^2 + c^2$, erit autem radix huiuſmodi. ℞$(\frac{1}{4}\,b^2 + c^2) = a$, ſiuè $a = -$℞$(\frac{1}{4}\,b^2 + c^2)$, ac proinde u, æquabitur $\frac{1}{2}\,b -$ ℞$(\frac{1}{4}\,b^2 + c^2)$, Siuè u, æquabitur $\frac{1}{2}\,b +$ ℞$(\frac{1}{4}\,b^2 + c^2)$. Quæ nos facile quidem numeris explicabimus.

Quanam inueniatur radix.

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}\,b - a \\ \frac{1}{2}\,b - a \\ \hline - \frac{1}{2}\,b\,a + a^2 \\ \frac{1}{4}\,b^2 - \frac{1}{2}\,b\,a \\ \hline \frac{1}{4}\,b^2 - b\,a + a^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}\,b - a \\ -b \\ \hline - \frac{1}{2}\,b^2 + b\,a \end{array}$$

$$\begin{array}{l} + \frac{1}{4}\,b^2 - b\,a + a^2 \\ - \frac{1}{2}\,b^2 + b\,a \\ - c^2 \\ \hline - \frac{1}{4}\,b^2 - c^2 * + a^2 = 0 \end{array}$$

Supponamus æquationem eandem 1 Q — 12 R = 160; Siuè 1 Q — 12 R — 160 = 0. Dicamus autem 6 — A, æquari 1 R; proindè quadratum ipſius erit 36 — 12 A + A Q, ſubſtituendum pro 1 Q. Inſuper ducamus 6 — A, in — 12; & fiet — 72 + 12 A. Atque demum retento eodem numero 160 fiet æquatio.

— 196 + A Q = 0; Seù A Q = 196; quare A, æquabitur 14; ac proindè cum diceremus 6 — A, æquari 1 R; ſi ex hactenus dictis rem explicemus; comperiemus A, æquari 14; Vel A, æquari — 14; atque adeò 1 R æquari 6 — 14, vel 1 R, æquari 6 + 14.

Diceba-

Falſæ radices æquationis euadunt veræ; at veræ non fiunt falſæ.

Dicebamus ſuprà bene fieri poſſe, vt falſæ radices æquationis euadant veræ; neque tamen veræ falſę fiant. In cuius gratiam illud non eſt ſilentio prætereundum, quod ſcilicet dum verarum radicum valor augetur quantitate maiori aliqua radice ex falſis; omnes radices veræ ſemper fieri poſſint; adeò vt non interſint duo ſigna ✠, aut duo ſigna —, quæ nimirum ſe inuicem conſequantur. Prætereà, vt quantitas cognita tertij termini quadrato ſemiſſis ſecundi ſit maior. Licet enim id fiat incognitis falſis radicibus; nihilo tamen ſecius de ipſarum magnitudine iudicium ferri poteſt; atque aliquam aſſumere quantitatem haud eſt difficile, quæ ipſas in tantum, vel plus ſuperet, quantum ad id requiſitum eſſe iudicatur, atque requiritur.

Radices æquationis quamuis incognitæ, multiplicari diuidiq; poſſunt per quamlibet cognitã quantitatem.

Radices alicuius æquationis quantumuis incognitę, multiplicari diuidique poſſunt per quamlibet cognitam quantitatem. Hoc autem fit ſupponendo quantitatem incognitam, multiplicatam, vel diuiſam per quantitatem illam, quæ multiplicare, vel diuidere debet radices ipſas; ſupponendo inquam alicui alteri æqualem eſſe. Deinde verò multiplicando, vel diuidendo cognitam quantitatem ſecundi termini per hanc ipſam, quę multiplicare, vel diuidere debet radices; & per ipſius quadratum, quantitatem tertij, & per eiuſdem cubum quantitatem quarti; atque ità deinceps ad vltimum vſque terminum procedendo. Hæc autem operatio vtiliſſima quidem eſt; propterea quod maximè conducit ad reductionem quantitatum fractarum ad integras, atque adeò ad hoc vt fracti numeri ad integros reuocentur: & etiam, vt ſurdi ad rationales redigantur.

Proponitur æquatio cuius loco alia ſubſtituenda ſit, in qua omnes termini per numeros rationales exprimantur.

Supponamus æquationem eſſe huiuſmodi $a^3 - a^2$ ℞ $3 + \frac{26}{27} a - \frac{8}{27\,℞\,3} = 0$

Si altera deſideretur æquatio, in qua quidem omnes termini per rationales numeros exprimantur. Oportet ſupponere $e = a$ ℞ 3; deinde multiplicanda eſt ℞ 3, quantitas cognita ſecundi termini; quæ quidem eſt quoque ℞ 3; modo per 3 quadratum ipſius multiplicari debet quantitas tertij termini, quæ eſt $\frac{26}{27}$; demum per cubum eiuſdem, qualis eſt 3 ℞ 3, ſeù ℞ 27; multiplicari debet quantitas poſtremi termini, nempè $\frac{8}{27\,℞\,3}$; fiet enim æquatio $e^3 - 3e^2 + \frac{26}{9} e - \frac{8}{9} = 0$. In qua termini ſunt omnes rationales. Rem autem ſic ſe habere patet; Si namque ℞ 3, ſecundus terminus, ducatur in ℞ 3; cui quidem ducto in a, fecimus æqualem e; fiet 3 pro ſecundo termino; quamobrem erit $e^3 - 3e^2$. At verò ſi per 3 quadratum illius, multiplicetur $\frac{26}{27}$, tertius terminus; & producetur $\frac{26}{9}$, atque erit $e^3 - 3e^2 - \frac{26}{9} e$. Idem eſt enim ducere $\frac{26}{9}$, in 3, multiplicando 26 per 3, relicto eodem denominatore: ac eundem retinere numeratorem diuiſo denominatore per 3. Modo ducamus $\frac{8}{27\,℞\,3}$; in cubum ipſius ℞ 3; cubus eſt 3 ℞ 3 ſeù ℞ 27, qua ducta in 8 fit ℞ 1728. Si verò ducatur ℞ 3 in 27, fit ℞ 2187. At ſi reuocemus fractionem hanc $\frac{℞\,1728}{℞\,2187}$, ad minores terminos, fractio illa reducetur ad hanc $\frac{℞\,64}{℞\,81}$ hoc eſt $\frac{8}{9}$; erit itaque $-\frac{8}{9}$, vltimus æquationis terminus; ac proinde fiet æquatio $e^3 - 3e^2 + \frac{26}{9} e - \frac{8}{9} = 0$.

Propoſitum artificium exemplo explicatur.

Sed hoc artificium declarare præſtabit vno, vel altero exemplo in numeris rationalibus. Eſto igitur æquatio 1 c — 4 Q † 10 R — 132 = 0, cuius eſt radix 6. Dicamus itaque e, æquari 4 R; & fiat e^3, loco ipſius 1 c; deindè multiplicetur 4, quantitas cognita ſecundi termini per 4, & fiet 16; ſcribaturque $-16e^2$, pro ſecundo termino; deindè ſumatur 16, quadratum ex 4, atque ducatur in 10, quantitatem cognitam tertij termini, & producetur $+ 160\,e$; pro tertio termino; mox autem cubicè multiplicetur 4, vt fiat 64, in quem ducatur 132; vt fiat 8448; erit igitur æquatio $e^3 - 16e^2 + 160\,e - 8448 = 0$.

Cùm autem diceremus e, æquari 4 R, eſſetque radix 6; proinde e valebit 24; & ità 24, radix erit huius æquationis $e^3 - 16e^2 + 160\,e - 8448 = 0$; & ita eſt, namque cubus ex 24, eſt 13824, cui ſi addatur 3840, pretium numeri 160 e, fit 17664, cui ſi dematur 9216, pretium numeri $16\,e^2$, fit reſiduum 8448; rectè proindè inſtituitur operatio; & habetur æquatio $e^3 - 16e^2$ ✠ $160\,e - 8448 = 0$.

Alia proponitur æquatio.

Sit alia æquatio puta 1 c — 6 Q † 40 R — 800 = 0; cuius radix eſt 10. Supponamus e, æquari 6 R, ducatur 6, quantitas cognita ſecundi termini in 6, fit 36; & erit $e^3 - 36e^2$; deinde multiplicetur 6, in ſe nempè quadraticè, vt fiat 36, mox

ducatur

ducatur 40, in 36, vt producatur 1440, atque adeò, fiat $e^3 - 36e^2$ ✠ 1440 e, demum ſumatur, cubus ipſius 6, nempè 216, ducatur in 800, vt fiat — 171800; quamobrem erit æquatio $e^3 - 36e^2$ † 1440 e — 172800 = 0; huius autem radix erit 60; cum enim e, poſuerimus, æquari 6 R, radix verò valeret 10; conſequenter 6 R, valebunt 60; atque adeò huius æquationis radix erit 60; cubus erit 216000; 1440 e, valebunt 86400, additione facta, habebitur 302400, à quo ſi ſubtrahatur 129600, pretium ipſius $36e^2$, remanebit 172800, à quo ſi auferatur 172800; remanebit 0. Itaque rectè inſtituta eſt operatio, quam etiam poſſumus exercere in vno, vel alio exemplo, in quo reperiantur numeri irrationales; eadem enim regula eodem modo rectè ſemper colliget, quod intendimus. *Continuatio explicationis ſupradictorũ.*

Sit rurſus æquatio $a^3 - a^2$ ℞ 24 † 12 a — ℞ 216 = 0. Supponamus e, æquari a ℞ 24, deinde multiplicari debet ℞ 24, per ℞ 24, & fit 24, ſcribatur itaque $e^3 - 24e^2$; deindè quadraticè multiplicetur ℞ 24, vt fiat productum 24, quod duci debet in 12, vt fiat 288, erit igitur $e^3 - 24e^2$ † 288 e, demum cubicè multiplicetur ℞ 24, vt fiat productum ℞ 13824; quo ducto in ℞ 216, fit productum ℞ 2985984, nempe 1728, eſt enim hic numerus quadratus, cum eius radix ſit 1728. Nunc erit æquatio iſta $e^3 - 24e^2$ † 288 e — 1728 = 0. Cum autem diceremus e, æquari a ℞ 24, & illius æquationis radix eſſet ℞ 6, conſequenter a ℞ 24, valebit ℞ 144, nempè 12, huius cubus eſt 1728, cui addi debet ob ſignum †, 3456, pretium ipſius 298 e, & fit 5184, à quo ſubtrahi debet 1728, ob ſignum —, & à reſiduo 3456, ſubduci debet 3456, pretium quadratorum, puta $24e^2$, & nihil remanet; quamobrem, rectè dicebamus operationem ad eum modum inſtitui.

Poſſet etiam deſiderari, vt loco illius ſuprapoſitæ æquationis alia ſubſtitueretur, in qua omnes quantitates cognitę ſolis integris numeris exprimerentur; id autem fit ſupponendo u = 3 e, multiplicando verò 3, per 3, $\frac{26}{9}$ per 9, & $\frac{8}{9}$, per 27; fiet enim æquatio $u^3 - 9u^2$ ✠ 26 u — 24 = 0. Huius autem æquationis radices ſunt 2, 3, 4; illius verò erant $\frac{2}{3}$; 1, & $\frac{4}{3}$. Superioris autem erunt $\frac{2}{9}$ ℞ 3, $\frac{1}{3}$ ℞ 3, $\frac{4}{9}$ ℞ 3. *Quomodo loco vnius æquationis alia ſubſtituatur.*

Hæc autem nos longè melius intelligemus ſupponentes aliquam æquationem numeris exhibitam. Sit igitur $a^3 - 6a^2$ ✠ 3 $\frac{1}{5}$ a — $\frac{768}{5}$ = 0. Si itaque loco iſtius alia ſubſtituenda eſt, in qua quantitates omnes cognitæ ſolis integris numeris exprimantur. Oportet ſupponere e = 5 a. Et quidem a, radix illius æquationis valet 8; quamobrem 5 a, valebunt 40; proindè e, valebit pariter 40. Multiplicemus autem 6, per 5, fit 30, inſuper 3 $\frac{1}{5}$, per 25, fit 80; & $\frac{768}{5}$ per 125 vndè erit $e^3 - 30e^2$ ✠ 80 e — 19200 = 0. Huius autem æquationis radix eſt 40, vt vnuſquiſque poterit experiri. *Supradicta explicantur.*

Sit æquatio $e^3 - 6e^2$ ✠ 3 $\frac{1}{6}$ e — 153 $\frac{2}{6}$ = 0. Supponamus u, æquari 6 e, & fiet æquatio $u^3 - 36u^2$ ✠ 114 u — 33120 = 0. Debet enim 6, ſecundus terminus duci in 6, vt fiat 36, pro ſecundo termino nouæ æquationis; Deindè 3 $\frac{1}{6}$, duci debet in 36, quadratum ex 6, vt fiat 114; demum 153 $\frac{2}{6}$, duci debet in 116, cubum ex 6, vt habeatur 33120; & fiat æquatio $u^3 - 36u^2$ ✠ 114 u — 33120 = 0. Huius autem æquationis radix eſt 48; ſi itaque diuidamus 48, per 6, innoteſcet radix illius prioris æquationis. *Proponuntur alia ad idem.*

Quod ſi æquatio illa ſuperior ſic ſe habeat $e^3 - 6e^2$ ✠ 3 $\frac{1}{6}$ e — 153 $\frac{1}{3}$ = 0; adeò vt fractio illa $\frac{2}{6}$, ad minimos terminos ſit redacta. Oportet 6, ſecundum terminum ducere in 3, denominatorem fractionis, vt fiat 18, pro ſecundo termino nouæ æquationis; deindè 3 $\frac{1}{6}$, duci debet in 9, quadratum ex 3, vt fiat 28 $\frac{1}{2}$, pro tertio termino; demum oportet ducere 153 $\frac{1}{3}$, in 27, cubum ex 3, vt habeatur 4140, erit igitur æquatio huiuſmodi $u^3 - 18u^2$ ✠ 28 $\frac{1}{2}$ u — 4140 = 0. Iſtius autem æquationis radix eſt 24, ſi itaque hic numerus diuidatur per 3, orietur quotiens 8, & radix prioris æquationis. *Quando ſuperior æquatio alio ſe haberet modo.*

Illud inſuper non ignorandum eſt; hoc nil aliud eſſe, quàm multiplicare terminos æquationis per terminos continuè proportionales. Si enim ſit æquatio. *Quid ſit ſuperiorem æquationem perficere.*

e^3 — b

$$e^3 - 6 e^2 + 3 \tfrac{1}{6}\, e - 153 \tfrac{1}{6} = 0$$
$$1 \;.\; 6 \;.\; 36 \;.\; 216$$

Supradictorũ comprobatio. Liquido conſtat dum fit multiplicatio, vt ſuprà dicebamus multiplicari terminos æquationis per terminos proportionales 1. 6. 36. 216.

Ità etiam dum illa ſuperior æquatio $a^3 - 6 a^2 + 3 \frac{1}{5}\, a - \frac{768}{5} = 0$; reducebatur ad aliam hanc $e^3 - 30 e^2 + 80 e - 19200$, fit multiplicatio terminorum per numeros continuè proportionales.

$$a^3 - 6 a^2 + 3 \tfrac{1}{5}\, a - \tfrac{768}{5} = 0$$
$$1 \;.\; 5 \;.\; 25 \;.\; 125 \;:$$

Adnotandũ quoddam. Prætereundum tamen non eſt, nimirùm quemadmodum æquationes ope multiplicationis à fractionibus liberantur, & ad faciliores reducuntur, ita quoque plerumque beneficio diuiſionis in faciliores tranſmutari poſſe; ſi videlicet id lubet ob prolixos terminos, qui laborioſiorem æquationis explicationem reddunt.

Vt ſi foret æquatio $a^3 - 0\, a^2 - 504\, a - 86400 = 0$. Diuidantur eius termini per numeros proportionales nimirum 1, 6, 36, 216.

$$a^3 - 0\, a^2 - 504\, a - 86400 = 0$$
$$1 \;.\; 6 \;.\; 36 \;.\; 216 \;.$$

Fiet enim æquatio huiuſmodi $e^3 - 0\, e^2 - 14\, e - 400 = 0$

Illius autem æquationis radix erat 48; huius verò erit 8, quandoquidem instituta eſt diuiſio per 6; ſi igitur 8, multiplicemus per 6, quandoquidem inſtituta fuit diuiſio per 6, fiet 48, radix prioris æquationis.

Hoc eſt Iſomoeria opus ſuperius explicatum. Huc ſpectat Iſomoeriæ opus iam ſuperiùs explicatum. Vnde dicebamus. Si $a^3 +$ $\frac{b \text{ sol. } a}{d}$ æquetur z ſolido ex hypotheſi quod d a ſit e planum; etiam ex ijs, quæ proponuntur $\frac{e \text{ pl. cubus} + b \text{ sol. } e \text{ pl.}}{d^3}$ æquabitur z ſolido; omnibuſque ductis in d^3, & e pl. cub. + b ſol. d e pl. æquab. z ſol. d^3, & ita de alijs quæ ſupra videri poſſunt, vbi etiam & methodum alteram aperuimus. Ita pariter ſi $a^4 +$ $\frac{b \text{ sol. } e}{d}$ æquaretur $\frac{z \text{ pl. pl.}}{d}$ ex hypotheſi quod d a ſit e planum, ex ijs quæ proponuntur; $\frac{e \text{ pl. cubus} + b \text{ sol. } d\, e \text{ pl.}}{d^3}$ æquatur $\frac{z \text{ pl. pl.}}{d}$, & omnibus applicaris ad d^3 fit e pl. cubus + b ſol. d e pl. = z pl. pl. d^3 Vide, quæ ſupra de Iſomoeria tractantes, attulimus.

Aduertendum autem circa ea, quæ ibi diximus, idem eſſe $\frac{e \text{ pl. cub.}}{d^3} + \frac{b \text{ sol. } e \text{ pl.}}{d^3}$ ac eſt $\frac{e \text{ pl. cub.} + b \text{ sol. } d\, e \text{ pl.}}{d^3}$, namque $\frac{b \text{ solid. } e \text{ pl.}}{d^2}$ eſt fractio cuius numerator b ſol. e pl., & denominator d^2 ſi per eandem quantitatem d multiplicetur, fit $\frac{b \text{ sol. } d\, e \text{ pl.}}{d^3}$ illi fractioni æqualis.

Ad quid hæc operatio conducat. Hæc autem operatio conducit feliciter ad faciendam quantitatem cognitam alicuius termini in æquatione alicui datæ æqualem. Eſto æquatio $a^3 * - c^2 a + d^3 = 0$. Oporteat æquationem inſtituere, vt eius tertius terminus non ſit c^2, vt hìc, ſed potius $3\, b^2$. Supponamus e, æquari a $\frac{R\, 3\, b\, a}{c\, a}$, modo autem ſcribendum eſt $e^3 * - 3\, b^2 e + \frac{3\, b\, 3\, d^3}{c^3}$ ℞ 3 = 0. Hoc autem ſic intelligendum eſt. Si ſupponamus e, æquari a $\frac{R\, 3\, b\, a}{c\, a}$, ſiuè e, æquari $\frac{b\, a}{c}$ ℞ 3, erit $a = \frac{c\, e}{b\, R\, 3}$, & conſequenter $a^3 = \frac{c^3 e^3}{3\, b^3\, R\, 3}$, & $a^2 = \frac{c^2 e^2}{3\, b^2\, R\, 3}$, quæ ſunt in æquatione ſubſtituenda; vt habeatur $\frac{c^3 e^3}{3\, b^3\, R\, 3} * - \frac{c^3 e}{b\, R\, 3} + d^3 = 0$, & per communem multiplicationem ipſius $3\, b^3$ ℞ 3, fiet $c^3 e^3 * - 3\, b^2 c^3 e + 3\, b^3 d^3$ ℞ 3 = 0; & per diuiſionem ipſius c^3, fiet $e^3 * - 3\, b^2 e - \frac{3\, b^3 d^3}{c^3}$ ℞ 3 = 0.

Supradictorũ declaratio. Cæterum declaranda ſunt ſuperiùs dicta. Oportet aduertere idem eſſe a $\frac{R\, 3\, b\, a}{c\, a}$; ac eſt $\frac{b\, a}{c}$ ℞ 3. Nam, vt id clariùs appareat. Supponamus a, valere 6; deindè loco ipſius ℞ 3, accipiamus numerum rationalem, eumque tamquam irrationalem tractemus. Sit igitur ℞ 4, & quidem deprehendemus idem eſſe a $\frac{R\, 4\, b\, a}{c\, a}$, ac eſt $\frac{b\, a}{c}$ ℞ 4.

Explicatio ſupradictorum. Supponamus b, valere 4, & c, valere 2, item a, valere 6. Iam conſtat a $\frac{R\, 4\, b\, a}{c\, a}$;

idem

idem eſſe quod numerus 64, nempè 4 b^2, diuidatur per c^2, nimirum per 4, vt fiat 16, cuius radix 4, ducatur in a, nempè 6, fiet enim 24. At idem numerus prouenit ſi 4, nimirum b, ducatur in a, ſcilicet 6; numeruſque productus 24, diuidatur per c, videlicet 2, vt proueniat 12, quo ducto in ℞ 4, nempè 2, prouenit 24. Item ſi ſit a $\frac{℞\,9\,b\,a}{c\,a}$, idem erit quod $\frac{b\,a}{c}$ ℞ 9. Supponamus enim a, valere 6, & b, valere 8, cuius quadratum eſt 64, & c, valere 2, cuius quadratum eſt 4; ducamus 64, in 9, fit 5769 eſt quidem numerus, ſi diuidatur per 4, quadratum ipſius 2, fit quotiens 144, cuius radix eſt 12, qua ducta in 6, fit 72; tantum habetur pro $\frac{b\,a}{c}$ ℞ 9, ſiquidem b, valet 8, & a, valet 6, quare b a, valebit 48, quo diuiſo per c, uempe a, fit 24, quo ducto in 3, nimirùm radicem quadratam numeri 9, fit 72, vt prius.

Cæterum ſi ſit e ≖ a $\frac{℞\,3\,b^2}{c\,2}$, erit idem quod e ≖ $\frac{b\,e}{c}$ ℞ 3, & erit a ≖ $\frac{c\,e}{b\,℞\,3}$, & a^2 ≖ $\frac{c\,c\,e\,e\,2}{3\,b}$, & a^3 ≖ $\frac{c^3\,e^3}{3\,b^3\,℞\,3}$. Quæ quidem ſi in æquatione ſubſtituantur, habebitur æquatio huiuſmodi $\frac{c^3\,e^3}{3\,b^3\,℞\,3}$ * — $\frac{c\,e}{b\,℞\,3}$ † d^3 ≖ 0, & per communem multiplicationem ipſius 3 b^3 ℞ 3, fiet $c^3\,e^3$ * — 3 $b^2\,c^3$ e † 3 $b^3\,d^3$ ℞ 3 ≖ 0, & per communem diuiſionem ipſius c^3, fiet e^3 * — 3 b^2 e — $\frac{3\,b^3\,d^3}{c^3}$ ℞ 3 ≖ 0. *Explicatur ſuperius dicta.*

Dicebamus autem a, æquari $\frac{c\,e}{b\,℞\,3}$; cum enim e, æquaretur $\frac{b\,a}{c}$ ℞ 3, ſequitur a, æquari $\frac{c\,e}{b\,℞\,3}$; quandoquidem ſi ſupponamus b, eſſe 4, & a, eſſe 5, b a, erit 20, quo diuiſo per c, quam ſuppono eſſe 2, fit quotiens 10, quem duco in 6, numerum ad libitum, quidem ſuppoſitum loco ipſius ℞ 3, fit 60 pro e; modo ſi c, nempè 2, ducatur in e, ſcilicet 60 fit 120, quo diuiſo per 4, ducto in 6, hoc eſt per 24, qui quidem numerus reſpondet b ℞ 3; quemadmodum 120 reſpondet c e, fit 5, pro a. *Eorundem explicatio continuata.*

Modo tractandum ſupereſt de cubicarum æquationum reductione, cum Problema planum eſtiterit. Id autem aſſequemur primo liberata ęquatione à numerorum fractionibus, & à numeris ſurdis ſi qui interceſſerint perpendendo ordinatim quantitates omnes, quæ abſque fractione terminum vltimum diuidere poſſunt. Is enim peractis videndum eſt, num aliqua ex ipſis iuncta cum quantitate incognita per notam †, vel —, binomium componere poſſit à quo tota ſumma diuidatur; id enim argumento erit problema planum eſſe. Aut enim cognita quantitas huiuſce binomij radix erit quęſita: vel æquatio diuiſa per binomium prædictum ad duas erit dimenſiones reuocata, cuius radix citrà difficultatem comparari poteſt. *De cubicarum æquationum reductione instituitur tractatio.*

Sit igitur æquatio e^6 — 8 e^4 — 124 e^2 — 64 ≖ 0. Obſeruandum eſt per quos numeros vltimus terminus 64, diuidi poſſit: reperiemus ad huiuſcemodi diuiſionem iſtos idoneos eſſe 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64. Quare examinando, ac perpendendo æquationem hanc, quam diximus num diuiſionem patiatur per aliquod ex his ibinomijs e^2 — 1, vel e^2 † 1, item e^2 — 2, &c. Comperiemus æquationem diuid poſſe per e^2 — 16; diuiſio autem hunc in modum inſtituitur. *Exemplum.*

Diuidatur	✠ e^6 — 8 e^4 — 124 e^2 — 64	— 64 / — 16	✠ 4
Per e^2 — 16	✠ e^6 — 8 e^4 — 4 e^2 — 64	— 128 e^2 / — 16	† 8 e^2
	— 16 e^4 — 128 e^2 / — 16 e^4 — 128 e^2	— 16 e^4 / — 16	† 1 e^4
	0 0		

Fit autem quotiens † 1 e^4 † 8 e^2 † 4.

Hæc verò diuiſo tali pacto perficitur. Sumatur initium ab vltimo termino — 64; diuidatur igitur — 64, per — 16, & fit quotiens † 4, conſtituendus ex parte quotientis multiplicetur ✠ 4 per — 16 fitque — 64, & per ✠ e^6, fitque ✠ 4 e^6 conſtituendum ſub diuidendo, vt vides affectum tamen nota — (ſcribendum eſt enim, ſemper ſignum ✠, vel —, planè contrarium illi quod multiplicatione produ- *Qua arte diuiſio perficiatur.*

producitur, ſi volumus operationem addendo perficere; Sin autem ſcribatur, vt ſcribi debet ✠, vel —, &c.) facta additione, ipſius $-4e^3$ ad $-124e^3$, fit -128 e^3, quod diuidatur per -16, vt fiat quotiens $+8e^2$, ducatur autem $+8e^2$, in †e^2, fit* $-8e^4$, conſtituatur ſub $-8e^4$, additione facta, habebitur $-16e^4$, quo diuiſo per -16, fit quotiens †$1e^4$, quo ducto in $+e^2$, fit †$1e^6$, quo ſubtracto ex e^6, nihil remanet, & ita adimpleta eſt diuiſio. Huius porrò æquationis $e^4 - 8e^3 - 124e^2 - 64 \rightleftharpoons 0$, radix eſt 16. Aduerte e^3 ſumi pro cubo, &c.

* *Contraria ſcilicet nota, &c. Vel ſit —16, addendũ ipſi ✠16; vt remaneat 0.*

Proponitur æquatio.

Sit æquatio $+e^6 - 12e^4 - 520e^2 - 600 \rightleftharpoons 0$
Diuidatur $-e^6 - 18e^4 - 20e^2 + 600$
Per $e^2 - 30$

$0 - 30e^4 - 540e^2\ 0$
$- 30e^4 - 540e^2$

$0 \quad 0$

-600 / -30	† 20
$-540e^2$ / -30	$+18e^2$
$-30e^4$ / -30	$+1e^4$

Fit quotiens $1e^4 + 18e^2 + 20 \rightleftharpoons 0$.
Huius autem æquationis $e^6 - 12e^4 - 520e^2 - 600$, radix eſt 30.

Alia æquatio.

Sit æquatio $+e^6 - 30e^4 - 960e^2 - 2000 \rightleftharpoons 0$
Diuidatur $-e^6 - 20e^4 - 40e^2 + 2000$
per $e^2 - 50$

$0 - 50e^4 - 1000e^2\ 0$
$- 50e^4 - 1000e^2$

$0 \quad 0$

-2000 / -50	$+40$
$-1000e^2$ / -50	† $20e^2$
$-50e^4$ / -50	$+1e^4$

Fit quotiens $1e^4 + 20e^2 + 40$
Huius autem æquationis $e^6 - 30e^4 - 960e^2 - 2000 \rightleftharpoons 0$.
Radix eſt 50.

Tertia æquatio.

Sit æquatio $e^6 + 32e^4 - 380e^2 - 400 \rightleftharpoons 0$
Diuidatur $-e^6 - 42e^4 - 40e^2 + 400$
per $e^2 - 10$

$0 - 10e^4 - 420e^2\ 0$
$- 10e^4 - 420e^2$

$0 \quad 0$

-400 / -10	$+40$
$-420e^2$ / -10	$+42e^2$
$-10e^4$ / -10	$+1e^4$

Fit quotiens $1e^4 + 42e^2 + 40$
Huius æquationis $e^6 + 32e^4 - 380e^2 - 400 \rightleftharpoons 0$.
Radix eſt 10.

SCHOLION

SCHOLION.

Hic porro conſiderandum occurrit, ſuprapoſitam diuiſionem trifariam inſtitui poſſe, vel ſubtrahendo, vel addendo; vel partim ſubtrahendo, & partim addendo. Prius exemplum, cùm diuideremus $+e^6 - 8e^4 - 124e^2 - 64$ *per* $e^2 - 16$, *itaut fieret quotiens* $+1e^4 + 8e^2 + 4$, *inſtituta eſt partim ſubtrahendo, & partim diuidendo, ſubtrahendo, quia ſcribimus 64, affectum nota —, quæ reuera prouenit ex multiplicatione* $+4$ *per* -16, *vnde ſubtrahitur* -64 *ex* -64; *inſuper ſcribimus* e^6 *affectum nota +, quæ re vera prouenit ex multiplicatione* $+1e^4$ *in* $+e^2$, *at verò* $4e^2$, *ſcribimus affectum nota —, contraria illi, quæ alioquin prorſus multiplicatione producitur, fitque additio ipſius* $-4e^2$ *ad* $-124e^2$. *Deinde ſcribimus* $8e^4$, *affectum nota contraria illi, quæ alioquin multiplicatione producitur, & fit additio ipſius* $-8e^4$. *Itaque operatio ipſa facta eſt partim ſubtrahendo, & partim addendo. In idem autem recidit; ſi fiat omnino ſubtrahendo; nam ſi loco* $-4e^2$, *ſcribatur* $+4e^2$, *inſtituta ſubtractione ob notas affectionis contraria, prouenit* $-128e^2$, *nec diſſimiliter, ſi loco* $-8e^4$ *ſcriberemus* † $8e^4$, *inſtituta ſubtractione, proueniet* $-e^4$, *vt patet ex præceptis ſupratraditis. Quod ſi omnino addendo fieri deberet; Primò 64, ſcribemus affectum nota + contraria illi, quæ multiplicatione producitur, nec diſſimiliter de alijs; vnde ſtabit hoc modo. Præſtat tamen inſtituere ipſam operationem ſemper ſubtrahendo.*

Notanda quædam circa ſupradicta.

In idem recidit ſi operatio fiat ſubtrahendo.

Præſtat inſtituere operationẽ ſemper ſubtrahendo.

Diuidatur $+e^6 - 8e^4 - 124e^2 - 64$

per $e^2 - 16$ $\quad -e^6 - 8e^4 - 4e^2 + 64$

$$0 - 16e^4 - 128e^2 \quad 0$$
$$-16e^4 - 128e^2$$
$$0 \qquad 0$$

$$\begin{array}{r|l} -64 & +4 \\ -16 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -128e^2 & +8e^2 \\ -16 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -16e^4 & +1e^4 \\ -16 & \end{array}$$

Cætera autem exempla facta ſunt ſempèr addendo. Hæc autem animaduertiſſe iuuat ad maiorem ſupradictorum explicationem. Superioris operationis comprobatio ſic ſe habet. Itaque huiuſmodi operatio perficitur, vel partim ſubtrahendo, & partim addendo, vel ſubtrahendo tantùm, vel addendo tantùm vt ſupra explicatum fuit.

$$e^4 \dagger 8e^2 + 4$$
$$e^2 - 16$$
$$-16e^4 - 128e^2 - 64$$
$$e^6 + 8e^4 + 4e^2$$
$$e^6 - 8e^4 - 124e^2 - 64$$

Hæc pragmatia facta eſt addendo.

Sit æquatio $+e^6 + 10e^4 - 44e^2 - 48 = 0$

Diuidatur $-e^6 - 14e^4 - 12e^2 + 48$

per $e^2 - 4$ $\quad 0 - 4e^4 - 56e^2 \quad 0$

$$-4e^4 - 56e^2$$
$$0 \qquad 0$$

$$\begin{array}{r|l} -48 & +12 \\ -4 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -56e^2 & +14e^2 \\ -4 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -4e^4 & \dagger 1e^4 \\ -4 & \end{array}$$

Huius æquationis $e^6 + 10e^4 - 44e^2 - 48 = 0$.
Radix eſt 4.

Hæc pragmatia instituta est subtrahendo.

Diuidatur $\dagger e^6 \dagger b^2 e^4 - 2c^2 e^4 - b^4 e^2 \dagger c^4 e^2 - b^6 - 2b^4 c^2 - b^2 c^4 \mid \maltese\ 2 b^2 c^2 e^2$

per $e^2 - b^2 - c^2) \dagger e^6 - b^2 e^4 - c^2 e^4 - 2b^4 e^2 \dagger c^4 e^2 - b^6 - b^4 c^2 - b^2 c^4 \mid \maltese\ 2 b^2 c^2 e^2$

$\dagger 2 b^2 e^4 - c^2 e^4 \dagger b^4 e^2 \qquad - b^4 c^2 \qquad \maltese\ b^2 c^2 e^2$

$\dagger 2 b^2 e^4 - c^2 e^4 \dagger b^4 e^2 \qquad\qquad\qquad \maltese\ b^2 c^2 e^2$

$0 \quad 0 \quad 0 \qquad\qquad\qquad\qquad 0$

Quotiens $\dagger e^4 \dagger 2 b^2 e^2 - c^2 e^2 \dagger b^4 \dagger b^2 c^2$

$$\frac{\maltese\ e^6}{\maltese\ e^2} \Big| \frac{\maltese\ e^4 \maltese\ 2 b^2 c^4}{\maltese\ e^2} \Big| \frac{\maltese\ 2 b^2 e^2 - c^2 e^4}{\maltese\ e^2} \Big| - c^2 e^2$$

$$\frac{\maltese\ b^4 e^2}{\maltese\ e^2} \Big| \maltese\ b^4 \frac{\maltese\ b^2 c^2 e^2}{\maltese\ e^2} \Big| \maltese\ b^2 c^2$$

[illegible]

Huius autem æquationis radix eſt $b^2 \dagger c^2$. Animaduertendum autem eſt, nos ſuperiùs non vſurpaſſe e^6 pro quantitate ſex dimenſionum, ſed pro quantitate trium tantummodo; ſiquidem in illa æquatione non reperiuntur e^5, e^3, neque e; Ac proinde commodiſſimè pro illa ſubſtitui poteſt iſta $u^3 \maltese\ b^2 u^2 - 2 c^2 u^2 - b^4 u \dagger c^4 u - b^6 - 2 b^4 c^2 - b^2 c^4 \sqsupset 0$. Nempè ſupponendo u, æquari e^2, atque ſubſtituendo u^2, in locum ipſius e^4, & u^3, in locum ipſius e^6. Cognito autem pretio huius u, extractione radicis ex eodem; peruenitur in cognitionem ipſius e.

Neque diſſimili modo; ſi ſit æquatio $a^4 \sqsupset - b a^2 \maltese\ c^2$; Poſſunt enim quatuor dimenſiones ipſius a^4, ad duas reuocari, & ità æquatio inſtitui poterit $e^2 \sqsupset - b e \maltese\ c^2$. Supponendo nimirum e^2, æquari a^4, atque adeò e, æquari a^2; quamobrem ſicuti illius æquationis ſit radix $e \sqsupset - \frac{1}{2} b \maltese\ \text{℞}(\frac{1}{4} b^2 \maltese\ c^2)$ ità radix illius erit $a \sqsupset \text{℞}(- \frac{1}{2} b \maltese\ \text{℞}(\frac{1}{4} b^2 \maltese\ c^2))$.

Proponitur æquatio, eiuſque reductio.

Sit æquatio $a^4 \maltese\ 30 a^2 \sqsupset 25056$.

Poteſt ad hanc reuocari $e^2 \maltese\ 30 e \sqsupset 25056$; in idem enim recidit cum ſuperiori; eadem enim radix extrahitur. Cùm autem ſupponeremus e, æquari a^2, innotuit verò 144, pro pretio ipſius e; ergo a^2, valebit 144, quare a, valebit 12, vt enim a, eſt radix ipſius a^2, ità 12, eſt radix numeri 144.

Quando fuerit æquatio in qua incognita quantitas quatuor eſt dimenſionum.

Quod ſi fuerit æquatio, in qua quidem incognita quantitas quatuor dimenſiones habeat, ſublatis ſurdis, fractiſque numeris; quando ij interceſſerint: perpendendum eſt, num binomium reperiri poſſit conſtans ex incognita quantitate †, vel —, aliqua quantitate diuidente ſine fractione terminum vltimum æquationis, quod quidem binomium totam diuidat ſummam. Si enim hoc binomium reperiatur, aut cognita quantitas, huius binomij erit quæſita radix, vel ſaltem diuiſione confecta, relinquentur tantummodo in æquatione tres dimenſiones, adeò vt illa iterum examini ſit exponenda. Si verò non contingat huiuſmodi binomium reperiri: oportet augendo, minuendoque radicis valorem, tollere ſecundum terminum ſummæ; deindè ipſam ad aliam reuocare, quæ tres tantummodo dimenſiones contineat.

Proponitur æquatio, & Ars explicatur, qua fiat reductio.

Si proponatur æquatio $\maltese\ a^4 * \ p a^2 \ q a \ r \sqsupset 0$.

Oportebit æquationem hunc in modum ſcribere:

$$\maltese\ e^6 \quad 2 p e^4 \quad \dagger \frac{p^2}{4 r} e^2 \quad - q^2 \sqsupset 0$$

Id autem maiuſculis characteribus intueri licebit, vt hìc inferiùs patet.

† AQQ*

$$\dagger\, AQQ^* \quad PAQ \quad QA \quad R = o.$$

Hoc eſt ✠ AQQ* P in AQ Q in A R = o.
Deindè verò oportebit ſcribere, vt infrà.

$$\dagger\, ECC \quad PEQQ2 \quad \begin{matrix}\dagger\, PQ \\ R\ 4\end{matrix} \quad EQ - QQ^{\cdot\prime\prime} = o.$$

Hoc eſt † ECC P in EQQbis $\begin{matrix}\dagger\, PQ \\ R\ \text{quater}\end{matrix}$ EQ — Q quadrato = o.

Ad ſigna verò ✣, & — quod attinet, illud non ignorandum; quod ſi habeatur ✠ p, in priori æquatione: in poſteriori ſcribi debet ✣ 2 p; vel ſi habeatur — p, ponere oportet — 2 p, & contrà; quod ſi habeatur ✠ r, hic oportebit ſcribere — 4 r; & ſi demum ſit vel ✣, vel — q, perpetuò hic ſcribere oportet — q^2, & † p^2, ſeltem cum a^4, & e^6, ſignis ✠ affectæ affectæ ſupponuntur. Quod ſi ſignis — afficiantur; oppoſitum fieri debet. *Notanda quædam circa ſigna ✣, & —*

Sit æquatio, vt vides ✣ a^4 * — 4 a^3 — 8 a ✠ 35 = o.

$$\text{✠}\, a^4 * - 4a^3 - 8a \;\text{✣}\; 35 = o.$$

$$\text{✠}\, e^6 - 2p\,e^4 \quad \begin{matrix}\text{✣}\, p^2 \\ -4r\end{matrix} \quad e^2 - q^2 = o.$$

$$\text{✣}\, e^6 - 8e^4 - 124e^2 - 64 = o.$$

Loco igitur illius æquationis oportet ſcribere ✣ e^6 — 8 e^4 — 124 e^2 — 64 = o

Dicebamus enim æquationem ſic ordinandam eſſe; vt ſit huiuſmodi.

$$\text{✠}\, e^6 - 2p\,e^4 \quad \begin{matrix}\text{✠}\, p^2 \\ -4r\end{matrix} \quad e^2 - q^2 = o.$$

Cum prius eſſet † a^4 * — 4 a^3 — 8 a ✣ 35 = o, hoc eſt a^4 * — p a^3 — q a ✠ r = o.

Cum igitur quantitas ſuperius poſita p, ſit — 4; proinde erit — 8 e^4; ſiquidem hic eſt 2 p e^4; illa verò quæ ponebatur r, erit 35, quater ductus in e^2, cum prius eſſet 36; hic enim ponitur 4 r e^2; atque adeò $\begin{smallmatrix}+p^2\\-4r\end{smallmatrix}$ e^2; erit ✠ 16 e^2 — 140 e^2, hoc eſt erit totum id, quod diximus — 124 e^2. Cum demum q, ſit 8, proinde erit — 64, loco ipſius q^2. Cæterum illius æquationis e^6 — 8 e^4 — 124 e^2 — 64 = o, hoc eſt e^3 — 8 e^2 — 124 e — 64 = o, radix eſt 16. *Explicatio ſupradictorum.*

Verum poſſumus in his perficiendis operationibus adhibere pro quantitatibus cognitis quaſcumque ſpecies, ſiuè elementa: qua propter ſi minus arridet, vti characteribus illis p, q, r, loco ipſorum ſubſtitui poſſunt, b, d, g, Vietæ familiares. *Obſeruatio quædam.*

Sit æquatio a^4 * — 25 a^2 — 60 a — 36 = o; cuius radix eſt 6; Iuxta prædicta Nos huiuſmodi æquationem ad hanc reuocabimus e^6 — 50 e^4 ✠ 769 e^2 — 3600 = o. Huius autem æquationis radix eſt 16.

 Si

Sit æquatio $a^4 * - 25 a^2 - 60 a - 36 = 0$; cuius radix eſt 6; Iuxtà prædicta nos huiuſmodi æquationem ad hanc reuocabimus $e^6 - 50 e^4 + 769 e^2 - 3600 = 0$. Huius autem æquationis radix eſt 16.

Proponitur alia æquatio. Sit æquatio $+ a^4 * - 17 a^2 - 20 a - 6 = 0$. Reducetur ad hanc, nimirum $+ e^6 - 34 e^4 + 313 e^2 - 400 = 0$. Huius autem æquationis radix eſt 16; illius vera radix erat ℞ $7 + 2$, tres autem falſæ ℞ $7 - 2$, $2 +$ ℞ 2, & $2 -$ ℞ 2.

Innoteſcit autem huius æquationis radix 16, Arte iam ſuperiùs explicata; qua cognita prædicta æquatio in duas alias diuidetur, vt inferiùs dicam. Innoteſcit inquam radix 16, vt ſupra docuimus. Vt autem ſuperiori exemplo rem illuſtremus, præſtabit hanc operationem ſubijcere.

Exemplum superius. Hæc operatio facta est addendo.

Diuidatur $+ e^6 - 50 e^4 + 769 e^2 - 3600 = 0$

per $e^2 - 16) - e^6 + 34 e^4 - 225 e^2 + 3600$

$$0 - 16 e^4 + 544 e^2 \quad 0$$

$$- 16 e^4 + 544 e^2$$

$$0 \qquad 0$$

$$\begin{array}{r|l} -3600 & +225 \\ -16 & \\ +544 e^2 & -34 e^2 \\ -16 & \\ -16 e^4 & +e^4 \\ -16 & \end{array}$$

Patet igitur iſtius æquationis radicem eſſe 16.

Exemplum alterum. Hæc operatio facta est addendo.

Diuidatur $+ e^6 - 8 e^4 - 124 e^2 - 64 = 0$

per $e^2 - 16) - e^6 - 8 e^4 - 4 e^2 + 64$

$$0 - 16 e^4 - 128 e^2 \quad 0$$

$$- 16 e^4 - 128 e^2$$

$$0 \qquad 0$$

$$\begin{array}{r|l} -64 & +4 \\ -16 & \\ -128 e^2 & +8 e^2 \\ -16 & \\ -16 e^4 & +e^4 \\ -16 & \end{array}$$

Conſtat etiam huius æquationis radicem eſſe 16.

Proponitur æquatio. Ita quoque ſi ſit æquatio huiuſmodi; nimirum.

$$+ u^4 * \begin{matrix} + \frac{1}{2} b^2 \\ - c^2 \end{matrix} u^2 \begin{matrix} - b^3 \\ - b c^2 \end{matrix} u \begin{matrix} + \frac{1}{16} b^4 \\ - \frac{1}{4} b^2 c^2 \end{matrix} = 0.$$

Scribatur hæc.

$$e^6 \begin{matrix} + b^2 \\ - 2 c^2 \end{matrix} e^4 \begin{matrix} - b^4 \\ + c^4 \end{matrix} e^2 \begin{matrix} - b^6 \\ - 2 b^4 c^2 \\ - b^2 c^4 \end{matrix} = 0.$$

Eſt enim $\frac{1}{2} b^2 - c^2$, idem quod p, & $\frac{1}{4} b^4 - b^2 c^2 + c^4$, idem quod p^2, & prætereà $- \frac{1}{4} b^4 + b^2 c^2$, idem eſt quod 4 r, atque demum $- b^6 - 2 b^4 c^2 - b^2 c^4$, idem eſt quod $- q^2$.

Cognita æquationis radice, vt ſuprà dicebamus, diuidetur æquatio ope ipſius quidem radicis in duas, ex quibus prioris æquationis radices deducentur; exempligr.

Superio-

Superioris ęquationis $+ e^6 - 50 e^4 + 769 e^2 - 3600 = 0$, ad quam altera illa $+ a^4 * - 25 a^2 - 60 a - 36 = 0$, reducebatur; illius inquam æquationis per diuiſionem radix innotuit 16, vt vidimus. Nunc ità procedendum, ſcilicet pro æquatione $+ a^4 *$, $p a^2$, $q a$, $r = 0$. Oportet has duas æquationes ſcribere. *Explicatio ſupradictorum.*

$$+ a^2 - e a + \tfrac{1}{2} e^2 \quad \tfrac{1}{2} p \quad \tfrac{q}{2e} = 0.$$
$$+ a^2 + e a + \tfrac{1}{2} e^2 \quad \tfrac{1}{2} p \quad \tfrac{q}{2e} = 0.$$

Obſeruandum eſt autem circa ſigna +, & —; hìc data opera prætermiſſa fuiſſe. Si enim in pręcedenti æquatione habeatur $+ p$, in vtraque iſtarum duarum poni debet $+ \tfrac{1}{2} p$, & ſi in priori habebatur $- p$, hìc poni debet $- \tfrac{1}{2} p$. At verò ponendum eſt $+ \tfrac{q}{2e}$, in vna ipſarum ęquationum, vbi habebatur $- e a$, & $- \tfrac{q}{2e}$, in altera, vbi habetur $+ e a$, prout habetur $+ q$, in prima, & contrario quidem modo; ſi ibi adſit $- q$, poni debet $- \tfrac{q}{2e}$ in illa, vbi nimirum eſt ea; & $\tfrac{q}{2e}$ in altera, vbi reperitur $+ e a$; Sit exemplum ſuperiùs poſitum $+ a^4 * - 25 a^2 - 60 a - 36 = 0$; reuocatur ad hanc; puta $+ e^6 - 50 e^4 + 769 e^2 - 3600 = 0$. Huius æquationis radix eſt 16, diuiſionis præſidio comparata. Loco igitur illius æquationis beneficio radicis inuentæ, duæ ſunt æquationes hunc in modum conſcribendæ. *Obſeruatio circa ſigna +, & —.*

$+ a^2 - 4 a - 12 = 0$ Vel $+ a^2 - 4 a = 12$.
$+ a^2 + 4 a + 3 = 0$

Iam igitur æquationes habemus non tranſcendentes gradum quadraticum. Eſto igitur illa prior ad hanc formam per antitheſin reuocata.

$a^2 - 4 a =$	12
2	4
2	
—	—
	16
4	4
	2
	—
	6

Dimidium numeri radicum eſt 2, cuius quadratum 4 additum 12 comparationis homogeneo facit 16, cuius latus quadratum eſt 4, cui addito 2, dimidio numeri radicum fit 6, radix illius ęquationis, nimirum $a^4 - 25 a^2 - 60 a - 36 = 0$. *Explicatio ſupradictorum.*

Cæterùm hæc æquatio diuiſa fuit in illas duas methodo ſuperius inſinuata. Si enim e^2, eſt 16, vtique e, erit 4, quare $\tfrac{1}{2} e^2$, erit 8; at verò 25, idem erit quod p; inſuper 60, idem quod q, quamobrem $\tfrac{1}{2} e^2 - \tfrac{1}{2} p - \tfrac{q}{2e}$, idem erit quod $- 12$; quapropter erit æquatio, vt ſupra $+ a^2 - 4 a - 12 = 0$.

+ 8		+ $\tfrac{1}{2}$	e^2
— 12 $\tfrac{1}{2}$		— $\tfrac{1}{2}$	p
— 7 $\tfrac{1}{2}$		— $\tfrac{q}{2e}$	
— 20			
+ 8			
— 12			

Verùm enim verò æquatio illa $a^2 + 4 a + 3 = 0$, impoſſibilis eſt, nullam habens radicem neque veram, neque falſam; proindè ſolùm habebit radices, quas dicunt imaginarias.

SCHOLION

SCHOLION.

Aduertenda quædam in gratiã ſupradictorum.

VT quæ ſuperiùs tradidimus meliùs intelligi poſſint, iuuabit hic aliqua adnotare. Iam ſuperiùs ordinatum eſt; cùm de reductione æquationis quadrato quadraticæ, ad cubicam ageremus; ordinatum eſt inquam loco illius æquationis $\dagger\, a^4 * .\ p\, a^2 .\ q\, a .\ r . = 0$ *ſcribendam eſſe* $\dagger\, e^6 : 2\,p\,e^4 \ {}^{pp}_{4r}\ e^2 - q^2 = 0$, *& quantùm ad ſigna quidem abundantiæ, atque defectus iuxta methodum hanc Carteſianam hoc obſeruandum eſſe, vt ſi in præcedenti æquatione habeatur* $+\, p$; *in poſteriori conſtitui debeat* $\dagger\, 2\,p$; *quod ſi in illa habeatur* $-\,p$; *hic conſtitui debeat* $-\,2\,p$; *at verò contra; ſi ibi reperiatur* $\dagger\, r$; *hic poni debeat* $-\,4\,r$, *vel ſi ibi habeatur* $-\,r$, *hic ſcribi debeat* $\dagger\, 4\,r$, *& ſiue in præcedenti æquatione ſit* $+\,q$, *ſiue* $-\,q$; *ſemper in poſteriori ponendum eſſe* $-\,q^2$, *&* $\dagger\, p^2$ *ſaltem ſi* a^4, *&* e^6 *ſignis* $\dagger$ *affectantur; contra verò ſi ſigno* $-$ *afficerentur. Sed hæc ſupra iam declarata ſunt. Si itaque fuerit æquatio.*

$$\begin{array}{lllll} a^4 * & \frac{1}{2}\,b^2 & -\,b^3 & +\,\frac{1}{16}\,b^4 & \\ & a^2 & a & & = 0 \\ & -\,c^2 & -\,b\,c^2 & -\,\frac{1}{4}\,b^2c^2 & \end{array}$$

Declarationis continuatio.

Propterea quod termino p reſpondet $\frac{1}{2}\,b^2 - c^2$; *vtique 2 p erit* ${}^{b^2}_{-2c^2}$.

Et quoniam termino q reſpondet $-\,b^3 - b\,c^2$, *ſi loco ipſius q, reponi debet* $p^2 \dagger 4\,r$, *vt Ars ipſa præcipit, atque ipſi p dicebamus reſpondere* $\frac{1}{2}\,b^2 - c^2$; *oportet proinde ducere quadratice ipſum*

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}\,b^2 - c^2 \\ \frac{1}{2}\,b^2 - c^2 \\ \hline -\,\frac{1}{2}\,b^2c^2 \dagger c^4 \\ \frac{1}{4}\,b^4 - \frac{1}{2}\,b^2c^2 \\ \hline \frac{1}{4}\,b^4 - b^2c^2 + c^4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -\,\frac{16}{16}\,b^4 + \frac{1}{1}\,b^2c^2 \\ \frac{4}{16}\,b^4 - b^2c^2 \dagger c^4 \\ \hline -\,b^4 + c^4 \end{array}$$

& fiet $\frac{1}{4}\,b^4 - b^2c^2 \dagger c^4$ *reſpondens ipſi* p^2. *Quoniam verò debet eſſe* $\dagger\ {}^{pp}_{4r}$; *& in æquatione ipſi r reſpondet* $\frac{1}{16}\,b^4 \dagger \frac{1}{4}\,b^2c^2$ *oportet ob id ſumere quadruplum ipſius, nempe* $\frac{16}{16}\,b^4 \dagger b^2c^2$; *& hoc addendum eſt ipſi* $\frac{1}{4}\,b^4 - b^2c^2 \dagger c^4$, *quod p quadrato reſpondere dicebamus. Facta autem additione prouenit* $-\,b^4 + c^4$. *Quoniam denique termino q, reſpondet* $b^3 - b\,c^2$ *proinde accipere oportet huius quadratum, nimirum* $-\,b^6 - 2\,b^4c^2 - b^2c^4$, *& ita ſcribenda eſt æquatio.*

$$\begin{array}{llll} & \dagger\, b^2 & -\,b^4 & -\,b^6 \\ e^6 & e^4 & e^2 & -\,2\,b^4c^2 = 0 \\ & -\,2\,c^2 & +\,c^4 & -\,b^2c^4 \end{array}$$

Huius æquationis inſtituitur diuiſio modo ſupra explicato.

Nec

Æquationum limites.

Nec prętermittam, haud mediocriter conferre ad ęquationes explicandas, earumque latera exhibenda, cùm numeris pręſertim tractantur, limites præfinire, inter quos ipſarum æquationum radices coercentur. Hac enim Arte cognoſcimus ſaltem radicem minorem eſſe aliquo numero, altero autem maiorem. Itaque

Quando fuerint æquationes quadraticæ.

Prima huius ordinis æquatio, cuius limites inquiruntur.

Si proponatur $a^2 - ba + z^2$ æquari o, per metatheſin z^2 æquabitur $ba - a^2$. Prima autem parte exiſtente reali, alteram quoque realem eſſe oportet. Vnde neceſſe eſt ba, maius eſſe, quàm a^2; & vtroque termino per a diuiſo; erit b maior, quàm a, & per antitheſin a^2 æquabitur $ba - z^2$, quare pars altera realis erit, & ba maius erit, quàm z^2. Diuiſo vtroq; termino per b; erit a maior, quàm $\frac{zz}{b}$, quamobrem vtraq; radix æquationis propoſitæ maior eſt, quàm $\frac{zz}{b}$, minor tamen, quàm b.

Adnotanda quædam.

Hic autem perpende, nimirum in huiuſmodi æquatione, ſi homogeneum datæ menſuræ applicetur ad coefficientem longitudinem ſublateralem, magnitudinem ortiuam eſſe minorem vtraque æquationis radice; ipſamque coefficientem longitudinem iam dictam maiorem eſſe vtraque æquationis radice.

Secunda æquatio, cuius limites inquiruntur.

Proponatur $a^2 - ba - z^2$ æquari o, & per antitheſin a^2 æquabitur $ba + z^2$; quare a^2 maius erit, quàm z^2, & a maior erit, quàm z, propterea za maius erit, quàm z^2. Vnde a^2 minus erit, quàm $ba + za$; ac ob id ſi vtraque pars diuidatur per a; erit quidem a minor, quàm $b + z$. Deinde quoniam a^2 æquatur $ba + z^2$, erit a^2 maius, quàm ba; propterea vterque terminus ſi diuidatur per a; erit a maior, quàm b; & ba maius, quàm b^2; cùmq; a^2 æquetur $ba + z^2$, erit a^2 maius, quàm $b^2 + z^2$; nempe a, maior erit, quàm $\sqrt{b^2 + z^2}$, & quia deinde a maior eſt, quàm z, erit ba maius, quàm bz; & a^2 maius, quàm $+ z^2 bz$, nimirum a maior erit, quàm $\sqrt{bz + z^2}$; ob id radix propoſitæ æquationis maior erit, quàm maxima harum duarum $\sqrt{b^2 + z^2}$, & $\sqrt{bz + z^2}$, minor tamen, quàm $b + z$.

Aduertenda quædam.

Nota radicē eſſe maiorem maxima duarum quarum vna poteſt aggregatū planorum, quorum vnum eſt quadratum coefficientis longitudinis ſublateralis, aliud eſt homogeneum datæ menſuræ, altera poteſt aggregatum planorum, quorum vnum fit ex abs coefficiente, in rectam quæ poteſt homogeneum datæ menſuræ; alterum eſt ipſum homogeneum; eſt tamen minor aggregato ex coefficiente, & rececta, quæ poteſt iſum homogeneum datæ menſuræ.

Tertia æquatio, cuius limites indagantur.

Proponatur $a^2 + ba - z^2$ æquari o. Per antitheſin $a^2 + ba$ æquabitur z^2; quaproter $\frac{zz}{b}$ maius erit, quàm a. Deinde eadem exiſtente æquatione, z^2 erit maius, quàm a^2, ac ob id z maior erit, quàm a; propterea za maius erit, quàm a^2, ſed $a^2 + ba$ æquabatur z^2; ergo $za + ba$ maius erit, quàm z^2, diuiſa proinde vtraque æquationis parte per $b + z$, fiet a maior, quàm $\frac{zz}{b+z}$. Itaque radix a, maior erit, quàm $\frac{zz}{b+z}$; minor tamen, quàm $\frac{zz}{b}$.

Adnotanda quædam.

Nota in hac ęquatione radicem eſſe maiorem, quàm ortiua magnitudo, proueniēs ex applicatione homogenei datę mēſ. ad coefficiētē lōgit. plus ea, quę poteſt ipſū homogeneū; ſed minorē, quā ortiua magnitudo ex applicatione homogenei ad coefficiētē lōgitudinē.

Quando fuerint æquationes cubicæ.

Quod ſi fuerint æquationes cubicæ, in quibus ſecundus terminus deſit: hac Arte eadem inquiruntur.

Prima huius ordinis æquatio, cuius limites inquiruntur.

Proponatur $a^3 * - b^2 a + z^3 = o$. Per metatheſin quidem a^3 æquabitur $+ b^2 a - z^3$, atque adeo $b^2 a$ maius erit, quàm z^3, quamobrem vtroque termino diuiſo per b^2, & a maior erit, quàm $\frac{z^3}{bb}$; deinde per metatheſin $b^2 a - a^3$ æquabitur z^3; ac ob id b^2 maius erit, quàm a^2, & b maior, quàm a. Itaque vtraque radix a propoſitæ æquationis maior erit, quàm $\frac{z^3}{bb}$, & minor, quàm b.

Adnotanda quædam.

Hic obſerua, radicem vtramque maiorem eſſe ortiua magnitudine ex applicatione homogenei datæ menſurę ad coefficiens planum ſublaterale, at verò minorem eſſe magnitudine, cuius quadratum eſt coefficiens planum prædictum.

Secunda æquatio, cuius limites indagantur.

Proponatur $a^3 * - b^2 a - z^3$ æquari o. Per antitheſin quidem $a^3 - b^2 a$ æquabitur z^3, & a^2 maius erit, quàm b^2, & a maior erit, quàm b, & $a^3 - z^3$ ęquabitur $b^2 a$, atque adeo a^3 maior erit, quàm z^3, & a maior, quàm z, vnde $z^2 a$ maius, quàm z^3. At verò per metatheſin fit $b^2 a + z^3$ ęquale a^3; quare $b^2 a + z^2 a$ maius erit, quàm a^3, & vtraque parte applicata ad a, & $b^2 + z^2$ erit maius, quàm a^2, ob id a minor erit, quàm $\sqrt{b^2 + z^2}$. Reperta igitur eſt a radix æquationis propoſitæ maior, quàm b, & z; at verò minor, quàm $\sqrt{b^2 + z^2}$.

Quod

Aduertenda quædam.

Quod ſi non placet adhibere latus cubicum ipſius z^3 loco z^3; in vinculo aſſumi poſſet quantitas aliqua, quæ minor non ſit; quod aſſequemur citra laborem cognitis tribus dimenſionibus ipſius z^3, ſumendo loco ipſius z^3, rectangulum ſub duabus quantitatibus, quarum alterutra minor non ſit ipſa z.

Obſeruanda quædam.

Hic autem obſerua huius æquationis radicem maiorem eſſe, quàm illa, cuius cubus eſt homogeneum datæ menſuræ; & eandem radicem minorem eſſe ea magnitudine, quæ poteſt aggregatum ex plano coefficiente ſublaterali, & quadrato, cuius, cubus eſt homogeneum datæ menſuræ.

Proponitur eiuſdē ordinis æquatio cubica, cuius limites inquiruntur.

Proponatur $a^3 * + b^2 a - z^3$ æquari o. Per metatheſin a^3 æquabitur $z^3 - b^2 a$, quare $\frac{z^3}{b^2}$ erit maior, quàm a. Deinde erit quoque $b^2 a = z^3 - a^3$, atque adeo z^3 maior erit, quàm a^3, & ob id z maior, quàm a, ac propterea $z^2 a$ maius erit, quàm a^3. Sed per antitheſin propoſitæ æquationis eſt quoque $a^3 + b^2 a = z^3$, quare $b^2 a + z^2 a$ maius erit quàm z^3; Vtraque autem æquationis parte applicata ad $z^2 + b^2$ & a maior erit quàm $\frac{z^3}{z^2 + b^2}$; quare adinuenta fuit radix æquationis propoſitæ; puta a; maior, quàm $\frac{z^3}{b^2 + z^2}$ ſed minor quàm $\frac{z^3}{b^2}$, & z.

Hoc loco illud aduerte, nihil prohibere, quo minus loco z^3, accipiatur rectangulum duarum maximarum dimenſionū z^3, ad euitandā cubicæ radicis extractionē ex z^3.

Obſeruanda quædam.

Hic autem obſerua, magnitudinem ortiuam ex applicatione homogenei datæ menſuræ ad planum coefficiens ſublaterale, maiorem eſſe, quàm radix æquationis propoſitæ, & inſuper magnitudinem, cuius cubus eſt homogeneum datæ menſuræ maiorem eſſe, quàm eadem radix, & hanc ipſam radicem maiorem eſſe magnitudine ortiua ex applicatione homogenei datæ menſuræ ad aggregatum ex plano coefficiente ſublaterali, & quadrato eius, cuius cubus eſt homogeneum datæ menſuræ.

Quando ſunt æquationes cubicæ in quibus penultimus terminus deeſt.

Quòd ſi fuerīt æquationes cubicæ, in quibus penultimus terminus deſit, ita ratiocinādū.

Proponitur huius ordinis æquatio cubica.

Proponatur $a^3 - b a^2 * + z^3$ æquari o. Per metatheſin $a^3 + z^3$ æquabitur $b a^2$ quamobrē a^2 maius erit, quàm $\frac{z^3}{b}$. Rurſus z^3 æquabitur $b a^2 - a^3$, ac ob id b, maior erit, quàm a. Quęlibet igitur radicum a, propoſitæ æquationis maior erit, quàm ℞ $\frac{z^3}{b}$, & minor, quàm b.

Proponatur $a^3 - b a^2 * - z^3$ æquari o. Per metatheſin $a^3 - b a^2$ æquabitur z^3 quare a, maior erit, quàm b; Rurſus $a^3 - z^3$ æquabitur $b a^2$, ac proinde a maior erit, quàm z & a^3 maius, quàm z^3, & inſuper $z a^2$ maius, quàm z^3.

Sed per tranſpoſitionem $b a^2 + z^3$ æquatur a^3. Propterea $b a^2 + z a^2$ maius erit, quàm a^3. Diuidatur vtraque pars per a^2, & erit $b + z$ maior, quàm a. Inuenta igitur eſt radix a, æquationis propoſitæ, maior, quàm b, & z. Sed minor, quàm $b + z$. Hinc verò perſpicuè colligitur ad euitandam radicis cubicæ extractionem ex z^3, quod loco z, ſumi poſſit minor trium dimenſionum ipſius z^3, quando a, maior eſt, & quando minor perhibietur, quàm $b + z$, cùm tunc loco z maxima trium dimenſionum ipſius z^3, accipi poſſit.

Proponitur æquatio cubica eiuſdem ordinis.

Proponatur $a^3 + b a^2 * - z^3$ æquari o. Per metatheſin fiet $a^3 = z^3 - b a^2$ atque adeo $\frac{z^3}{b}$ maius erit, quàm a^2, eſt ſiquidem $b a^2 = z^3 - a^3$ ac ob id z maior, quàm a, & $z a^2$ maius, quàm a^3. Sed $a^3 + b a^2$ æquatur z^3. Proinde $z a^2 + b a^2$ maius erit, quàm z^3, nimirum vtraque æquationis parte diuiſa per $z + b$ erit a^2 maius, quàm $\frac{z^3}{z + b}$ quare a radix ęquationis propoſitæ maior eſt, quàm ℞ $\frac{z^3}{b + z}$ at verò minor quàm ℞ $\frac{z^3}{b}$, & z. Conſtat præterea $z^2 a + b z a$ maius eſſe, quàm z^3, & $z a + b a$, maius, quàm z^2, ac proinde a maior; quàm $\frac{z^2}{b + z}$ cùm z maior ſit quàm a.

Si verò in ęquationibus cubicis omnes termini extent, ita ratiocinandum.

Quando in æquationibus cubicis omnes termini extant.

Proponatur $a^3 - b a^2 + d^2 a - z^3$ æquari o. Per metatheſin $a^3 - b a^2$ æquabitur $z^3 - d^2 a$. Propterea ſi a, æquetur ipſi b, etiam a ipſi $\frac{z^3}{d^2}$ æquabitur. Quamobrem ſi contra b, æquetur $\frac{z^3}{d^2}$ hoc eſt $b d^2$ æquetur z^3 erit ſimiliter a propoſitę ęquationis radix, æqualis b, & $\frac{z^3}{d^2}$. Inſuper ſi $a^3 - b a^2$ eſt realis ſcilicet a, maior ſit, quàm b, etiam $z^3 - d^2 a$, realis erit, & ob id $\frac{z^3}{d^2}$ maior quàm a. Quod ſi eadem quantitas $a^3 - b a^2$ ſit minor nihilo, fiat metatheſis hunc in modum $b a^2 - a^3 = d^2 a - z^3$. Quoniam verò ſupponitur $b a^2 - a^3$ realis eſſe; nempe b maior, quàm a; propterea $d^2 a - z^3$ etiam realis erit, atque adeo. a, erit maior, quàm $\frac{z^3}{d^2}$.

Itaque reperta eſt ęquationis radix ęqualis b, & ipſi $\frac{z^3}{d^2}$ cum hi termini ſint inter ſe ęquales

Simili modo ratiocinandum, tàm in æquationibus huius, quàm alterius cuiuscunque ordinis, &c. de quibus, adeundus eſt Florimondus de Beaune, à Bartolino impreſſus.

In-

Numeris hactenus dicta declarantur. 128.
Zetetica. ibid.
Scholion. ibid.
Superiùs dicta Geometriæ conſentire, demonſtratur. ibid.
Explicatur æquatio apophatica. 129.
Supradictorum æquationum natura, atque conſtitutio quomodo deprehendatur. ibid.
Aliæ quædam, & primo ſimplicium, deinde compoſitarum æquationum conſtitutiones. ibid.
Conſtitutio ſimplicis æquationis ex duabus, quarum unam eſt vera, altera falſa. ibid.
Proponitur origo, aut æquatio, vnde conſtitutio deprehenditur. 130.
Proponitur æquatio, cuius conſtitutio inquiritur, & eſt cataphatica. ibid.
Cohærentia cum Superioribus, & hanc conſtitutionem cum præcedentibus cohærere oſtenditur. ibid.
Proponitur altera originaria æquatio, vnde conſtitutio deprehenditur. ibid.
Proponitur æquatio apophatica. 131.
Originaria æquatio, vnde amphibola. ibid.
Proponitur æquatio, cuius inquiritur conſtitutio. 132.
Quæ hucuſque dicta ſunt cum præcedentibus cohærere demonſtratur. ibid.
Conſtitutio eadem per ſyncriſin deprehenditur. ibid.
Hactenus dicta numeris explicantur. ibid.
Explicantur hactenus tradita. 133.
Quæ de ſuperiori æquatione dicta ſunt de cæteris quoque intelligenda. ibid.
Implicatioribus præferenda ſimpliciora. ibid.
Quadraticarum æquationum principia ſunt latera. ibid.
Conſtitutio ſuperioris æquationis ab Auctore adinuenta traditur, ac explicatur, vbi ſine Zeteticis, & ſine collatione æquationis cum alia, omnia haberi poſſe oſtenditur. ibid.
Alia inſtituitur hypotheſis. 134.
Proponitur ſecundum æquationis quadratica genus. ibid.
Æquationis amphibolæ conſtitutio apud Auctorem. ibid.
Æquationum cubicarum conſtitutio ex Zeteticis. ibid.
Proponitur æquatio cataphatica. ibid.
Zeteticum. ibid.
Zeteticum alterum. 136.
Numeris explicatur ſuperior æquatio. ibid.
Zeteticum. ibid.
Notanda quædam. ibid.
Scholion. ibid.
Hactenus tradita magis explicantur. ibid.
Aduertenda quædam. ibid.
Alexander Anderſonus allucinatus eſt, exiſtimans æquationes eſſe ſolidas, eò quòd in iis ſolida comparentur ad inuicem. ibid.
Explicatur ſolidarum æquationum natura. ibid.
Alia quoque ſunt Zetetica, è quibus depromitur cubicarum æquationum natura. ibid.
Proponitur æquatio cubica affirmatiua, & Zeteticum. ibid.
Proponitur æquatio cubica negatiua, & Zeteticum. ibid.
Proponitur æquatio cubica amphibola, & Zeteticum. ibid.
Theorema demonſtratum Analyticè, & Geometricè. 138.
Numeris ſupradicta declarantur. ibid.
Proponitur alia cubicarum æquationum conſtitutio ex Zeteticis; ſingularis tamen eſt, &c. ibid.
Æquatio, in qua cubus afficitur adiunctione ſolidi ſub latere, datoque coefficiente plano, & Zeteticum. 139.
Numeris omnia explicantur. ibid.
Æquatio, in qua cubus afficitur multa ſolidi ſub latere, datoque coefficiente plano; & Zeteticum. ibid.
Numeris tradita explicantur. ibid.
Æquatio, in qua cubus afficitur itidem adiunctione ſolidi ſub latere, &c. cum Zetetico. ibid.
Explicatio per numeros. ibid.
Æquatio, in qua itidem cubus afficitur multa ſolidi ſub latere, &c. cum Zetetico. ibid.
Explicatio per numeros. ibid.
Scholion. 140.
Proponitur, quod oſtendendum ſupereſt. ibid.
Theorema Analyticè, & Geometricè demonſtratum. ibid.
Aduertenda quædam. ibid.
Theoremata duo Analyticè, & Geometricè demonſtrata. 141.
Æquationum cubicarum conſtitutio proponitur indaganda. 142.
Proponitur æquatio, cum qua inſtituenda eſt comparatio. ibid.

Æquatio, cuius conſtitutio per comparationem inſpicitur. ibid.
Proponitur altera æquatio, cum qua inſtituenda eſt comparatio. ibid.
Summa ſupradictorum. ibid.
Supradictarum æquationum apud Auctorem conſtitutio. ibid.
Solidarum æquationum principia. ibid.
Altera rurſus proponitur æquatio, cuius conſtitutio inquiritur. ibid.
Suppoſitio duplex; vbi ea proponitur, quæ eſt amplectenda. ibid.
Proponitur æquationis negatiuæ conſtitutio ab Auctore itidem inuenta. 143.
Proponitur æquatio cubica amphibola, cuius conſtitutio, ex Auctoris ſententia inquiritur. 144.
Differendum proponitur de æquationibus cubicis ſub quadrato. ibid.
Quid deinceps agendum proponitur. 145.
Proponitur æquatio affirmatiua, & Zeteticum cum explicatione. ibid.
Numeris ſuperiora tractantur. ibid.
Proponitur æquatio negatiua, & Zeteticum cum explicatione. ibid.
Numeris ſuperiora tractantur. ibid.
Proponitur æquatio ambigua, & Zeteticum cum explicatione. ibid.
Numeris explicantur ſuperiùs tradita. 146.
Scholion. ibid.
Aduertenda quædam. ibid.
Theorema Analyticè, & Geometricè demonſtratum. ibid.
Theorema Analyticè, & Geometricè demonſtratum. 147.
Qua ratione earundem æquationum natura inquiratur. ibid.
Proponitur æquatio, cum qua inſtituenda eſt comparatio æquationis affirmatiuæ. ibid.
Proponitur æquatio, cum qua inſtituenda eſt comparatio æquationis negatiuæ. ibid.
Aduertenda quædam. 148.
Ratio explicandi prædictarum æquationum naturam, quam Auctor adinuenit. ibid.
Proponitur æquatio negatiua. ibid.
Proponitur æquatio amphibola. 149.
Inſinuatur, ſimilibus modis procedendum eſſe in diſquirenda natura cæterarum æquationum. ibid.
Proponitur æquatio negatiua, & amphibola. 150.
Supradictarum æquationum imitatione, cæterarum indagatur natura. ibid.

Alia traduntur, vnde licet Artifici, æquationum conſtitutionem, atque naturam indagare. Cap. XVIII. pag. 151.

Octo radicis alterationes afferuntur. ib. & 152.
Obſeruanda quædam. ibid.
Alteratio radicis per additionem. ibid.
Explicatio ſupradictorum. ibid.
Æquationes tranſmutantur alterata radice. ibid.
Tranſmutatio, quæ fit inuariata radice. 153.
Aſcenſus, vel deſcenſus climacticus duplex eſt, nempe regularis, & irregularis; ad quorum intelligentiam proponuntur æquationes pro quolibet aſcenſu, & deſcenſu tam regulari, quam irregulari. ibid.
Plaſmaticum opus declaratur. ibid.
Æquationes, quibus plaſma ineſt. ibid.
Qua de cauſa æquationibus plaſma inſit. ibid.
Aduertenda quædam, quando æquatio plaſmatica eſt, per modum additionis, vel ſubtractionis. ibid.
Proponitur æquatio. ibid.
Æquatio plaſmatica per modum ſubtractionis. 154.
In cubo quomodo intelligatur affecta radix, &c. ibid.
Quando poteſtas eſt à radice plana. ibid.
Quadrato quadratum affectum ſub quadrato ducit originem à quadrato affecto ſublatere. ibid.
Quando cubo-cubus eſt affectus ſub cubo. ibid.
Omne quadrato quadratum eſt affectum ſub gradu parodico, &c. ibid.
Quando quadrato-quadratum afficitur tam ſub quadrato, quam ſub latere, quomodo æquatio plaſmatica ſit. 155.
Quando quadrato-quadratum afficitur ſub cubo, quo pacto plaſmatica ſit æquatio. ibid.
Æquatio cubica quo pacto deduci poſſit à quadraticis per climacticum irregularem aſcenſum. ibid.
Finis Plaſtices ſuperiùs inſinuatus fuit, & rurſus inſinuatur. ibid.
Multa in Tyronum gratiam afferuntur, vnde colligere licet, quæ alioquin obcuriora

ſcuriora videri poſſunt; atque hinc euidenter conſtat vis ipſius Plaſtices. ibid.
Affectio b' a' interpretationem accipiens ex æquatione propoſita, valet b' z pl. — b' a; ergo fiet æquatio vt ſuprà, facta ordinatione ſecundùm Artem. ibid.

De æquationibus deducendis.
Cap. XIX. pag. 156.

Deductio maximè conducit ad cognoſcendam æquationum naturam; propterea non eſt ſilentio prætereunda; imò de ea copioſè tractandum. ibid.
Auctor de quibuſdam magni momenti ſe acturum in ſuo Geometra promoto pollicetur. ibid.
AEquatio ſuperiùs generatim definita, diuiditur. ibid.
AEquatio alia originalis, alia canonica, quæ vel abſolutè eſt huiuſmodi, vel quia ab ipſa deducitur canonica. ibid.
Canonicarum æquationum primaria ſpecies vna, quid. ibid.
Canonica ſecundaria, quid. ibid.
AEquatio reciproca, quid. ibid.
Collaterales, quid. ibid.
AEquationes correlatæ, quid. ibid.
Auctor nedum tradit ſpecioſam Algebram in Geometria, ſed etiam Arithmeticæ gratiam. ibid.
Summopere decet nos eſſe ſollicitos de ipſa deducendi ratione. 157.
AEquationes cuiuſque ordinis quomodo ab æquationibus ſuis deducantur. ibid.
Exemplum de æquatione affirmatiua. ibid.
Ex multiplicatione poſitiui in negatiuum productio declaratur. ibid.
Exemplum æquationis negatiuæ, non ſecus, ac de affirmatiua. ibid.
Exemplum de æquatione amphibola. ibid.
AEquationes cubici ordinis quo pacto ab originalibus ſuis deducantur. ibid.
Quando æquationes fuerint reciprocæ. 158.
Nec diſſimiliter cæteræ æquationes huius ordinis ab originalibus ſuis deducuntur. ibid.
AEquationes affectæ à puris deducuntur. ibid.
Exempla. ibid.
Hactenus tradita numeris explicantur. 159.
Antiqua Algebra declaratur. ibid.
Alia Auctori eſt deductionis ratio. ibid.
A ſolinomia radice pura, oritur æquatio. ibid.
Proponitur æquatio affirmatiua quadratica, vnde affecta deducitur. ibid.
Proponitur æquatio pura, vnde affectæ deducuntur. ibid.
Supradictorum demonſtratio. 160.
AEquationes in quibus cubus afficitur ſub quadrato. ibid.
Proponuntur æquationes cubicæ. ibid.
Cùm affectio eſt ſub quadrato, & latere. ibid.
Multa conſiderantur, vnde plurimùm ſupradicta elucеſcunt. 161.
Obſeruanda quædam non exigui momenti. ibid.
Proponitur æquatio cubica affirmatiua affecta ſub latere. ibid.
Deductio, quam Auctor inſtituit, ſuprapoſitis æquationibus inſeruiens. ibid.
Deducitur æquatio affecta tam ſub latere, quàm quadrato. ibid.
Proponitur æquatio cubica negatiua affecta ſub latere. ibid.
Proponitur æquatio cubica amphibola affecta ſub latere. 162.
Alia quoque æquationes Auctoris artificio non diſſimiliter à cubicis deducuntur. ibid.
Proponitur æquatio cubica affecta ſub latere, vnde cubica affecta ſub latere à quadrato deducitur. ibid.
Proponitur æquatio cubica affirmatiua ſub latere affecta; vnde æquatio cubica affecta ſub quadrato, & latere deducitur per decrementum. ibid.
Proponitur æquatio cubica affirmatiua affecta ſub latere. ibid.
Proponitur æquatio cubica negatiua affecta ſub latere, & quadrato deducitur. ibid.
Proponitur æquatio quadratica negatiua, vnde cubica deducitur. 163.
Proponitur æquatio cubica negatiua affecta ſub latere, vnde cubica affecta tam ſub quadrato, quàm ſub latere, negatiua tamen deducitur. ibid.
Proponitur æquatio cubica ambigua; vnde deducitur ambigua cubica affecta ſub quadrato, & latere. Hæc deductio eſt per decrementum. ibid.
Superiora declarantur mediantibus ſecundis radicibus. 164.
Auctoris deducendi ratio in his æquationibus non eſt abſimilis illi, qua ſuperiùs eſt vſus in deductionibus aliarum. ibid.
Pleramque contingit æquationum pla-

nas, vel ſolidas eſſe radices. ibid.
Quid agendum, cùm radix eſt plana. ibid
Ad maiorem ſupradictorum explicationem, quadam aduertuntur. ibid.
Retinenda eſt radicis natura, propterea de ipſa, quatenus plana eſt, aquatio enunciari debet. ibid.
Supradictorum declaratio, ac accurata explicatio. ibid.
Proponitur aquatio quadratici ordinis negatiua, item amphibola. 165.
Exempla de aquatione cubica affirmatiua, negatiua, & amphibola. ibid.
Superius tradita declarantur. ibid.
Multa longa diſſertatione tractantur, qua maximè conducunt ad ſupradictorum explicationem, & eorum, qua ſunt deinceps futura. ibid.
Auctoris propria deductionis ratio ſupradictarum aquationum, in quibus quadrato-quadratum afficitur ſub quadrato ab aquatione quadratica. 166.
Quadrato-quadraticarum aquationum deductio ab affectis quadratis. ibid.
Proponitur aquatio quadratici ordinis affirmatiua, itidem negatiua; vnde quadrato-quadratica deducitur affecta ſub latere. 167.
Numeris eadem tractantur. ibid.
Deductio quadrato-quadraticarum aquationum ſubquadrato, & latere affectarum à quadraticis affectis. Primò proponitur affirmatiua quadratica; vnde ſit deductio; ſecundò negatiua itidem quadratica. ibid.
Superiora ſpeciebus tradita, numeris explicantur. ibid.
AEquatio negatiua, & aquatio amphibola. ibid.
AEquatio affirmatiua, vbi comparationis homogeneum eſt per modum differentia. ibid.
Quando comparationis homogeneum non proponitur per modum differentia, &c. ibid.
Affectio quadrato-quadratorum multiplex. ibid.
Proponitur exemplum, idemque declaratur. ibid.
Numeris eadem tractantur. 169.
Proponitur aquatio quadratica negatiua. ibid.
Quando affectio fuerit ſub quadrato. ibid.
Qua ratione aquationes quadrato-quadratica, in quibus affectio eſt ſubcubo, & quadrato ab aquationibus quadraticis affectis ſub latere per interpoſitum analogiſmum deducantur. ibid.
Proponuntur aquationes quadratica, vnde cubica deducuntur. 170.
AEquationes eadem numeroſè tractantur. ibid.

Quarundam æquationum conſtitutio perpenditur. Cap. XX. pag. 171.
Amphibola aquatio quid. ibid.
Contradicentes aquationes qua. ibid.
Inuerſa aquationes qua. ibid.
Proponitur aquatio amphibola ordinis quadratici. ibid.
Cubica aquationes amphibola. ibid.
Generali ratione inſtituitur pragmatia. ibid.
Explicatio ſupradictorum. 172.
Quid ex ſuprapoſita aquatione colligatur. ibid.
Quando aquationes fuerint contradicentes. ibid.
Quid colligatur ex ſupra traditis. ibid.
Quando aquationes ſuerint inuerſa. ibid.
Inuerſa aquationes, quarum vna per affirmationem, altera per negationem. ibid.
Quid colligatur ex ſupra traditis. 173.
Specialis inſtituitur tractio. ibid.
Syncriſeos doctrina explicatur. ibid.
AEquationis quadratica exemplum. ibid.
Numeris hucuſque tradita explicantur. ibid.
Explicatio, & comprobatio ſupradictorum. ibid.
Auctoris ratio, explicandi ſuprapoſitas aquationes. 174.
Explicatio ſupradictorum. ibid.
Hucuſque dicta communia ſunt aquationibus amphibolis. ibid.
Hucuſque dicta communia ſunt aquationibus amphibolis. ibid.
Proponitur aquatio altera amphibola cubici ordinis. 175.
Animaduertenda quadam. ibid.
De contradicentium conſtitutione diſſeritur. ibid.
Coefficiens, & comparationis homogeneum in huiuſmodi aquationibus, cui aquentur. ibid.
Numeris hac eadem tractantur, & illuſtrantur. 176.
Qua ratione Auctor contradicentium aquationum naturam inquirat. ibid.
In contradicentibus homogeneum vnde. ibid.

In

Digitized by Google

In contradicentibus ſubgraduales coefficientes vnde. ibid.
Quando æquationes extiterint Inuerſa. ibid.
Coefficiens vnde. ibid.
Comparationis homogeneum vnde. ibid.
Obſeruanda quædam circa traditam pragmatiam. 177.
Numeri eadem tractantur. ibid.
Quæ de ſupradictis æquationibus ſtatuantur. ibid.
Quid in æquationibus amphibolis ordinis quadratici, & quid in amphibolis ordinis cubici. ibid.
Nonnulla tractantur aduerſus quoſdam minùs benè loquentes. ibid.
Quid in æquationibus amphibolis quadrato-quadraticis. ibid.
Quædam maximè neceſſaria, & quidem ab Auctore adinuenta, & ſimilia. 178.
Æquationes amphibola quadrato-cubica, & cubo-cubica. ibid.
Auctor quædam animaduerſione digna proponit pro æquationibus quadraticis cubicis, quadrato-quadraticis, quadrato cubicis, & cubo-cubicis. ibid.
Penes quot latera vniuſcuiuſque æquationis naturalis conſtitutio attendi debeat. ibid.
Quædam conſideranda. ibid.
Quando ſunt æquationes amphibolæ quadrato-quadratica; quando quadrato-cubica, & quando cubo-cubica. ibid.
Quædam obſeruanda. ibid.
Vnde ſuperiora deducantur, inquiritur, & explicatur. ibid.
De contradicentibus æquationibus tractatio inſtituitur. 180.
Proponitur æquatio quadratica. ibid.
Numeris eadem tractantur, & Geometricè oſtenduntur. ibid.
Quando æquatio fuerit ordinis quadrato quadratici. ibid.
Geometra has æquationes quadrato-quadratica, & reliquas altioris ordinis deteſtatur. ibid.
Oſtenduntur ſupradicta proceſſu Analytico. ibid.
Proponitur æquatio cubo-cubica. 181.
Numeris eadem tractantur. ibid.
Æquationes ritè ſe habere declaratur. ibid.
Proponitur æquatio quadrato-quadratica. ibid.
Propoſitio de ipſis. ibid.
Supradictorum declaratio. ibid.
Pragmatia Analytica in ſupradictorum gratiam inſtituitur. ibid.
Proponitur pragmatia de ineunda demonſtratione Theorematis. 182.
Auctor declarat magis ſupradicta. 184.
Declarantur nonnulla tradita pag. 139. vbi Auctor neglexit reductionem fractionum ad minimos terminos, huius autem redditur cauſa. ibid.
Quæ tradita ſunt pag. 141. 146, & 147. item declarantur, & illuſtrantur. ibid.
Scholion. 185.
Superiora demonſtrantur. ibid.
Æquatio quadrato-cubica proponitur. ibid.
Numeris eadem tractantur, & explicantur. ibid.
Quando fuerint æquationes inuerſa. 186.
Explicantur ſuperiores æquationes. ibid.
Obſeruanda quædam. ibid.
Theorema ex hactenus dictis. ibid.
Proponuntur æquationes cubica. ibid.
Numeris eadem oſtenduntur, & explicantur. 187.
Efformatio comparationis homogenei. ibid.
Explicatio ſupradictorum, & æquationum comprobatio. ibid.
Proponuntur æquationes quadrato-cubica. ibid.
Numeris eadem tractantur. ibid.
Fit reditus ad cubicas æquationes. 188.
Æquatio quadrato-cubica affecta ſub-quadrato-quadrato. ibid.
Explicatio per numeros. ibid.
Æquatio quadrato-cubica affecta ſub-quadrato. ibid.
Numeris eadem tractantur. 189.
Inuerſarum alia conſtitutio. ibid.
Æquatio inuerſa cubica affecta ſub quadrato. ibid.
Omnia explicari, demonſtrarique poſſunt imitatione ſupradictorum. ibid.

Qua induſtria Analyſta vitijs laborantes æquationes emendet, & quo pacto ὠμὸχαιος fiat. Caq. XXI. pag. 190.

Præparatione laborantes æquationes emendantur. ibid.
Quinque præparandi æquationes modi. ibid.
Primus eſt expurgatio per vncias. ibid.
In æquationibus quadraticis quæ pars ſit adhibenda; quæ in cubicis, quæ in quadrato-quadraticis, quæ in quadrato-cubicis, &c. ibid.
Proponitur æquatio cubica. 191.

Vncia

Vnciæ conditionariæ quæ pro ſingulis æquationum ſpeciebus. ibid.
Quando poteſtas affecta fuerit affirmata. ibid.
Exemplo declaratur ſuperior doctrina. ibid.
Numeris explicantur hactenus tradita. ibid.
Proponitur æquatio cubica. ibid.
AEquatio, in quam propoſita per expurgationem transformata eſt. ibid.
AEquatio quadratica negatiuè affecta, cui ineſt plaſma. ibid.
Proponitur æquatio cubica, & æquatio quadratica amphibola. 192.
Reductio quadratorum affectorum ad pura; quæ remedium eſt aduerſus æquanum πολίπαθίαν. ibid.
Reductio, de qua differitur; quomodo Gracè dicatur. ibid.
Prima reductio æquationis in quadratum afficitur adiunctione plani ſub latere; dataque coefficiente longitudine. ibid.
Demonſtratio. ibid.
Radix explicata ſimplici æquatione. 193.
Proponitur æquatio quadratica negatè affecta; & Theorema. ibid.
Indagatio analytica; & propoſiti Theorematis demonſtratio. ibid.
Numeroſa æquatio negatè affecta; & eiuſdem reductio. ibid.
Proponitur æquatio quadratica amphibola. ibid.
Theorema. ibid.
Indagatio Analytica, & ſuperioris Theorematis demonſtratio. ibid.
Secunda hypotheſis æquationis quadraticæ amphibolæ. ibid.
Concluſio ibid. ibid.
Conſpectus demonſtrationis. ibid.
Numeroſa æquatio; eiuſdemque reductio. ibid.
AEquatio cubica, in qua cubus afficitur adiunctione ſolidi ſub quadrato; dataque coefficiente longitudine. ibid.
Indagatio Analytica, & Theorematis propoſiti demonſtratio. 195.
Conſpectus demonſtrationis. ibid.
AEquatio cubica negatè affecta ſub quadrato; & Theorema. ibid.
Indagatio Analytica; & propoſiti Theorematis demonſtratio. ibid.
Conſpectus demoſtrationis. ibid.
Proponitur æquatio cubica amphibola. ibid.
Duo Theoremata. ibid.
Indagatio Analytica; & duorum Theorematum demonſtrationes. ibid.
Conſpectus demonſtrationis. ibid.
Reductio cuborum affectorum tam ſub quadrato, quam ſub latere ad cubos ſimpliciter affectos ſub latere. ibid.
Proponitur æquatio cubica, &c. ibid.
Theorema. 197.
Quid ad Theorematis iſtius veritatem requiratur. ibid;
Indagatio Analytica, & propoſiti Theorematis demonſtratio. ibid.
Conſpectus demonſtrationis. ibid.
Obſeruanda plura.
Cubica æquatio affecta ſub quadrato, & ſub latere. 198.
Theorema. ibid.
Quid ad huius Theorematis veritatem requiratur. ibid.
Indagatio Analytica, & propoſiti Theorematis demonſtratio. ibid.
Conſpectus demonſtrationis. ibid.
Obſeruanda quædam. ibid.
Proponitur altera æquatio cubica affecta ſub quadrato, & latere. ibid.
Theorema. ibid.
Quid ad Theorematis veritatem requiratur. 199.
Conſpectus demonſtrationis. ibid.
Obſeruanda plura. ibid.
Secunda hypotheſis. ibid.
Animaduertenda quædam. ibid.
Proponitur æquatio cubica negatè affecta tam ſub quadrato, quàm ſub latere. ibid.
Theorema. ibid.
Indagatio Analytica propoſiti Theorematis, & eiuſdem demonſtratio. ibid.
Conſpectus demonſtrationis. ibid.
Proponitur æquatio cubica amphibola dupliciter affecta. ibid.
Proponitur æquatio deducenda. 201.
Theorema; & eius indagatio Analytica cum demonſtratione. ibid.
Conſpectus demonſtrationis. ibid.
Theorema, & eius indagatio Analytica cum demonſtratione. ibid.
Conſpectus demonſtrationis. 202.
Numeroſa æquationes. ibid.
Obſeruanda quædam. ibid.
Proponitur æquatio quadrato-cubica. ibid.
Theorema; & eius indagatio Analytica cum demonſtratione. ibid.
Conſpectus demonſtrationis. ibid.
Obſeruanda quædam. 203.
Quædam æquationes reductionis forma, vt à quibuſdam perficitur. ibid.
Emendatio æquationum negationis vi-

tio

tio laborantium quo pacto fieri debeat. ibid.
Quomodo Græcè appelletur. ibid.
Proponitur æquatio emendanda. ibid.
Æquatio emendata quomodo explicetur. ibid.
Obſeruanda quædam. 204.
Exemplum numeroſæ æquationis. ibid.
Supradictorum explicatio. ibid.
Numeris hoc æquationis genus explicatur. ibid.
Quando comparationis homogeneum fuerit irrationale. ibid.
Numeris eadem tractantur. ibid.
Analyticè hæc omnia demonſtrantur. ibid.
Proponitur æquatio cubica affecta ſub quadrato, & latere. ibid.
Æquationis quadrato-quadratica explicatio; eademque numeris tractata. ibid.
Quando comparationis homogeneum in huiuſmodi æquationibus fuerit in ſua plano planitie irrationale. ibid.
Æquationes cubicæ; & quadrato-quadratica. ibid.
Quando fuerint æquationis inuersè negata. ibid.
Quorundam error. ibid.
Proponitur altera æquatio. ibid.
Demonſtratio Analytica ſupradictorum. 206.
Numeris eadem tractantur. ibid.
Proponitur altera æquatio cubica amphibola emendanda. ibid.
Proponuntur aliæ æquationes; & eadem numeris tractantur. 207.
Anaſtrophe contraria via perficitur. ibid.
Iſomoeria quid; & qua ratione ipſa perficiatur. 208.
Sæpè accidit, vt hæc transmutatio non multiplicatione, ſed diuiſione perficiatur. ibid.
Hæc operatio exemplis illuſtratur. ibid.
Iſomoeria opus magis explicatur. 209.
Auctor hac de re multa ſcripſit in Algebra Veteri. ibid.
Explicantur numeris, quæ paulò antea tradita ſunt. ibid.
Fit reditus ad ſupropoſitam æquationem. ibid.
Concordantia præceptorum cum ſupropoſitis. ibid.
Proponitur æquatio, quæ per diuiſionem abſoluitur. ibid.
Aliæ proponuntur æquationes emendandæ, & eadem numeris tractantur. 210.
Idem contingere, cùm varij ſunt denominatores fractionum exemplis manifeſtum. ibid.
Proponitur æquatio cubica numeroſa emendanda; & æquatio cubica ſpecioſa fractionum vitio laborans: quæ quidem æquationes numeris tractantur, & duplici methodo explicantur. 211.
Quando ſecundus terminus deeſt. ibid.
Quando in æquatione ſunt magnitudines aſymmetræ; qua via procedendum. ibid.
Quando operatio diuiſione perficitur; & exemplum. 212.
Numeris eadem exhibentur. ibid.
Quando poteſtates non ſunt affectæ. ibid.
Symmetrica climactiſmus qua Arte perficiatur. ibid.
Quando aſymmetria fuerit in planitie. ibid.
Æquatio proponitur aſymmetriæ vitio laborans; & qua Arte ſit liberanda. ibid.
Numeris eadem tractantur. ibid.
Supradictorum declaratio. ibid.
Rurſus eadem tractantur; aſymmetria cùm fuerit in ſoliditate. ibid.
Artificis cautela in operando. 213.
Climactica parapleroſis qua Arte ſit inſtituenda. ibid.
Proponitur æquatio emendanda per climacticam parapleroſin. ibid.
Cùm æquatio fuerit negata inuerſè, &c. ibid.
Demonſtratio ſupradictorum. ibid.
Æquatio quadrato-quadratica emendanda. 214.
De duplicata hypoſtaſi ſuſcipitur tractandum. ibid.
Quomodo transmutetur cubus affectus ſub latere. ibid.
Proponuntur æquationes cubicæ transmutandæ hoc eodem artificio. ibid.
Quomodo æquationes præparentur, vt coefficientes, & comparationis homogenea ſint, quæ præſcribuntur. ibid.
Proponuntur exempla; quando coefficiens ſubgradualis debet eſſe, quæ præſcribitur. 215.
Numeris eadem tractantur, & explicantur. ibid.
Cautela obſeruanda. ibid.
Exemplum, quando comparationis homogeneum debet eſſe, quod præſcribitur. ibid.
Numeris idem exemplum explicatur. ibid.
Numeri quo pacto in numeros decimarum transmutentur; & exemplum, quod numeris declaratur. ibid.
Inſtituitur ſpeciatim reductio æquationum. 216.
In æquatione quæcumque tot ſunt radices,

quot

quot dimenſiones poteſtati. ibid.
Explicatio. ibid.
Æquatio amphibola proponitur. ibid.
Proponitur æquatio; & vnde originem trahat, inquiritur. 217.
De falſis radicibus diſquiritur. ibid.
Quomodo æquationum paraboliſmus inſtituatur. ibid.
Explicatio. ibid.
Quando æquatio diuiſionem non patitur. ibid.
Altera æquatio ſuperiùs poſita diuidi poteſt; ſic etiam, & alia ordinis biquadratici. ibid.
Superior æquatio cubica rurſus multiplicatur per binomium ex incognita, quantitate. ibid.
Hæc æquatio producta multas ſubit diuiſiones. ibid.
Explicatur diuiſio ſuperioris æquationis. 220.
Alio æquationis exemplo ſuperiora explicantur. ibid.
Quomodo ſe habeant æquationes, quarum plures ſunt radices. ibid.
Explicantur æquationis termini. ibid.
Alio æquationis exemplo ſuperiora explicantur. 221.
Proponitur æquatio trium dimenſionum, cuius ſunt tres radices. ibid.
Proponitur æquatio quatuor dimenſionum. ibid.
Concluſio ex ſupradictis. ibid.
Radicum numerus inquiritur. ibid.
Continuatio doctrinæ de radicum numero indagando; & de ipſarum æquationum tranſmutatione. 222.
Superiora iterum conſiderantur. ibid.
Superioris quæ, & quot radices; ex ijs verò, quæ falſæ. ibid.
Proponitur æquatio cubici ordinis. ibid.
Quomodo ſe habeant radices veræ, & falſæ in æquatione. ibid.
Altera æquatio cubica proponitur. 223.
$\sim$; *ſignificat plus, vel minùs.* ibid.
Vnde æquatio propoſita ſuum ortum ducat. ibid.
Metamorphoſis radicum qua Arte perficiatur. ibid.
Superior æquatio producitur ex illis tribus radicibus veris, & altera falſa. ibid.
Quæ traduntur, nedum locum habent in æquationibus completis; ſed etiam in incompletis. ibid.
Proponitur altera æquatio. ibid.
Explicationis continuatio. ibid.
Incognitæ radices poſſunt aliqua nota quantitate augeri, & minui. ibid.
Quæ de augenda radice dicta ſunt; de diminuenda intelligi quoque debent. 226.
Æquatio ſuperior vnde collecta eſt. ibid.
Falſæ radices alicuius æquationis quantitate diminuuntur, qua radices veræ eiuſdem augentur. 227.
Exemplum; & eius explicatio. 228.
Perpenditur æquatio propoſita, & ſupradicta explicantur. 229.
Modus, mutandi valorem radicum, ad quid conducat. 230.
Proponitur, & explicatur æquatio. 231.
Supradictorum comparatio. ibid.
Altera proponitur æquatio. 232.
Quomodo innoteſcat valor primæua radicis. ibid.
Quomodo procedendum in huiuſmodi pragmatia. 233.
Proponitur alia æquatio; & ea explicatur. ibid.
Tollitur ſecundus æquationis terminus. 234.
Operationis inſtitutio. ibid.
Proponitur æquatio altera, cuius ſecundus terminus tollendus eſt. ibid.
Ad quid conducat ablatio ſecundi termini. ibid.
Accurata ſupradictorum declaratio. ibid.
Quâ Arte aliter etiam ſecundus æquationis terminus tollatur. 235.
Quâ nam eruatur radix in æquatione aliqua propoſita. ibid.
Falſæ radices æquationis euadunt veræ; at veræ non fiunt falſæ. 236.
Radices æquationis quamuis incognitæ, multiplicari, diuidique poſſunt per quamlibet cognitam quantitatem. ibid.
Proponitur æquatio, cuius loco alia ſubſtituenda ſit, in qua omnes termini per numeros rationales exprimantur. ibid.
Propoſitum articulum exemplo explicatur. ibid.
Alia proponitur æquatio. ibid.
Continuatio explicationis ſupradictorum. 237.
Quomodo loco vnius æquationis alia ſubſtituatur. ibid.
Supradicta magis explicantur. ibid.
Quando ſuperior æquatio alio ſe haberet modo. ibid.
Quid ſit ſuperiorem æquationem perficere. ibid.
Supradictorum comprobatio. 238.
Adnotanda quædam. ibid.

Hoc

Digitized by Google

Hoc eſt Iſomoeria opus ſuperiùs explicatum. ibid.
Ad quid hæc operatio conducat. ibid.
Explicatio ſupradictorum. ibid.
De cubicarum æquationum reductione inſtituitur tractatio; & exemplum. 239.
Qua Arte diuiſio perficiatur. ibid.
Proponuntur tres æquationes. 240.
Obſernanda quædam circa diuiſionem. 241.
Explicatio ſupradictorum. ibid.
Animaduerſio eorundem. 242.
Proponitur æquatio; eiuſque reductio. ibid.
Quando fuerit æquatio, in qua incognita quantitas quatuor eſt dimenſionum. ibid.
Proponitur æquatio; & Ars explicatur, qua fiat reductio. ibid.
Notanda quædam circa ſigna ✠, *&* —. 243.
Explicatio ſupradictorum. ibid.
Obſeruanda quædam. ibid.
Proponuntur aliæ æquationes; & afferuntur exempla diuiſionis. 244.
Explicatio vlterior ſupradictorum. 245.
Obſeruatio circa ſigna ✠, *&* —. ibid.
Aduertenda quædam in gratiam ſupradictorum. 246.
AEquationum limites; quando fuerunt æquationes quadraticæ. 247.
Tres huius ordinis proponuntur æquationes, quarum limites inquirun.ur. ibid.
Adnotanda plura. ibid.
Quando fuerint æquationes cubicæ. ibid.
Plures huius ordinis æquationes proponuntur, quarum limites indagantur. ibid.
Obſeruanda plura. 248.
Proponuntur æquationes cubicæ, in quibus penultimus terminus deeſt. ibid.
Quando in æquationibus cubicis omnes termini extant. ibid.

LAVS DEO.

Digitized by Google